

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال یازدهم، شماره پنجاه و سوم، فروردین و اردیبهشت ۱۴۰۴

شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸۸



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

نظریه ساختاری فراگروه

منیره علی‌آبادی^۱، غلامرضا مقدسی^{۲*}، پروانه ذوالفقاری^۳

^(۱) گروه ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه حکیم سبزواری، سبزوار، ایران

^(۳) گروه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، صندوق پستی ۱۴۶۶۵۸۸۹ تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۲/۰۳/۰۳ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۲/۰۹/۲۸

چکیده

در این مقاله، به بررسی فراگروه‌ها، که ساختار آن بر اساس خواص تراگردی از زیرگروهی از یک گروه است، پرداخته می‌شود. در ابتدا مفاهیم مقدماتی توضیح داده می‌شود و سپس با توجه به اهمیت رسته، برخی از خواص رسته فراگروه‌ها و فانکتور بین دو رسته گروه‌ها و فراگروه‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد. در ادامه به بررسی فراگروه‌های دوری و خواص آن‌ها پرداخته و صحت قضایای کوشی و سیلو برای فراگروه‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد. علاوه بر این شرایط حل‌پذیری فراگروه‌ها نیز بررسی می‌شود و قضایای ژردان-هولدر و شیرر و لم زاسن هاوس برای فراگروه‌ها ثابت می‌شود.

واژه‌های کلیدی: فراگروه دوری، فراگروه حل‌پذیر، لم زاسن هاوس، رسته فراگروه‌ها، فراگروه نرمال.

۱- مقدمه

در سال ۲۰۰۸ دالالیان [1] از تعریف تراگرد استفاده نمود و با استفاده از آن، مفهوم جدیدی را تحت عنوان ابرگروه‌ها مطرح نمود. در ادامه روند تحقیق درباره تراگردها، اخیراً نویسندگان مفهوم فراگروه‌ها وابسته به تراگردها را تعریف کردند و مفاهیم پایه مانند زیرفراگروه، فراگروه‌های نرمال و فراگروه‌های خارج قسمتی و همنهشتی فراگروه‌ها را مورد بررسی قرار دادند [2]. در ادامه رسته فراگروه‌ها مورد بررسی قرار گرفت و ثابت شد که این رسته کامل و هم‌کامل است و قضایای هم‌ریختی در رسته فراگروه‌ها بیان و اثبات گردید. (مرجع [3] را ببینید). در ۲۰۲۲ الیس و همکاران نظریه فراگروه و کاربرد گپ در فراگروه‌ها را بررسی نمودند [4]. با توجه به اهمیت ساختار جبرهای دوری [5، 6]، در ادامه فراگروه‌های دوری را بیان و برخی از خواص آنها را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در سراسر این مقاله از مفاهیمی استفاده خواهیم کرد که از مراجع [2، 3، 7، 8] نوشته شده‌اند. به دلیل اهمیت، به بیان برخی از تعاریف و قضایا می‌پردازیم.

زوج مرتب (A, B) از زیرمجموعه‌های گروه G را یک جفت تراگرد نامیم هرگاه برای هر $a, a' \in A$ و $b, b' \in B$ شرط زیر برقرار باشد:

$$ab = a'b' \Rightarrow a = a', b = b'$$

با تعمیم این تعریف به زیرگروه‌های یک گروه، نتیجه می‌گردد که زوج مرتب (H, M) از زیرگروه‌های گروه G یک جفت تراگرد است اگر و تنها اگر $H \cap M = \{e\}$. اکنون اگر M, H به ترتیب یک زیرگروه و یک زیرمجموعه از گروه G باشند، آن‌گاه (H, M) یک جفت تراگرد از گروه G است اگر و تنها اگر برای هر $g \in G$ مجموعه $M \cap Hg$ فقط شامل یک عضو از گروه G باشد و $H \cap M = \{e\}$. فرض کنید H زیر گروه از گروه G باشد زیر مجموعه M از G را تراگرد راست می‌نامیم هرگاه M شامل فقط یک عضو از هر هم‌مرده راست H در G باشد. در این صورت $G = HM$.

تراگرد چپ را همانند تراگرد راست بر اساس هم‌مرده‌های چپ می‌توان تعریف نمود. لذا اگر H یک زیرگروه از گروه G باشد، آن‌گاه $G = HM$ با فرض آن که M یک تراگرد راست باشد نتیجه می‌گردد که $MH \subseteq HM$. بنابراین برای هر $a, b \in M$ ، با توجه به آنکه $G = HM$ نتیجه می‌گردد که وجود دارند عناصر $h \in H$ و $m \in M$ به طوری که $ab = hm$. عناصر m, h را به ترتیب با $h^{(a,b)}$ و $[a, b]$ نشان می‌دهیم. هم چنین برای هر $h \in H$ و $m \in M$ عناصر منحصر به فرد $h_1 \in H$ و $m_1 \in M$ وجود دارند به طوری که $mh = h_1 m_1$. عناصر h_1 و m_1 را به ترتیب با h^m و m^h نمایش می‌دهیم.

تراگرد راست M از گروه G را همراه با عمل دوتایی α ، که $\alpha(a, b) = [a, b]$ و اعمال یکانی β_h ، برای هر $h \in H$ که $\beta_h(a) = a^h$ ، را فراگروه راست می‌نامیم و به M نمایش می‌دهیم.

برای هر عنصر $a \in G$ ، معکوس a عضوی از G است لذا عناصر $m \in M$ و $h \in H$ وجود دارند به طوری که $a^{-1} = hm$. عناصر h و m را به ترتیب با $a^{(-1)}$ و $a^{[-1]}$ نمایش می‌دهیم. به عبارت دیگر برای هر $a \in M$ عنصر معکوس $a^{[-1]} \in M$ موجود است که $[a^{[-1]}, a] = e$.

لم ۱-۱. فرض کنید M فراگروه حاصل از زیر گروه H از یک گروه G باشد. در این صورت برای هر $a, b, c \in M$ و $h, h' \in H$ ، ویژگی‌های زیر را داریم:

$$1. a^{hh'} = (a^h)^{h'}$$

$$2. [a, b]^h = [a^{(b^h)}, b^h]$$

$$[[a, b], c] = [a^{(b, c)}, [b, c]] \quad ۳.$$

$$e^h = e, a^e = a \quad ۴.$$

$$[e, a] = a = [a, e] \quad ۵.$$

$$[a^{[-1]}, a] = e = [a^{a^{(-1)}}, a^{[-1]}] \quad ۶.$$

$$(a^{[-1]})^{[-1]} = a^{a^{(-1)}} \quad ۷.$$

$$[a, c] = [b, c] \Rightarrow a = b \quad ۸.$$

تعریف ۱-۲. فرض کنید M یک فراگروه وابسته به گروه G باشد. در این صورت M را فراگروه آبدلی نامیم هرگاه برای هر $a, b \in M$ داشته باشیم $[a, b] = [b, a]$.

تعریف ۱-۳. زیرمجموعه S از فراگروه M که شامل e باشد را زیرفراگروه از M نامیده می‌شود هرگاه S تحت اعمال α, β_h بسته باشد.

قضیه ۱-۴. فرض کنید S یک زیرفراگروه از فراگروه M از یک گروه G باشد و $a, b \in M$ در این صورت شرایط زیر معادلند:

$$a \in [S, b] \quad ۱.$$

$$[S, a] = [S, b] \quad ۲.$$

$$[a^{b^{(-1)}}, b^{(-1)}] \in S \quad ۳.$$

تعریف ۱-۵. فرض کنید M یک فراگروه وابسته به گروه G باشد. در این صورت زیرفراگروه N ، از فراگروه M را نرمال نامیم هرگاه برای هر $a, b \in M$ داشته باشیم:

$$[N, [a, b]] = [a, [N, b]]$$

تعریف ۱-۶. فرض کنید M_i فراگروه‌های حاصل از زیرگروه‌های H_i از گروه‌های G_i ، $i = 1, 2$ باشند. هم‌چنین ϕ یک هم‌ریختی بین زیرگروه‌های H_1 و H_2 باشد. در این صورت تابع $f: {}_{H_1}M_1 \rightarrow {}_{H_2}M_2$ یک هم‌ریختی فراگروهی است هرگاه داشته باشیم:

$$f([m, m']) = [f(m), f(m')], \quad m, m' \in M \quad ۱.$$

$$f(m^h) = (f(m))^{\phi(h)}, \quad m \in M \text{ و } h \in H \quad ۲.$$

اکنون به بیان قضایای یکرختی برای فراگروه‌ها می‌پردازیم.

قضیه ۱-۷. فرض کنید f یک هم‌ریختی بین دو فراگروه ${}_{H_1}M_1$ و ${}_{H_2}M_2$ به ترتیب از گروه‌های G_1 و G_2 چنان باشد که هم‌ریختی $\phi: H_1 \rightarrow H_2$ مفروض در تعریف هم‌ریختی برو باشد. در این صورت

$${}_{H_1}M_1 / \text{Ker}(f) \cong f({}_{H_1}M_1)$$

قضیه ۱-۸. اگر N, N' زیرفراگروه‌های نرمال فراگروه M چنان باشند که $N \subseteq N'$ ، آن‌گاه

$$\frac{\frac{M}{N}}{\frac{N'}{N}} \cong \frac{M}{N'}$$

قضیه ۹-۱. اگر K, N زیرفراگروه‌هایی از فراگروه M باشند به طوری که N زیرفراگروه نرمال از M باشد، آن گاه

$$\frac{K}{K \cap N} \cong \frac{[K, N]}{N}$$

۲- رسته فراگروه‌ها

در مرجع [3] مفاهیم اولیه رسته فراگروه‌ها بررسی و اثبات گردیده است، هم چنین کامل و هم کامل بودن این رسته ثابت شده است. با توجه به اهمیت مفهوم رسته، به بررسی برخی دیگر از خواص آن مانند جداساز^۲ و هم جداساز^۳، ... و برخی از خواص مورفیسیم‌ها از قبیل درون‌بری^۴ و هم‌درون‌بری^۵ و هم چنین فانکتور بین رسته گروه‌ها و فراگروه‌ها می‌پردازیم. در ادامه نشان می‌دهیم هر بروریکتی در این رسته منظم^۶ نیز هست. مفاهیم و اصطلاحات اولیه رسته‌ها را میتوان به صورت کامل در مرجع [8] مشاهده نمود. در یک رسته ملموس، شی S را مولد نامیم هرگاه برای هر دو مورفیسیم مجزا مانند f, g از شی A به شی B ، مورفیس $h: S \rightarrow A$ چنان وجود داشته باشد که $fh \neq gh$. در یک رسته ملموس همواره شی‌های آزاد مولد هستند و لذا این برای هر رسته از جمله رسته فراگروه‌ها نیز برقرار است. قبلا در مرجع [6] ثابت شد که اگر F یک گروه آزاد بر روی مجموعه X باشد آن گاه زیرگروه‌های آن نیز آزاد می‌باشند و با توجه به این گروه و زیرگروه‌هایش، فراگروه آزاد در این رسته، یعنی $(W(X), \alpha, \beta)$ ساخته شد. (مرجع [3] را ببینید). هم چنین چون $F = (Z, +)$ گروه آزاد بر روی یک مجموعه تک عضوی است و زیرگروه‌های آن به صورت $(nZ, +)$ هستند لذا فراگروه‌های ساخته شده، شی‌های آزاد در این رسته می‌باشند و در نتیجه مولد نیز هستند.

قضیه ۱-۲. در رسته فراگروه‌ها، هم جداساز وجود ندارد.

اثبات. فرض کنیم شی C فراگروه هم جداساز باشد. با توجه به وجود گروه ساده با کاردینال بزرگ‌تر از هر گروه دلخواه در رسته گروه‌ها، فراگروه ساده A را که $|A| > |C|$ و دو هم‌ریختی فراگروهی دلخواه $f, g: B \rightarrow A$ را چنان در نظر می‌گیریم که $f \neq g$. اکنون چون C هم جداساز می‌باشد لذا هم‌ریختی $h: A \rightarrow C$ چنان باید موجود باشد که $hf \neq hg$. از طرفی چون C یک فراگروه ساده است لذا هسته h باید همانی باشد که وجود هم‌ریختی h با توجه به یک به یک بودن آن تناقض است. در نتیجه هم جداساز در این رسته وجود ندارد. در رسته فراگروه‌ها ثابت شد تکریکتی با یک به یک بودن و هم چنین بروریکتی و پوشایی معادل هستند [۳]. مثال زیر نشان می‌دهد در این رسته تکریکتی، هم‌درون‌بری را نتیجه نمی‌دهد.

مثال ۲-۲. فرض کنید

$M = \{e, (13), (23), (14), (24), (34), (134), (143), (234), (243), (1324), (1423)\}$
فراگروه حاصل از زیرگروه $H = \{e, (12)\}$ بر روی گروه $G = S_4$ باشد. شی $A = \{e, (13), (23)\}$ و $B = M$ و هم‌ریختی f از A به M را شمول در نظر می‌گیریم. با محاسبه، می‌توان ملاحظه نمود که هیچ هم‌ریختی فراگروهی مانند $g: M \rightarrow A$ نمی‌توان یافت به طوری که $\text{gof} = \text{id}_A$. حال نشان می‌دهیم تحت چه شرایطی فرا بروریکتی، درون‌بری را نتیجه می‌دهد.

² Separator

³ Coseparator

⁴ Retraction

⁵ Coretraction

⁶ Regular Epimorphism

فرض کنید $f: H_1 A \rightarrow H_2 B$ همریختی پوشا باشد. اگر مورفیزم f درون‌بری باشد باید همریختی g از B به $H_1 A$ چنان وجود داشته باشد به طوری که $f \circ g = id_B$. با توجه به این نکته در مرجع [3]، در صورتی معکوس یک فراریختی یک فراریختی است که خود فراریختی یک به یک و همریختی بین زیرگروه‌های H_1, H_2 همریختی برو باشد، بنابراین مورفیزم f باید یکرختی باشد.

با توجه به اینکه هر گروه دلخواه G با در نظر گرفتن زیرگروه $H = \{e\}$ ، فراگروه می‌باشد و با توجه به قضیه ۱۶،۲ در مرجع [9] که همریختی گروهی، همریختی فراگروهی را نتیجه می‌دهد لذا رسته گروه‌ها، زیررسته فراگروه‌ها می‌باشد و می‌توان تحت فانکتور شمول رسته گروه‌ها را در رسته فراگروه‌ها نشان داد. این فانکتور تام^۷ است چون رسته گروه‌ها زیررسته تام فراگروه‌ها می‌باشد. طبق نتیجه ۴،۴ در مرجع [8] این فانکتور نشاننده^۸ نیز هست، لذا وفادار^۹ و هم چنین یک به یک به روی اشیا رسته می‌باشد (نکته ۲۸،۳ در مرجع [8] را ببینید) اما روی اشیا خود، پوشا نمی‌باشد یعنی برای هر فراگروه دلخواه مانند M_H در رسته فراگروه‌ها طبق فانکتور شمول، گروهی وجود ندارد که تصویرش فراگروه M_H شود. بنابراین طبق قسمت دوم نکته ۲۸،۳ در مرجع [8] این فانکتور یکرختی نمی‌باشد. از طرفی چون به ازای هر فراگروه دلخواه مانند M گروهی وجود ندارد که تحت فانکتور شمول با فراگروه M یکرخت شود لذا این فانکتور هم‌چگال^{۱۰} نیز نبوده و در نتیجه هم‌ارزی^{۱۱} نیز نمی‌باشد (تعریف ۳۳. ۳ در [8] را ببینید).

در ادامه نشان می‌دهیم که در رسته فراگروه‌ها هر فرابروریختی منظم هست. در ابتدا تعاریف زیر را یادآوری می‌کنیم. مورفیزم $c: B \rightarrow C$ را هم برابر ساز یک جفت مورفیزم f, g از A به B نامیم هرگاه $\text{cof} = \text{cog}$ و برای هر مورفیزم $c': B \rightarrow C'$ که $c' \circ f = c' \circ g$ باشد، مورفیزم منحصر به فرد $\bar{c}: C \rightarrow C'$ چنان موجود باشد که $\bar{c} \circ c = c'$ (تعریف ۶۸. ۷ در [8]). هم چنین مورفیزم مانند $c: B \rightarrow C$ را بروریختی منظم نامیم هرگاه C هم برابر ساز^{۱۲} یک جفت مورفیزم باشد (تعریف ۷۱. ۷ در [8]).

قضیه ۲-۳. در رسته فراگروه‌ها، هر فرا بروریختی منظم است.

اثبات. فرض کنید $f: M_1 \rightarrow M_2$ فرا بروریختی باشد. در نظر بگیرید

$$M = \{(m, m') \in M_1 \times M_1 \mid f(m) = f(m')\}$$

ابتدا نشان می‌دهیم M زیرفراگروه از $M_1 \times M_1$ است. فرض کنید $(a, a'), (b, b') \in M$ باشند. در این صورت $f(a) = f(a')$ و $f(b) = f(b')$. حال با توجه به حاصل ضرب فراگروه‌ها در مرجع [3] داریم:

$$\text{لذا } [(a, a'), (b, b')] = ([a, b], [a', b'])$$

$$([a, b], [a', b']) \in M \Leftrightarrow f[a, b] = f[a', b']$$

$$\Leftrightarrow [f(a), f(b)] = [f(a'), f(b')]$$

$$\Leftrightarrow f(a) = f(a'), f(b) = f(b')$$

$$\Leftrightarrow (a, a'), (b, b') \in M$$

⁷ full

⁸ embedding

⁹ faithful

¹⁰ Iso-dense

¹¹ equivalent

¹² Coequalizer

هم چنین چون $f(a) = f(a')$ به ازای هر $h \in H$ داریم $f(a)^{\phi(h)} = f(a')^{\phi(h)}$ در نتیجه $f(a^h) = f(a')^h$ لذا $(a^h, a'^h) \in M$ و این بسته بودن عمل یکانی را نشان می‌دهد.

حال اگر دو مورفیزم $g, h: M \rightarrow M_1$ را به صورت $g(m, m') = m, h(m, m') = m'$ تعریف کنیم واضح است $fg = fh$. فرض کنیم $\varphi: M_1 \rightarrow M_3$ همریختی فراگروهی باشد به طوری که $\varphi g = \varphi h$. تابع $\bar{\varphi}: M_2 \rightarrow M_3$ با $\bar{\varphi}(m_2) = \varphi(m_1)$ را تعریف می‌کنیم که $m_2 = f(m_1)$ چون f پوشا است.

به سادگی دیده می‌شود که $\bar{\varphi}$ همریختی فراگروهی است و $\bar{\varphi}f = \phi$. همریختی $\bar{\varphi}$ منحصر به فرد است زیرا اگر وجود داشته باشد همریختی فراگروهی $\psi: M_2 \rightarrow M_3$ به طوری که $\psi f = \phi$ آن‌گاه $\psi f(m_1) = \phi(m_1) = \bar{\varphi}(m_1)$ و لذا $\psi(m_2) = \bar{\varphi}(m_1)$ در نتیجه $\psi = \bar{\varphi}$.

۳- نظریه ساختاری فراگروه‌ها

در این بخش، فراگروه‌های دوری به صورت فراگروه‌هایی که توسط یکی از عناصرشان تولید می‌شوند معرفی و طبقه‌بندی می‌شوند و وارسته بودن آن‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد و صحت قضایای سیلو و کوشی برای فراگروه‌ها بررسی می‌شود. در ادامه، نرمال‌ساز یک عنصر فراگروه را بیان و حل‌پذیری فراگروه‌ها را بررسی می‌کنیم و لم زاسن هاوس و قضایای ژردان-هولدر و شیریر بیان می‌شوند.

با توجه به تعریف زیرفراگروه، لم زیر را داریم:

لم ۳-۱. فرض کنید M فراگروه حاصل از زیرگروه H از یک گروه G باشد و M_i یک خانواده از زیرفراگروه‌های M باشند. در این صورت $\bigcap_{i \in I} M_i$ یک زیرفراگروه M است.

تعریف ۳-۲. فرض کنید M فراگروه حاصل از زیرگروه H از گروه G باشد و X زیرمجموعه‌ای از M و M_i یک خانواده از زیرفراگروه‌های M باشند که شامل X هستند. در این صورت $\bigcap_{i \in I} M_i$ زیرفراگروه تولید شده توسط X نامیده و با $\langle X \rangle$ نمایش داده می‌شود. عناصر مجموعه X مولدهای زیرفراگروه $\langle X \rangle$ نامیده می‌شوند. فراگروه $M = \langle m_1, \dots, m_n \rangle$ که $m_i \in M$ را فراگروه متناهی تولید شده می‌نامند.

قضیه ۳-۳. فرض کنید M فراگروه حاصل از زیرگروه H از یک گروه G باشد و $X = \{m_1, \dots, m_k\}$ زیر مجموعه‌ای ناتهی از M باشد. در این صورت

$$\langle x \rangle = \{[\dots, [c_1^{\varepsilon_1}, c_2^{\varepsilon_2}], \dots, c_k^{\varepsilon_k}] \mid k \in N, c_i \in \{m_1^{h_i}, \dots, m_k^{h_i}\}, \varepsilon_i \in \{1, [-1]\}, h_i \in H\}$$

اثبات. فرض کنید

$$k = \{[\dots, [\{ [\dots, [c_1^{\varepsilon_1}, c_2^{\varepsilon_2}], \dots, c_k^{\varepsilon_k}] \mid k \in N, c_i \in \{m_1^{h_i}, \dots, m_k^{h_i}\}, \varepsilon_i \in \{1, [-1]\}, h_i \in H \}$$

و $x, y \in K$. در این صورت $k, l \in N$ و عناصر $b_i, d_j \in \{m_1^{h_i}, \dots, m_k^{h_i}\}$ و $\varepsilon_i, \delta_j \in \{1, [-1]\}$ چنان

$$y = [\dots, [d_1^{\delta_1}, d_2^{\delta_2}], \dots, d_k^{\delta_k}] \text{ و } x = [\dots, [b_1^{\varepsilon_1}, b_2^{\varepsilon_2}], \dots, b_k^{\varepsilon_k}]$$

بنابراین

$$[x, y]^h = [\dots, [[[b_1^{\varepsilon_1}, b_2^{\varepsilon_2}], \dots, b_k^{\varepsilon_k}], [[d_1^{\delta_1}, d_2^{\delta_2}], \dots, d_k^{\delta_k}]], \dots]^h = [\dots, [[d_1^{\delta_1}, d_2^{\delta_2}], \dots, d_k^{\delta_k}]^{h'}, [[b_1^{\varepsilon_1}, b_2^{\varepsilon_2}], \dots, b_k^{\varepsilon_k}]^h]^h$$

که $h' = ([\dots, [d_1^{\delta_1}, d_2^{\delta_2}], \dots, d_k^{\delta_k}])h$ به فرم عناصر K است. بنابراین K یک زیرفراگروه است. اکنون نشان می‌دهیم

که $X \subseteq K$ و K مشمول در هر زیرفراگروه شامل X است. برای هر $m_i \in X$ کافی است

$h=e, \varepsilon=1=k$ در نظر بگیریم. بنابراین $X \subseteq K$. فرض کنید Y زیرفراگروهی از M و $X \subseteq Y$ ، برای هر $m' \in K$ ، $k' \in N$ چنان موجود است که

$$m' = \{[\dots, [\{[\dots, [c_1^{\varepsilon_1}, c_2^{\varepsilon_2}], \dots, c_k^{\varepsilon_k}]] \mid k \in N, c_i \in \{m_1^{h_i}, \dots, m_k^{h_i}\}, \varepsilon_i \in \{1, [-1]\}, h_i \in H\}$$

چون $m' \in Y$ ، بنابراین $c_i \in X \subseteq Y$

با توجه به قضیه بالا برای هر فراگروه M و عنصر $m \in M$ می توان نوشت:

$$\langle m \rangle = \{[\dots, [c_1^{\varepsilon_1}, c_2^{\varepsilon_2}], \dots, c_k^{\varepsilon_k}]] \mid h_i \in H, \varepsilon_i \in \{1, [-1]\}, k \in N\}$$

بنابراین برای هر $m \in M$ به طور خلاصه داریم:

$$\langle m \rangle = \{((m^{h_i})^{\varepsilon_i})^k \mid h_i \in H, \varepsilon_i \in \{1, [-1]\}, k \in N\}$$

تعریف ۳-۴. فرض کنید M فراگروه حاصل از زیرگروه H از یک گروه G باشد. برای $m \in M$ اگر $M = \langle m \rangle$ آنگاه فراگروه M فراگروه دوری تولید شده توسط m نامیده می شود.

اگر فراگروه M دوری تولید شده توسط m باشد آنگاه برای هر $h \in H$ عناصر m^h نیز مولدی برای M می باشند.

مثال ۳-۵. فرض کنید

$$M = \{e, (13), (23), (14), (24), (34), (134), (143), (234), (243), (1324), (1423)\}$$

فراگروه از زیرگروه $H = \{e, (12)\}$ از گروه $G = S_4$ باشد. در این صورت برای توصیف عناصر این فراگروه دوری به صورت زیر عمل می کنیم:

برای $K=1$ داریم:

$$(1324)^e = (1324)$$

$$(1324)^{(12)} = (1423)$$

$$(1324)^{[-1]} = (1423)$$

$$(1324)^{(12)^{[-1]}} = (1324)$$

برای $k=2$ داریم:

$$[(1324), (1324)] = (34)$$

$$[(1324), (1423)] = e$$

$$[(1423), (1423)] = (34)$$

$$[(1423), (1324)] = e$$

برای $k=3$ داریم:

$$[(1324), (1324)], (1324) = (1423)$$

$$[(1324), (1324)], (1423) = (1423)$$

$$[(1423), (1423)], (1423) = (1324)$$

$$[(1423), (1423)], (1324) = (1423)$$

با ادامه این روند، ملاحظه می شود که عنصر جدیدی حاصل نمی شود. لذا داریم:

$$\langle (1324) \rangle = \{e, (1324), (1423), (34)\}$$

لم ۳-۶. فرض کنید M فراگروه حاصل از زیرگروه H از یک گروه G باشد. اگر عنصر $m \in M$ چنان موجود باشد که $|M| = o(m)$ آن‌گاه فراگروه M دوری است.

اثبات. فرض کنید $o(m) = n$ باشد. بنابراین $e = \underbrace{[\dots, [m, m], m], \dots, m]}_n$ در هر مرحله از عمل دوتایی α

روی m یعنی $[m, m]$ طبق قانون حذف از راست برای فراگروه، عنصری متمایز به دست می‌آید. چون $|M| = o(m)$ ، لذا همه عناصر فراگروه تولید می‌شوند.

عکس لم بالا در حالت کلی برقرار نیست. اگر فراگروه دوری M از مرتبه n باشد، آنگاه لزوماً فراگروه دارای عنصری از مرتبه n نیست.

مثال ۳-۷. فرض کنید $M = \{e, (12), (24), (34), (124), (142), (134), (1423)\}$ فراگروه دوری تولید شده توسط عنصر (34) از زیرگروه $H = \{e, (123), (132)\}$ از گروه $G = S_4$ باشد. در این صورت مرتبه فراگروه ۸ است در حالی که عنصری از مرتبه ۸ ندارد.

در رسته گروه‌ها هر گروه دوری، آبلی است اما در رسته فراگروه‌ها لزوماً چنین حکمی برقرار نیست. همانطور که از قبل می‌دانیم هر کلاس ناتهی از جبری از نوع F وارسته است اگر و تنها اگر نسبت به زیرجبر بودن و تصویر همریخت و حاصل ضرب بسته باشد. (قضیه ۵، ۹ مرجع [10] را ببینید). در ادامه شرایط وارسته بودن فراگروه‌های دوری را بررسی می‌کنیم.

لم ۳-۸. هر تصویر همریخت فراگروه دوری، دوری است.

اثبات. فرض کنید $f: {}_H M \rightarrow {}_{H'} M'$ همریختی فراگروهی باشد و $M = \langle a \rangle$ برای یک $a \in {}_H M$ فرض کنید $m' \in \text{Im } g(f)$ لذا عنصر $m \in {}_H M$ چنان موجود است که $m' = f(m)$. چون فراگروه، دوری با مولد a است، بنابراین عناصر $k \in N$ و $\varepsilon_i \in \{1, [-1]\}$ و $h_{i1}, h_{i2}, \dots, h_{ik} \in H$ وجود دارند به طوری که $m = [\dots, [(a^{h_{i1}})^{\varepsilon_1}, (a^{h_{i2}})^{\varepsilon_2}], \dots], ((a^{h_{ik}})^{\varepsilon_k})]$

$$f(m) = f([\dots, [(a^{h_{i1}})^{\varepsilon_1}, (a^{h_{i2}})^{\varepsilon_2}], \dots], ((a^{h_{ik}})^{\varepsilon_k})]) = [f[\dots, [(a^{h_{i1}})^{\varepsilon_1}, (a^{h_{i2}})^{\varepsilon_2}], \dots], f((a^{h_{ik}})^{\varepsilon_k})]] \\ = \dots = [\dots, [f(a^{h_{i1}})^{\varepsilon_1}, f(a^{h_{i2}})^{\varepsilon_2}], \dots], f((a^{h_{ik}})^{\varepsilon_k})] = (f(a^{h_j})^{\varepsilon_j})^{h_j}; h_j \in \{h_{i1}, h_{i2}, \dots, h_{ik}\}$$

و این برهان را کامل می‌کند.

لم ۳-۹. هر زیرفراگروه فراگروه دوری، دوری است.

اثبات. فرض کنید $M = \langle m \rangle$ و M' زیرفراگروه M باشد. اگر زیرفراگروه M' فقط شامل عنصر همانی باشد به وضوح دوری است. بنابراین فرض کنیم $M' \neq \{e\}$ و شامل عنصری مانند m' باشد. چون $m' \in M = \langle m \rangle$ لذا عناصر $m \in N$ و $h_i \in \{h_{i1}, h_{i2}, \dots, h_{in}\}$ چنان وجود دارند که $m' = ((m^{h_i})^{\varepsilon_i})^m$. عدد l را کوچک‌ترین عدد طبیعی در نظر بگیرید که $((m^{h_i})^{\varepsilon_i})^l \in M'$ ادعا می‌کنیم که $M' = \langle ((m^{h_i})^{\varepsilon_i})^l \rangle$. با توجه به زیرفراگروه بودن M' داریم $\langle ((m^{h_i})^{\varepsilon_i})^l \rangle \subseteq M'$. فرض کنید b عنصری دلخواه از M' باشد. چون $b \in M = \langle m \rangle$ لذا $k' \geq 0$ چنان وجود دارد که $b = ((m^{h_i})^{\varepsilon_i})^{k'}$. مینیمال بودن l نتیجه می‌دهد که $k' \geq l$. چون M' زیرفراگروه است و نسبت به اعمال یکانی و دوتایی فراگروه بسته است و هم چنین اگر یکی از عناصر M' در مرحله قبل تولید شده باشد باید $k' < l$ که تناقض است، بنابراین تمام عناصر متعلق به M' در مراحل بعد تولید می‌شوند و نتیجه می‌شود که $M' \subseteq \langle ((m^{h_i})^{\varepsilon_i})^l \rangle$.

با توجه به اینکه هر گروهی را می‌توان یک فراگروه در نظر گرفت و این مطلب که در گروه‌ها حاصل ضرب دو گروه دوری لزوماً دوری نمی‌باشد، لذا برای فراگروه‌ها نیز برقرار نبوده و در نتیجه وارسته نمی‌باشد.

برای تعریف نرمال‌ساز یک عنصر، ابتدا مجموعه S را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$S = \{a \in M \mid a^h = a, \forall h \in H\}$$

که زیرمجموعه‌ای از فراگروه است و به سادگی زیرفراگروه بودن آن اثبات می‌شود.

لم ۳-۱۰. فرض کنید M فراگروه حاصل از زیرگروه H از گروه G باشد. زیرفراگروه

$$S = \{a \in M \mid a^h = a, \forall h \in H\}$$

باعمل دوتایی α تشکیل یک گروه می‌دهد.

اثبات: چون $e \in S$ ، لذا $S \neq \emptyset$. از طرفی برای هر $h \in H$ ، داریم: $ah = {}^a ha^h = {}^a ha$. لذا $aH \subseteq Ha$

و این نتیجه می‌دهد که $a^{-1}H \subseteq Ha^{-1}$ یعنی برای هر $h \in H$ ، $h' \in H$ چنان وجود دارد که $a^{-1}h = h'a^{-1}$.

لذا $a^{(-1)}a^{[-1]}h = h'a^{(-1)}a^{[-1]}$. بنابراین $a^{(-1)}(a^{[-1]}h(a^{[-1]})^h) = h'a^{(-1)}a^{[-1]}$ در نتیجه

$h_1(a^{[-1]})^h = h_2a^{[-1]}$ که $h_1 = a^{(-1)}(a^{[-1]}h)$ و $h_2 = h'a^{(-1)}$. اکنون طبق خاصیت تراگرد برای مجموعه

متمم داریم، $(a^{[-1]})^h = a^{[-1]}$ این نتیجه می‌دهد که برای هر $a \in S$ ، $a^{[-1]} \in S$ و عنصر در S وارون دارد.

برای هر $a, b \in S$ و $h \in H$ ، $[a, b]^h = [a^{(b, c)}, b^h] = [a, b]$ نتیجه می‌دهد که S نسبت به اعمال دوتایی

و یکانی α, β بسته است.

اکنون برای هر $a, b, c \in S$ داریم $[[a, b], c] = [a^{(b, c)}, [b, c]] = [a, [b, c]]$ ، لذا شرکت‌پذیر نیز هست.

تعریف ۳-۱۱. فرض کنید M فراگروه حاصل از زیرگروه H از گروه G باشد و $a \in M$ مجموعه

$$N(a) = \{x \in M \mid x^h = x, [x, a] = [a^l, x], \forall h \in H, \exists l \in H\}$$

نرمال‌ساز عنصر a نامیده می‌شود.

گزاره ۳-۱۲. فرض کنید فراگروه M حاصل از زیرگروه H از گروه G باشد و $a \in M$. در این صورت $N(a)$

زیرفراگروه M است.

اثبات. با محاسبه نتیجه به دست می‌آید.

تعریف ۳-۱۳. فرض کنید M فراگروه حاصل از زیرگروه H از گروه G باشد. عنصر $b \in M$ را مزدوج $a \in M$

نامیم هرگاه $c \in S$ و $h \in H$ چنان موجود باشند که $[a^h, c] = [c, b]$.

به سادگی دیده می‌شود که رابطه تزویج روی فراگروه M که آن را R می‌نامیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$aRb \Leftrightarrow \exists c \in S, h \in H; [a^h, c] = [c, b]$$

یک رابطه هم‌ارزی است. با توجه به تعریف بالا می‌توان برای هر $a \in M$ ، کلاس هم‌ارزی را به صورت زیر تعریف

کرد.

$$C(a) = \{b \in M \mid aRb\}$$

و لذا می‌توان نوشت $O(M) = \sum_a C_a$ که در آن مجموع بر حسب عناصر a به دست می‌آید که هر کدام از یک

رده مزدوج انتخاب شده باشد و C_a مرتبه $C(a)$ می‌باشد.

قضیه ۳-۱۴. عدد اصلی هر عنصر $a \in S$ برابر تعداد هم‌مجموعه‌های راست $N(a)$ در S است.

اثبات. فرض کنید K مجموعه هم مجموعه‌های راست $N(a)$ در S باشد. نگاشت f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$f : K \rightarrow [a]$$

$$[N(a), x] \rightarrow [x^{[-1]}, [a, x]]$$

فرض کنید $x, y \in S$. بنا به قضیه ۱،۴ داریم

$$[N(a), x] = [N(a), y]$$

$$\Leftrightarrow [x^{y^{(-1)}}, y^{[-1]}] \in N(a)$$

$$\Leftrightarrow [[x, y^{[-1]}], a] = [a, [x, y^{[-1]}]]$$

$$\Leftrightarrow [x^{[-1]}, [[x, y^{[-1]}], a]] = [x^{[-1]}, [a, [x, y^{[-1]}]]]$$

$$\Leftrightarrow [[x^{[-1]}, x], [y^{[-1]}, a]] = [[x^{[-1]}, [a, x]], y^{[-1]}]$$

$$\Leftrightarrow [[y^{[-1]}, a], y] = [[[x^{[-1]}, [a, x]], y^{[-1]}, y]$$

$$\Leftrightarrow [y^{[-1]}, [a, y]] = [x^{[-1]}, [a, x]]$$

$$\Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

نشان می‌دهد نگاشت f خوش تعریف و یک به یک است. هم چنین نگاشت f پوشا است، لذا دوسویی است و $|K| = |[a]|$.

در ادامه این بخش به بررسی قضایایی که وجود یک زیر فراگروه از مرتبه‌ای که مقسوم علیه مرتبه فراگروه باشد می‌پردازیم، که یکی از مشهورترین آن‌ها قضایای سیلو است. با بیان مثال‌های زیر نشان می‌دهیم که قضایای سیلو و کوشی برای فراگروه‌ها برقرار نمی‌باشند.

مثال ۳-۱۵. فرض کنید $M = \{e, (14), (24)\}$ فراگروه حاصل از زیرگروه

$$H = \{e, (12), (34), (12)(34), (13)(24), (14)(23), (1324), (1423)\}$$

از گروه $G = S_4$ باشد. در اینصورت فراگروه M عنصری از مرتبه ۳ ندارد درحالی که مرتبه فراگروه M برابر ۳ است.

مثال ۳-۱۶. فرض کنید $M = \{e, (12), (13), (14), (143), (142)\}$ فراگروه حاصل از زیرگروه

$$H = \{e, (13)(24), (1234), (1423)\}$$

زیرفراگروهی از مرتبه ۳ ندارد یعنی قضیه اول سیلو برای M برقرار نمی‌باشد.

در ادامه مقاله، به بررسی قضایای ژردان-هولدر و لم زاسن هاوس و شیرر می‌پردازیم. در ابتدا مفاهیم مقدماتی را بیان می‌کنیم.

تعریف ۳-۱۷. دنباله $M_0, M_1, \dots, M_n$ از زیرفراگروه‌های M را سری زیر نرمال نامیم هرگاه

$$M_n \triangleleft \dots \triangleleft M_1 \triangleleft M_0 \quad \text{هر فراگروه خارج قسمتی} \quad \frac{M_i}{M_{i+1}} \quad \text{را یک فاکتور سری نامیده و } n \text{ را طول سری نامیم.}$$

اگر هر M_i نرمال در M باشد آن گاه سری را نرمال نامیم.

تعریف ۳-۱۸. M را ساده نامیم هرگاه تنها زیرفراگروه نرمال آن $\{e\}$ باشد.

تعریف ۳-۱۹. سری زیرنرمال $M = M_0 > M_1 > \dots > M_i > \dots M_n = \{e\}$ از فراگروه M را سری حل-

پذیر نامیم هرگاه هر فاکتور $\frac{M_i}{M_{i+1}}$ آبدی باشد.

تعریف ۳-۲۰. فرا گروه M را حل پذیر نامیم هرگاه سری زیرنرمالی مانند

$M = M_0 > M_1 > \dots > M_i > \dots M_n = \{e\}$ داشته باشد به طوری که برای هر $0 \leq i \leq n-1$ ، M_{i+1} در

M_i نرمال باشد و هر $\frac{M_i}{M_{i+1}}$ آبدی باشد.

برای زیرمجموعه های N, K از فراگروه M نماد $[N, K]$ را برای مجموعه $\{[n, k] | n \in N, k \in K\}$ به کار می بریم.

قضیه ۳-۲۱. هر زیرفراگروه و هر فراگروه خارج قسمتی از یک فراگروه حل پذیر، حل پذیر است.

اثبات. اثبات قسمت اول مشابه گروه ها است و حذف می گردد.

فرض کنید N زیرفراگروه نرمال فراگروه حل پذیر M باشد. بنابراین M باید سری حل پذیری به صورت زیر داشته باشد: $M = M_0 > M_1 > \dots > M_i > \dots M_n = \{e\}$ چون N زیرفراگروه نرمال است، لذا $[M, N]$ زیرفراگروهی از M است و برای هر $0 \leq i \leq n$ ، $N \subseteq [M_i, N]$. اکنون سری زیر را در نظرگیریم:

$$\frac{M}{N} = \frac{[M, N]}{N} = \frac{[M_0, N]}{N} > \frac{[M_1, N]}{N} > \dots > \frac{[M_n, N]}{N} = N$$

به طوری که هر M_i نرمال در M_{i-1} باشد. داریم:

$$[[N, m_i], [[N, m_{i-1}], [N, m'_{i-1}]]] = [[N, m_i], [N, [m_{i-1}, m'_{i-1}]]] = [N, [m_i, [m_{i-1}, m'_{i-1}]]] = [N, [m_{i-1}, [m_i, m'_{i-1}]]] \\ = [[N, m_{i-1}], [N, [m_i, m'_{i-1}]]] = [[N, m_{i-1}], [[N, m_i], [N, m'_{i-1}]]]$$

بنابراین $\frac{[M_i, N]}{N}$ نرمال در $\frac{[M_{i-1}, N]}{N}$ است. با توجه به قضیه دوم و سوم یکریختی برای فراگروه ها:

$$\frac{\frac{[M_{i-1}, N]}{N}}{\frac{[M_i, N]}{N}} \sqsubseteq \frac{[M_{i-1}, N]}{[M_i, N]} = \frac{[M_{i-1}, [M_i, N]]}{[M_i, N]} \sqsubseteq \frac{M_{i-1}}{M_{i-1} \cap [M_i, N]} \sqsubseteq \frac{\frac{M_{i-1}}{M_i}}{\frac{M_{i-1} \cap [M_i, N]}{M_i}}$$

چون هر $\frac{M_{i-1}}{M_i}$ آبدی است و $\frac{M_{i-1} \cap [M_i, N]}{M_i}$ زیرفراگروه نرمالی از $\frac{M_{i-1}}{M_i}$ است، بنابراین

$$\frac{\frac{[M_{i-1}, N]}{N}}{\frac{[M_i, N]}{N}} \sqsubseteq \frac{M_{i-1}}{M_{i-1} \cap [M_i, N]} \sqsubseteq \frac{\frac{M_{i-1}}{M_i}}{\frac{M_{i-1} \cap [M_i, N]}{M_i}}$$

نیز آبدی است. لذا هر $\frac{[M_{i-1}, N]}{[M_i, N]}$ آبدی است و $\frac{M}{N}$ حل پذیر است.

قضیه ۳-۲۲. فرض کنید N زیرفراگروه نرمال از فراگروه M باشد. اگر N و $\frac{M}{N}$ حل پذیر باشند آنگاه M

نیز حل پذیر است.

اثبات. مشابه گروه ها اثبات می گردد.

قضیه ۳-۲۳. فرض کنید N, K زیرفراگروه‌های نرمال از فراگروه M باشد. آنگاه $[N, K]$ نیز زیرفراگروه حل‌پذیر فراگروه M است.

اثبات. طبق قضیه سوم یکریختی برای فراگروه‌ها داریم: $\frac{[K, N]}{N} \trianglelefteq \frac{K}{K \cap N}$ چون K حل‌پذیر است لذا فراگروه خارج قسمتی $\frac{K}{K \cap N}$ طبق ۳،۲۱ حل‌پذیر است و در نتیجه $\frac{[K, N]}{N}$ حل‌پذیر است. از طرف دیگر N و $\frac{[K, N]}{N}$ حل‌پذیر هستند، لذا $[K, N]$ طبق قضیه ۳،۲۲ حل‌پذیر است.

قبل از بررسی لم زاسن هاوس برای فراگروه‌ها ابتدا چند لم وقضیه مورد نیاز را اثبات می‌کنیم.

لم ۳-۲۴. فرض کنید M فراگروه حاصل از زیرگروه H از یک گروه G باشد. در این صورت

الف. برای هر $a, b, c \in M$ و هر زیر فراگروه K از M اگر $[a, b] = c$ و $c \in K$ آن‌گاه $b \in K$.

ب. برای هر $a, b, c \in M$ و هر زیر فراگروه K از M اگر $[a, b] = c$ و $b, c \in K$ آن‌گاه $a \in K$.

اثبات. الف) فرض کنید $[a, b] = c$ چنان باشند که $a, c \in K$. بنابراین

$$b = k \in K \text{ که این نشان می‌دهد که } [[a^{[-1]}, a], b] = k, \text{ لذا } [(a^{[-1]})^{(a,b)^{-1}}, [a, b]] = \underbrace{[(a^{[-1]})^{(a,b)^{-1}}, c]}_{\in K} = k \in K$$

ب. فرض کنید $[a, b] = c$ چنان باشد که $b, c \in K$. بنابراین $[a, b]^{b^{(-1)}} = c^{b^{(-1)}}$

$$\Rightarrow [a^{b^{(-1)}}, b^{b^{(-1)}}] = c^{b^{(-1)}} \Rightarrow [[a^{b^{(-1)}}, b^{b^{(-1)}}], b^{[-1]}] = [c^{b^{(-1)}}, b^{[-1]}]$$

$$\Rightarrow [a^{(b^{(-1)})(b^{b^{(-1)}})^{b^{[-1]}}}, b^{b^{(-1)}}] = [c^{b^{(-1)}}, b^{[-1]}]$$

$$\Rightarrow a^{(b^{(-1)})(b^{b^{(-1)}})^{b^{[-1]}}} = [c^{b^{(-1)}}, b^{[-1]}]$$

اکنون از $[c^{b^{(-1)}}, b^{[-1]}] \in K$ و $[b^{b^{(-1)}}, b^{[-1]}] = e$ و $(b^{b^{(-1)}})^{b^{[-1]}} = e$ ، $a^e = a$ نتیجه می‌گردد که $a \in K$.

قضیه ۳-۲۵. فرض کنید N, K زیرفراگروه‌های نرمال فراگروه M باشند به طوری که $N \triangleleft M$. در این صورت $N \cap K \triangleleft K$.

اثبات. فرض کنید $a, b \in K$ و $x \in [a, [N \cap K], b]$ ، لذا $c \in N \cap K$ چنان موجود است که

$x = [[a, c], b]$ چون $N \triangleleft M$ عنصر $c_1 \in N$ چنان موجود است که $x = [a, c_1, b] = [c_1, [a, b]]$ از

طرفی K زیرفراگروه است، لذا $m \in K$ چنان موجود است که $x = [m, [a, b]]$. اکنون از

$[m, [a, b]] = [c_1, [a, b]]$ و قانون حذف از راست برای عمل دوتایی، $m = c_1$ ، لذا $c_1 \in N \cap K$. در نتیجه

$$[a, [N \cap K, b]] \subseteq [N \cap K, [a, b]]$$

اکنون فرض کنید $a, b \in K$ و $x \in [a, [N \cap K], b]$ ، لذا $c \in N \cap K$ وجود دارد به طوری که

$$x = [c, [a, b]]$$

طبق قسمت اول لم بالا و $x, a, b \in K$ داریم $c_1 \in K$ لذا $c_1 \in N \cap K$. بنابراین

$$[a, [N \cap K, b]] \subseteq [a, b] \text{ و حکم اثبات می‌شود.}$$

لم ۳-۲۶. فرض کنید N, K زیرفراگروه‌های نرمال فراگروه M باشند در این صورت

$$[N \cup K, N \cup K] = [N, K] \cup [K, N]$$

اثبات. فرض کنید $x \in [N \cup K, N \cup K]$ در این صورت $x \in [K, N]$ یا $[N, K]$ یا $[K, K] = K$ یا $[N, N] = N$. با در نظر گرفتن $N, K \subseteq [N, K], [K, N]$ داریم: $x \in [N, K] \cup [K, N]$ بنابراین $[N \cup K, N \cup K] \subseteq [N, K] \cup [K, N]$ از طرفی واضح است که $[N \cup K, N \cup K] = [N, K] \cup [K, N]$ لذا $[N, K], [K, N] \subseteq [N \cup K, N \cup K]$. برای زیرفراگروه‌های N, K از فراگروه M نماد $N \bigcup^n K$ را برای $[N \cup K, N \cup K]^n$ به کار می‌بریم.

لم ۳-۲۷. فرض کنید K, N زیرفراگروه‌های نرمال فراگروه M باشند در این صورت $N \bigcup^n K$ یک زیرفراگروه است.

اثبات: $N \bigcup^n K = [N \cup K, N \cup K]^n$. بنابراین طبق لم ۳-۲۶

$$\begin{aligned} & [N \cup K, N \cup K]^n \\ &= [\dots[[[N \cup K, N \cup K], N \cup K], \dots], N \cup K] \\ &= \dots[[[[N, K] \cup [K, N]], N \cup K], \dots], N \cup K \\ &= \dots[N, K] \cup [K, N] \cup [[N, K], N] \cup [[K, N], K] \end{aligned}$$

بنابراین $N \bigcup^n K = [N, K] \cup [K, N] \cup [[N, K], N] \cup [[K, N], K]$

به وضوح $e \in [N \cup K, N \cup K]$ اکنون فرض کنید $x, y \in [N \cup K, N \cup K]^n$ لذا $n_1, n_2 \in N$ چنان وجود دارند که $x = [N \cup K, N \cup K]^{n_1}$ و $y = [N \cup K, N \cup K]^{n_2}$. هم چنین برای $i = 1, 2$ ، مقادیر $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i \in N \cup K$ چنان موجودند که $x = [\dots[\alpha_1, \beta_1], \gamma_1], \dots$ و $y = [\dots[\alpha_2, \beta_2], \gamma_2], \dots$. با در نظر گرفتن این حقیقت که $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ متعلق به $N \cup K$ هستند نتیجه می‌گردد که آن‌ها در N یا K هستند و برای هر $h \in H$ $\alpha_i^h, \beta_i^h, \gamma_i^h$ در N یا K قرار دارند و بنابراین در $N \bigcup^n K$ قرار دارند یعنی $[x, y] \in N \bigcup^n K$. هم چنین با در نظر گرفتن این حقیقت که $N \bigcup^n K$ نسبت به عمل یکانی β بسته است، لذا $N \bigcup^n K$ زیرفراگروه‌ای از M است.

لم ۳-۲۸. اگر K, N دو زیرفراگروه نرمال فراگروه M باشند آنگاه برای هر $n \in N$ داریم:

$$N \bigcup^n K = [N, K]$$

اثبات: چون $[N \cup K, N \cup K] = [N, N] \cup [N, K] \cup [K, N] \cup [K, K]$ و چون N, K زیرفراگروه‌های نرمال فراگروه M هستند، لذا $[N, K] = [K, N]$. بنابراین $N \bigcup^n K = [N, K]$.

لم ۳-۲۹. اگر K, N دو زیرفراگروه نرمال از فراگروه M باشند آنگاه $N \vee K = N \bigcup^n K$

اثبات: اگر $K = \{e\}$ آنگاه به وضوح، $[N \cup K, N \cup K] = N$ لذا $N \subseteq [N \cup K, N \cup K]^n$ به طور مشابه با فرض $N = \{e\}$ داریم $K \subseteq [N \cup K, N \cup K]^n$ بنابراین $[N \cup K, N \cup K]^n$ یک کران بالا برای K, N است. اگر فراگروه C کران بالایی برای زیرفراگروه‌های N, K باشد یعنی $[K, N] \subseteq C$ و $[N, K] \subseteq C$ بنابراین $[N, K] \subseteq C$ و $[[K, N], K] \subseteq C$ در نتیجه

$$N \bigcup^n K \subseteq C \quad \text{ولذا طبق ۲۷.۳} \quad [N, K] \cup [K, N] \cup [[N, K], N] \cup [[K, N], K] \subseteq C$$

لم ۳-۳۰. اگر N, K دو زیرفراگروه از فراگروه M باشند به طوری که $N \triangleleft M$ باشد آنگاه $N \vee K = [N, K]$

اثبات: چون $N \triangleleft M$ لذا برای هر $x \in M$ داریم: $[x, N] = [N, x]$ بنابراین $[N, K] = [K, N]$ و $N \vee K = [N, K]$ لذا طبق لم قبل $[N \cup K, N \cup K]^n = [N, K]^n = [N, K]$ اکنون طبق لم ۲۰۵ در [۲] و قضیه بالا داریم:

لم ۳-۳۱. اگر N, K دو زیرفراگروه نرمال فراگروه M باشند در این صورت $N \vee K \triangleleft M$

لم زیر به عنوان لم زاسن هاوس است که برای فراگروه‌ها اثبات می‌کنیم و در قضایای بعد کاربرد دارد.

لم ۳-۳۲. فرض کنید N^*, K^*, N, K زیرفراگروه‌های فراگروه M باشند به طوری که K^* نرمال در K و N^* نرمال در N است. در این صورت

$$1. [N^*, N \cap K^*] \triangleleft [N^*, N \cap K]$$

$$2. [K^*, N^* \cap K] \triangleleft [K^*, N \cap K]$$

$$3. \frac{[N^*, N \cap K]}{[N^*, N \cap K^*]} \sqsubseteq \frac{[K^*, N \cap K]}{[K^*, N^* \cap K]}$$

اثبات: چون K^* نرمال در K است، بنابراین $N \cap K^* = (N \cap K) \cap K^*$ و بنا به قضیه ۳.۲۵ زیرفراگروه نرمال $N \cap K$ است. به طور مشابه، $N^* \cap K \triangleleft N \cap K$ بنابراین طبق لم ۳، ۳۰ و گزاره ۳، ۳۱، $D = [N^* \cap K, K^* \cap N]$ زیرفراگروه نرمال از $N \cap K$ است. نگاشت f را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f: [N^*, N \cap K] \rightarrow \frac{N \cap K}{D}$$

$$f([a, c]) = [D, c]$$

نگاشت f خوش تعریف است زیرا اگر $[a, c] = [b, d]$ آنگاه چون $c, d \in N \cap K$ و با توجه به این که $N \cap K$

یک زیرفراگروه است لذا $[c^{d^{(-1)}}, d^{[-1]}] \in N \cap K$ از طرفی از تساوی نتیجه می‌شود که

$$[a, c]^{d^{(-1)}} = [b, d]^{d^{(-1)}}$$

$$[[a, c]^{d^{(-1)}}, d^{[-1]}] = [[b, d]^{d^{(-1)}}, d^{[-1]}]$$

$$[[a^{c^{d^{(-1)}}}, c^{d^{(-1)}}], d^{[-1]}] = [[b^{d^{d^{(-1)}}}, d^{d^{(-1)}}], d^{[-1]}]$$

$$\Rightarrow [a^{h_1}, [c^{d^{(-1)}}, d^{[-1]}]] = [b^{h_2}, [d^{d^{(-1)}}, d^{[-1]}]]$$

که در آن $h_1 = a^{(c^{d^{(-1)}})(c^{d^{(-1)}}, d^{[-1]})}$ و $h_2 = b^{(d^{d^{(-1)}})(d^{d^{(-1)}}, d^{[-1]})}$. حال چون $[d^{d^{(-1)}}, d^{[-1]}] = e$ و $[c^{d^{(-1)}}, d^{[-1]}] \in N^* \cap (N \cap K) = N^* \cap K \subseteq D$ لذا $a^{h_1}, b^{h_2} \in N^*$ در نتیجه $[c^{d^{(-1)}}, d^{[-1]}] \in N^*$ بنا بر لم ۲، ۱ در [۲]

$$[c^{d^{(-1)}}, d^{[-1]}] \in D \Rightarrow [D, c] = [D, d]$$

نگاشت f همریختی فراگروهی است زیرا:

$$\begin{aligned} f [[a, c], [b, d]] &= f [a^{(c, [b, d])}, [c, [b, d]]] \\ &= f [a_1, [b_1, [c, d]]] \\ &= f [[a_1^{(b_1, [c, d])}, b_1], [c, d]] \\ &= [D, [c, d]] = [[D, c], [D, d]] \\ &= [f[a, c], f[b, d]]. \end{aligned}$$

هم چنین برای هر $h \in H$ و $m = [a, c] \in [N^*, N \cap K]$

$f(m^h) = f[a, c]^h = f[a^h, c^h] = [D, c^h] = [D, c]^h = [D, c]^{id(h)} = (f(m))^{id(h)}$ که $id: H \rightarrow H$ این نتیجه می دهد که f همریختی فراگروهی است. نگاشت f به وضوح پوشا می باشد. اگر $[a, c] \in \text{Ker}(f)$ آنگاه $f([a, c]) = [D, c] = D$. اکنون طبق لم ۵، ۲ در [۲] چون D نرمال در $N \cap K$ است، نتیجه می گردد که $c \in D$ یعنی $c = [a_1, c_1]$ که $a_1 \in N^* \cap K$ و $c_1 \in N \cap K^*$ بنا بر این

$$[a, c] = [a, [a_1, c_1]] = [[a^{(a_1, c_1)^{-1}}, a_1], c_1] \in [N^*, N \cap K^*]$$

در نتیجه $\text{Ker}(f) = [N^*, N \cap K^*]$. لذا $[N^*, N \cap K] \triangleleft [N^*, N \cap K^*]$. با بحثی مشابه می توان نشان داد که $[K^*, N^* \cap K]$ نرمال در $[K^*, N \cap K]$ می باشد. اکنون بنا به قضیه اول همریختی برای فراگروه ها:

$$\frac{[N^*, N \cap K]}{[N^*, N \cap K^*]} \square \frac{N \cap K}{D} = \frac{N \cap K}{[N^* \cap K, K \cap N^*]}$$

حال بعد از بیان لم زاسن هاوس به راحتی قضایای شیر و ژردان-هولدر برای فراگروه ها مشابه آنچه در گروه ها داشتیم اثبات می شود.

قضیه ۳-۳۳. فرض کنید M یک فراگروه باشد. در این صورت هر دو سری زیر نرمال M تظریف های زیرنرمال دارند که بایکدیگر هم ارز هستند.

این بخش را با بیان قضیه زیر که به قضیه ژردان-هولدر معروف است، به پایان می بریم.

قضیه ۳-۳۴. هر دو سری ترکیب از فراگروه M با یکدیگر هم ارز هستند.

فهرست منابع

- [1] Dalalyan, S.H. (2008). On hypergroups, prenormal subgroups and the simplest groups. Conf. dedicated to 90th-anniversary of M.M. Jrbashyan, Yerevan, 12-14. (Russian)
- [2] Moghaddasi, Gh. Tolue, B. and Zolfaghari, P. (2016). On the Structure of the Ultra-groups Over a Finite Group, U.P.B. Sei. Bull., Series A. Vol.78, no. 2, 173- 184
- [3] Tolue, B., Moghaddasi, Gh. and Zolfaghari, P. (2017). On the category of Ultra- group, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, Vol.46(3), 2, 437-447
- [4] Elis, S.Y, Ummahan, E.A. and Sahika, K. (2022). The theory of Ultra- groups and Gap application, Ikonian journal of mathematics, 4(2), 1-11
- [5] Hungerford, T. W. (2003). Algebra, Springer, New York
- [6] William, C., Sara, j. (2020). On the Number of Cyclic Subgroups of a Group, Communications in lgebra, Vol.48. 3834-3837
- [7] Moghaddasi, Gh. Zolfaghari, P. (2016). The Quotient Ultragroup, Italian Journal Of Pure And Applied Mathematics.no. 36, 211-218
- [8] Adamek, J. H., Herrlich, and Strecker, G. (1990). Abstract and Concrete Categories, John Willy and sons, New York
- [9] مقدسی، غ. ، ذوالفقاری، پ. و طلوع حقیقی، ب. تابستان (۱۳۹۶). گروه‌ها و فراگروه‌ها. مجله پژوهش‌های نوین در ریاضی، شماره دهم
- [10] Burris, S. and Sankappanavar, H. P. (1981). A course in Universal Algebra, Springer-Verlag Graduate Texts in Mathematics