

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال یازدهم، شماره پنجاه و سوم، فروردین و اردیبهشت ۱۴۰۴

شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

چندگانگی جواب‌های ضعیف برای مسأله مرزی دیریکله از نوع کیرشهف در فضاهاى اریس - سوبولوف

مهناز خسروی رشتی^۱، محسن علیمحمدی^{۲*}، سیروس قبادی^۳

^(۳۱) گروه ریاضی، واحد قائم شهر، دانشگاه آزاد اسلامی، قائم شهر، ایران

^(۲) گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۲/۰۶/۱۲ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۲/۰۸/۱۴

چکیده

در این مقاله، به بررسی وجود حداقل یک و دو جواب ضعیف برای مسأله مقدار مرزی غیرخطی دیریکله از نوع کیرشهف می‌پردازیم. روش ما بر مبنای قضایای نقطه بحرانی بونانو و روش‌های تغییراتی می‌باشد. در پایان با ارائه یکسری مثال کاربرد قضایا را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در واقع نتایج به دست آمده از مثال‌ها نشان می‌دهد که روش‌های تغییراتی بکار رفته مفید بوده است.

واژه‌های کلیدی: جواب‌های ضعیف چندگانه، مسائل بیضوی از نوع کیرشهف، شرط پالایز-اسمال، فضای اریس-سوبولف، نظریه نقاط بحرانی

۱- مقدمه

نقش قابل توجه فضاهای سوبولف و فضاهای اریس- سوبولف در بسیاری از شاخ‌های ریاضی به خوبی شناخته شده است. مطالعه معادلات بیضوی غیرخطی شامل عملگرهای همگن شبه‌خطی در فضاهای سوبولف $W^{m,p}(\Omega)$ صورت می‌گیرد اما برای عملگرهای غیرهمگن بهتر است از فضاهای اریس- سوبولف $W^m L_\Phi(\Omega)$ استفاده شود. در حقیقت فضای $L_\Phi(\Omega)$ یک نوع فضای تعمیم‌یافته از فضای $L^p(\Omega)$ است که در سال ۱۹۳۲ معرفی شد. کرانوسلسکی و همکارش [۱۸] و لوکزامبورگ [۱۱] در رساله دکترای خود به فضای L_Φ در فضای اریس- سوبولف را جایگزین فضای L^p در فضای سوبولف کردند. برای جزئیات بیشتر فضای اریس- سوبولف به [۲، ۹، ۱۳] مراجعه کنید. نتایج بسیاری در مورد مسأله مربوط به عملگر p -لاپلاسین در فضای اریس- سوبولف به دست آمده است. از جمله مسأله با شرط مرزی دیریکله [۱۲، ۱۰، ۹] و نیومن [۱۴، ۸، ۶] و نویر [۱۵] و استکلوف [۲]، همچنین در [۷] نویسندگان وجود سه جواب ضعیف برای مسأله غیرهمگن نیومن زیر را مورد مطالعه قرار دادند.

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\alpha(|\nabla u|)\nabla u) + \alpha(|u|u) = \lambda_0 f_0(x, u) & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

در [۲] افروزی- حیدرخانی و شکوه برای مسأله استکلوف با استفاده از روش تغییراتی و نظریه نقطه بحرانی وجود بی‌نهایت جواب را اثبات کردند.

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(a(x, |\nabla u(x)|)\nabla u(x)) = a(x, |u(x)|)u(x) & \text{in } \Omega, \\ a(x, |\nabla u(x)|)\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = \lambda_0 f_0(x, u(x)) + \mu_0 g_0(x, u(x)) & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

در این مقاله به بررسی وجود حداقل یک و دو جواب ضعیف با شرط مرزی دیریکله و شامل از نوع کیرشلف

$$\begin{cases} M_0 \left(\int_{\Omega} [\Phi(|\nabla w|) + \Phi(|w|)] dx \right) (-\operatorname{div}(\alpha(|\nabla w|)\nabla w) + \alpha(|w|)w) = \lambda_0 f_0(x, w) & \text{in } \Omega, \\ w = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

که در آن $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ ($N \geq 3$) مجموعه‌ای ناتهی، باز و کراندار با مرز هموار $\partial\Omega$ و $M_0 : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته است به طوری که در شرط زیر صدق می‌کند.

به این معنا که، اعداد ثابت مثبت m_0, m_1 با این خاصیت وجود دارند به طوری که برای هر $z \geq 0$ ، داریم:

$$0 < m_0 \leq M_0(z) \leq m_1 \quad (2.1)$$

$\alpha : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع به طوری که نگاشت $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با ضابطه

$$\varphi(z) = \begin{cases} \alpha(|z|)z, & \text{for } z \neq 0, \\ 0, & \text{for } z = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

فرد و هومئومورفیسم اکیدا صعودی از $\mathbb{R}$ به روی $\mathbb{R}$ و $f_0 : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ تابع L^1 -کاراتئودوری، λ_0 نیز یک پارامتر حقیقی مثبت است.

در واقع، روش ما برای اثبات این است که تابع انرژی در شرط پالایز- اسمال صدق می‌کند [۳]، [۲] و بکارگیری قضایا (قضیه‌های ۱ و ۲ را ببینید) می‌باشد. در بخش ۲ یکسری تعاریف اساسی، لم‌ها، همچنین قضیه‌های مینیمم موضعی و قضیه نقطه بحرانی را بیان می‌کنیم در بخش ۳ به کمک قضیه ۱ و لم‌ها و تذکرها وجود حداقل یک جواب ضعیف را برای مسأله (۱، ۱) بررسی می‌کنیم، در بخش ۴ وجود حداقل دو جواب ضعیف را برای مسأله (۱، ۱) بیان می‌کنیم.

با توجه به گستردگی این شاخه از آنالیز غیرخطی و شناخت فرآیندها و پدیده‌های فیزیکی جدید، در حال حاضر ریاضی‌دانان زیادی مشغول مطالعه و کسب نتایج جدیدتر در این زمینه هستند. لذا با توجه به رشد سریع و روزافزون این شاخه از ریاضیات، هنوز تعمیم‌های جدید و فراگیری را می‌توان روی فضاهای مختلف و با مساله‌های گوناگون ارائه کرد که گستره وسیع از کاربردها را شامل گردند.

۲- قضایا و نتایج مقدماتی در فضای اریس - سوبولف

با توجه به تابع φ در (۳.۱) و تعریف تابع Φ به صورت زیر:

$$\Phi(z) := \int_0^z \varphi(s) ds$$

برای هر $z \in \mathbb{R}$ قرار می‌دهیم:

$$\Phi^*(z) := \int_0^z \varphi^{-1}(s) ds$$

برای هر $z \in \mathbb{R}$ بنابراین Φ تابع یانگ است به این معنا که $\Phi(0) = 0$ ، Φ محدب و $\lim_{z \rightarrow \infty} \Phi(z) = +\infty$

علاوه براین از آنجائیکه $\Phi(x) = 0$ ، اگر و تنها اگر $x = 0$ پس

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\Phi(z)}{z} = 0, \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{\Phi(z)}{z} = +\infty.$$

بنابراین Φ را یک N -تابع می‌نامیم و تابع Φ^* را مکمل تابع Φ گوئیم که به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\Phi^*(z) = \sup \{sz - \Phi(s); s \geq 0\}$$

برای هر $z \geq 0$ ، از این رو Φ^* یک N -تابع و همچنین در نامساوی یانگ

$$sz \leq \Phi(s) + \Phi^*(z), \quad (۱.۲)$$

برای هر $s, z \geq 0$ صدق می‌کند. حال فرض کنید که Φ در شرایط ساختاری زیر صدق کند.

$$(\Phi_0) \quad 1 < \liminf_{z \rightarrow \infty} \frac{z\varphi(z)}{\Phi(z)} \leq p^0 := \sup_{z > 0} \frac{z\varphi(z)}{\Phi(z)} < \infty;$$

$$(\Phi_1) \quad N < p_0 := \inf_{z > 0} \frac{z\varphi(z)}{\Phi(z)} < \liminf_{z \rightarrow \infty} \frac{\log(\Phi(z))}{\log(z)}.$$

فرض کنید $L_\Phi(\Omega)$ فضای اریس به وسیله N -تابع Φ باشد (مراجعه کنید به [۱])

$w: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ فضای توابع اندازه است به طوری که نرم روی آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\|w\|_{L_\Phi} := \sup \left\{ \int_\Omega w(x)v(x)dx ; \int_\Omega \Phi^*(|v(x)|)dx \leq 1 \right\} < \infty$$

که در نتیجه $(L_\Phi(\Omega), \|\cdot\|_\Phi)$ یک فضای باناخ است و با نرم لوگزامبورگ زیر معادل است.

$$\|w\|_\Phi := \inf \left\{ k > 0 : \int_\Omega \Phi\left(\frac{w(x)}{k}\right)dx \leq 1 \right\},$$

برای فضاهای اریس-سوبولف نامساوی هولدر به صورت زیر است

$$\int_\Omega w v dx \leq 2 \|w\|_{L_\Phi} \|v\|_{L_{\Phi^*}},$$

برای هر $w \in L_\Phi(\Omega)$ ، $v \in L_{\Phi^*}(\Omega)$ ، فضای اریس-سوبولف را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$W^1 L_\Phi(\Omega) := \left\{ w \in L_\Phi(\Omega) : \frac{\partial w}{\partial x_i} \in L_\Phi(\Omega), \quad i = 1, \dots, N \right\}$$

این یک فضای باناخ است. با نرم زیر:

$$\|w\|_{1,\Phi} := \|\nabla w\|_\Phi + \|w\|_\Phi$$

[۱۲] را ببینید) در واقع برای بررسی فضاهای کلی‌تر، $L^p(\Omega)$ و $W^{1,p}(\Omega)$ ، توسط نگاشت محدب $z \mapsto \frac{|z|^p}{p}$ از فضاهای ارلیس-سوبولف استفاده می‌کنیم.

حال برخی از خواص فضای ارلیس-سوبولف را بررسی می‌کنیم.

لم ۱: [۱۹]، لم ۲.۲

روی فضای $W^1 L_\Phi(\Omega)$ سه نرم زیر معادلند:

$$\begin{aligned} \|w\|_{1,\Phi} &:= \|\nabla w\|_\Phi + \|w\|_\Phi, \\ \|w\|_{2,\Phi} &:= \max\{\|\nabla w\|_\Phi, \|w\|_\Phi\}, \\ \|w\| &:= \inf \left\{ \mu > 0; \int_\Omega \left[\Phi\left(\frac{|w(x)|}{\mu}\right) + \Phi\left(\frac{|\nabla w(x)|}{\mu}\right) \right] dx \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$

به طور کلی برای هر $w \in W^1 L_\Phi(\Omega)$ داریم:

$$\|w\| \leq 2 \|w\|_{2,\Phi} \leq 2 \|w\|_{1,\Phi} \leq 4 \|w\|.$$

فضای ارلیس-سوبولف تعمیم یافته‌ی $W^1 L_\Phi(\Omega)$ با یکی از نرم‌های بالا فضای باناخ انعکاسی است.

لم ۲: [۱۶]، لم ۳.۲

فرض کنید که $w \in W^1 L_\Phi(\Omega)$ باشد. آنگاه داریم

$$\begin{aligned} \int_\Omega [\Phi(|w(x)|) + \Phi(|\nabla w(x)|)] dx &\geq \|w\|^{p^0}, \quad \text{if } \|w\| < 1, \\ \int_\Omega [\Phi(|w(x)|) + \Phi(|\nabla w(x)|)] dx &\geq \|w\|^{p_0}, \quad \text{if } \|w\| > 1, \\ \int_\Omega [\Phi(|w(x)|) + \Phi(|\nabla w(x)|)] dx &\leq \|w\|^{p_0}, \quad \text{if } \|w\| < 1, \\ \int_\Omega [\Phi(|w(x)|) + \Phi(|\nabla w(x)|)] dx &\leq \|w\|^{p^0}, \quad \text{if } \|w\| > 1. \end{aligned}$$

لم ۳: [۷]، لم ۲.۲

فرض کنید که $w \in W^1 L_\Phi(\Omega)$ باشد به طوری که

$$\int_\Omega [\Phi(|w(x)|) + \Phi(|\nabla w(x)|)] dx \leq r$$

برای برخی $0 < r < 1$ در این صورت $\|w\| < 1$.

لم ۴: [۱۶]، لم ۵.۲

فرض کنید که $w \in W^1 L_\Phi(\Omega)$ باشد و $\|w\| = 1$ آنگاه

$$\int_\Omega [\Phi(|w(x)|) + \Phi(|\nabla w(x)|)] dx = 1$$

از فرض‌های (Φ_1) و [۱۱، ۲. D] می‌دانیم که $W^1 L_\Phi(\Omega)$ به طور پیوسته در $W^{1,p_0}(\Omega)$ نشانده می‌شود و اگر فرض کنیم $p_0 > N$ آنگاه $W^{1,p_0}(\Omega)$ به طور فشرده در $C^0(\bar{\Omega})$ نشانده می‌شود. از این رو $W^1 L_\Phi(\Omega)$ به طور فشرده در $C^0(\bar{\Omega})$ نشانده می‌شود لذا ثابت $c > 0$ وجود دارد به طوری که

$$\|w\|_\infty \leq c \|w\|_{1,\Phi} \leq 2c \|w\|, \quad (۲.۲)$$

برای هر $w \in W^1 L_\Phi(\Omega)$ که

$$\|w\|_\infty := \max_{x \in \bar{\Omega}} |w(x)|$$

به عبارت دیگر، از آنجائیکه $W^{1,p_0}(\Omega)$ به طور پیوسته در $L^{p_0}(\Omega)$ نشانده می‌شود، پس وجود دارد $c_{p_0} > 0$ به طوری که

$$\|w\|_{L^{p_0}} \leq c_{p_0} \|w\|, \quad \forall w \in W^1 L_\Phi(\Omega). \quad (۳.۲)$$

قبل از معرفی دو قضیه ابزاری زیر مطالب زیر را بیان می‌کنیم.

تعریف ۱:

فرض کنید X یک فضای باناخ حقیقی و $\mathcal{N}$ و $\mathcal{F}_0$ دو تابع به طور پیوسته مشتق پذیر گاتور روی X و $r_1, r_2 \in [-\infty, +\infty]$ ثابت‌های دلخواه با شرط $r_1 < r_2$ باشند. گوییم تابع $J := \mathcal{N} - \mathcal{F}_0$ در شرط برش پایینی r_1 و برش بالایی r_2 پالایز-اسمال $^{[r_1]}(PS)^{[r_2]}$ صدق می‌کند، اگر هر دنباله $\{w_n\}$ به طوری که:

(α) دنباله $\{J(w_n)\}$ کراندار است؛

$$; \lim_{n \rightarrow \infty} \|J'(w_n)\|_{X^*} = 0 \quad (\beta)$$

$$; n \in \mathbb{N} \text{ برای هر } r_1 < \mathcal{N}(w_n) < r_2 \quad (\gamma)$$

دارای زیر دنباله‌ای همگرا باشد.

برای حالت $r_1 = -\infty$ یعنی $\mathcal{N}(w_n) < r_2$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ ، این نوع از شرط پالایز-اسمال به صورت $^{[r_2]}(PS)$ نشان می‌دهیم همچنین برای حالت $r_2 = +\infty$ این همان شرط پالایز-اسمال کلاسیک است.

توابع زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\vartheta(r_1, r_2) := \inf_{v \in \mathcal{N}^{-1}([r_1, r_2])} \frac{\sup_{w \in \mathcal{N}^{-1}([r_1, r_2])} \mathcal{F}_0(w) - \mathcal{F}_0(v)}{r_2 - \mathcal{N}(v)}, \quad (۴.۲)$$

$$\rho(r_1, r_2) := \sup_{v \in \mathcal{N}^{-1}([r_1, r_2])} \frac{\mathcal{F}_0(v) - \sup_{w \in \mathcal{N}^{-1}([-\infty, r_1])} \mathcal{F}_0(w)}{\mathcal{N}(v) - r_1}, \quad (۵.۲)$$

$$\varphi_1(r) := \inf_{w \in \mathcal{N}^{-1}([-\infty, r[)} \frac{\mathcal{F}_0(w) - \inf_{\mathcal{N}^{-1}([-\infty, r_1])} \mathcal{F}_0}{r - \mathcal{N}(w)},$$

$$\varphi_2^*(r_1, r_2) := \inf_{w \in \mathcal{N}^{-1}([-\infty, r_1[)} \sup_{v \in \mathcal{N}^{-1}([r_1, r_2])} \frac{\mathcal{F}_0(w) - \mathcal{F}_0(v)}{\mathcal{N}(v) - \mathcal{N}(w)},$$

که در آن $\overline{\mathcal{N}^{-1}([-\infty, r[)}^w$ بستار $\mathcal{N}^{-1}([-\infty, r[)$ در توپولوژی ضعیف برای هر $r, r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ با رابطه $r_1 < r_2$ می‌باشد.

اکنون برای رسیدن به نتایج اصلی قضیه ۳ و لم ۵ و قضیه ۶ باید دو قضیه ابزاری در این فصل را بیان کنیم.

قضیه ۱: $[3], [1, 5]$ ، قضیه ۱، ۵

فرض کنیم X یک فضای باناخ حقیقی باشد، و $\mathcal{N}, \mathcal{F}_0 : X \rightarrow \mathbb{R}$ دو تابع به طور پیوسته مشتق‌پذیر گاتو، فرض کنیم $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ با شرط $r_1 < r_2$ وجود داشته باشند به طوری که :

$$\vartheta(r_1, r_2) < \rho(r_1, r_2)$$

با توجه به $\vartheta(r_1, r_2)$ و $\rho(r_1, r_2)$ تعریف شده در (۴، ۲) و (۵، ۲) برای هر $\lambda_0 \in]\frac{1}{\rho(r_1, r_2)}, \frac{1}{\vartheta(r_1, r_2)}[$

تابع $J_{\lambda_0} := \mathcal{N} - \lambda_0 \mathcal{F}_0$ که در شرط برش بالایی $^{[r_1]}(PS)^{[r_2]}$ صدق می‌کند در این صورت برای هر

$$w_{0, \lambda_0} \in \mathcal{N}^{-1}([r_1, r_2[) \text{ یک } \lambda_0 \in]\frac{1}{\rho(r_1, r_2)}, \frac{1}{\vartheta(r_1, r_2)}[$$

وجود دارد به طوری که برای هر $w \in \mathcal{N}^{-1}([r_1, r_2[)$ داریم:

$$J_{\lambda_0}(w_{0, \lambda_0}) \leq J_{\lambda_0}(w)$$

و همچنین $J'_{\lambda_0}(w_{0, \lambda_0}) = 0$

قضیه ۲: $[4], [1, 1]$ ، قضیه ۲، ۱

فرض کنیم X یک فضای باناخ حقیقی انعکاسی باشد. $\mathcal{N}, \mathcal{F}_0 : X \rightarrow \mathbb{R}$ دو تابع مشتق‌پذیر گاتو، نیم‌پیوسته پایینی ضعیف دنباله‌ای باشند. فرض کنید $\mathcal{N}$ پیوسته (قوی) است و در رابطه $\lim_{\|w\| \rightarrow +\infty} \mathcal{N}(w) = +\infty$ صدق کند. همچنین فرض کنید دو ثابت r_1 و r_2 وجود دارند به طوری که:

- (i) $\inf_X \mathcal{N} < r_1 < r_2$;
- (ii) $\varphi_1(r_1) < \varphi_2^*(r_1, r_2)$;
- (iii) $\varphi_1(r_2) < \varphi_2^*(r_1, r_2)$.

در این صورت برای هر $\lambda_0 \in (\frac{1}{\varphi_2^*(r_1, r_2)}, \min\{\frac{1}{\varphi_1(r_1)}, \frac{1}{\varphi_1(r_2)}\})$ حد اقل دو نقطه بحرانی به ترتیب در $\mathcal{N}^{-1}([-\infty, r_1])$ و $\mathcal{N}^{-1}([r_1, r_2[)$ اتخاذ می‌کند.

هدف ما به کارگیری قضیه‌های ۱ و ۲ برای فضای $X := W^1 L_\Phi(\Omega)$ و تابع‌های $\mathcal{N}, \mathcal{F}_0 : X \rightarrow \mathbb{R}$ با ضوابط زیر می‌باشد:

$$\mathcal{N}(w) := \widetilde{M}_0(\int_\Omega [\Phi(|w(x)|) + \Phi(|\nabla w(x)|)] dx), \quad (6.2)$$

$$\mathcal{F}_0(w) := \int_\Omega F_0(x, w(x)) dx, \quad (7.2)$$

که در آن

$$\widetilde{M}_0(z) := \int_0^z M_0(s) ds, \quad z \geq 0,$$

9

$$F_0(x, z) := \int_0^z f_0(x, \xi) d\xi, \quad (x, z) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

به وضوح تابع‌های $\mathcal{N}$ و $\mathcal{F}_0$ خوش تعریف و به طور پیوسته مشتق‌پذیر گاتو می‌باشند. مشتقات آنها با ضوابط زیر بیان می‌شود:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}'(w)(v) &:= M_0 \left(\int_{\Omega} [\Phi(|w(x)|) + \Phi(|\nabla w(x)|)] dx \right) \\ &\times \left[\int_{\Omega} (\alpha(|\nabla w(x)|) \nabla w(x) \nabla v(x) + \alpha(|w(x)|) w(x) v(x)) dx \right], \end{aligned}$$

9

$$\mathcal{F}'_0(w)(v) = \int_{\Omega} f_0(x, w(x)) v(x) dx, \quad (۸.۲)$$

برای هر $w, v \in X$.

تعریف ۲:

تابع $w \in X$ یک جواب ضعیف مسأله (۱,۱) می‌نامیم هرگاه برای هر $v \in X$ داشته باشیم

$$\begin{aligned} &M_0 \left(\int_{\Omega} [\Phi(|w(x)|) + \Phi(|\nabla w(x)|)] dx \right) \\ &\times \left[\int_{\Omega} (\alpha(|\nabla w(x)|) \nabla w(x) \nabla v(x) + \alpha(|w(x)|) w(x) v(x)) dx \right] \\ &- \lambda_0 \int_{\Omega} f_0(x, w(x)) v(x) dx = 0, \end{aligned}$$

گزاره ۱: [۲۰]، قضیه ۱,۴

عملگر $\Theta(\xi) := \alpha(|\xi|)\xi$ در شرط (S_+) به طوری که $\alpha : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع باشد در مسأله (۱,۱) صدق می‌کند. به طوری که برای هر دنباله $\{w_n\} \subset W^1 L_{\Phi}(\Omega)$ به طوری که $w_n \rightharpoonup w$ (همگرایی ضعیف) در $W^1 L_{\Phi}(\Omega)$ و

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \alpha(|\nabla w_n(x)|) \nabla w_n(x) \nabla (w_n - w)(x) dx \leq 0$$

در این صورت $w_n \rightarrow w$ (همگرایی قوی) در $W^1 L_{\Phi}(\Omega)$ می‌باشد.

۳ نتایج اصلی

فرض کنید $f_0 : \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته و صادق در شرط زیر باشد $(f_{\infty}) \quad \rho > 0$ و تابع مثبت $k_0 \in L^{\infty}(\Omega)$ موجوداند به طوری که:

$$|f_0(x, z)| \leq \rho |z|^{p_0 - 1} + k_0(x)$$

برای هر $z \in \mathbb{R}, x \in \Omega$

برای اثبات نتیجه اصلی به لم‌های زیر نیاز داریم.

لم ۵:

تابع‌های $\mathcal{N}$ و $\mathcal{F}_0$ نیم پیوسته پایینی ضعیف دنباله‌ای هستند.

فرض کنید $\{w_n\} \subset X := W^1 L_\Phi(\Omega)$ دنباله همگرایی ضعیف به $w \in X$ باشد. باتوجه به [۲۲]، لم [۳، ۴] نگاشت $w \mapsto \int_\Omega [\Phi(|w|) + \Phi(|\nabla w|)] dx$ نیم پیوسته پایینی ضعیف دنباله‌ای است به طوری که

$$\begin{aligned} & \int_\Omega [\Phi(|w|) + \Phi(|\nabla w|)] dx \\ & \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega [\Phi(|w_n|) + \Phi(|\nabla w_n|)] dx. \quad (۱.۳) \end{aligned}$$

تابع $\mathcal{N}(w) := \widetilde{M}_0(\int_\Omega [\Phi(|w|) + \Phi(|\nabla w|)] dx)$ برای هر $w \in X$ را تعریف می‌کنیم.

بنابراین با در نظر گرفتن تعریف تابع $\mathcal{N}(w)$ و رابطه (۱، ۳) و پیوسته و یکنوا بودن $\widetilde{M}_0$ داریم

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{N}(w_n) &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \widetilde{M}_0(\int_\Omega [\Phi(|w_n|) + \Phi(|\nabla w_n|)] dx) \\ &\geq \widetilde{M}_0(\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega [\Phi(|w_n|) + \Phi(|\nabla w_n|)] dx) \\ &\geq \widetilde{M}_0(\int_\Omega [\Phi(|w|) + \Phi(|\nabla w|)] dx) \\ &= \mathcal{N}(w), \end{aligned}$$

به عبارت دیگر تابع $\mathcal{N}$ نیم پیوسته پایینی ضعیف دنباله‌ای است از طرف دیگر، طبق [۲۱]، تذکر ۱ و

قضیه ۲ [شرط (f_∞) و نشاندهی فشرده $X := W^1 L_\Phi(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$ نتیجه می‌گیریم

$w \rightarrow \int_\Omega F_0(x, w(x)) dx$ مشتق فشرده دارد. از این رو $\mathcal{N}$ و $\mathcal{F}_0$ نیم پیوسته پایینی ضعیف دنباله‌ای است.

تذکر ۱:

ما می‌توانیم جایگزین کنیم f_∞ را با $\limsup_{|z| \rightarrow \infty} \frac{f_0(x, z)}{|z|^{p_0-1}} = 0$ به طور یکنواخت برای تقریباً هر $x \in \Omega$ بعلاوه J_{λ_0} یک تابع در C^1 ، و در شرط پالایز-اسمال (PS) (همانطور که در نتیجه بعدی ثابت خواهد شد) صدق می‌کند.

لم ۶:

تابع $J_{\lambda_0} := \mathcal{N} - \lambda_0 \mathcal{F}_0$ اجباری است و در شرط پالایز - اسمال (PS) برای هر پارامتر حقیقی λ_0 و

شرط برش بالایی پالایز - اسمال $(PS)^{[r]}$ برای هر $r > 0$ صدق کند.

برهان. فرض کنیم ثابت $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ و عدد مثبت β را طوری انتخاب می‌کنیم که

$$0 < \beta < \frac{m_0}{|\lambda_0|}$$

تذکر ۱ منجر می‌شود که ثابت مثبت δ_{λ_0} و تابع $k_1 \in L^\infty(\Omega)$ به طوری که:

$$|f_0(x, z)| \leq k_1(x) + \frac{p_0 \beta}{c_{p_0}} |z|^{p_0-1},$$

برای هر z ، $|z| \geq \delta_k$ و هر $x \in \Omega$ ، و

$$|F_0(x, s)| \leq \max_{|z| \leq \delta_{\lambda_0}, x \in \bar{\Omega}} |f_0(x, z)| |s| + \|k_1\|_\infty |s| + \frac{\beta}{c_{p_0}} |s|^{p_0} \quad (۲.۳)$$

برای هر $(x, s) \in \Omega \times \mathbb{R}$ ، لذا با در نظر گرفتن نامساوی (۲.۳)، λ_0 ، λ_1 و روابط (۲.۲) و (۳.۲) و با این حقیقت که $M_0(z) \geq m_0 > 0$ برای هر $z \geq 0$ و هر $\|w\| > 1$ داریم:

$$\begin{aligned}
 J_{\lambda_0}(w) &= \mathcal{N}(w) - \lambda_0 \mathcal{F}_0(w) \geq m_0 \int_{\Omega} [\Phi(|w|) + \Phi(|\nabla w|)] dx - |\lambda_0| \int_{\Omega} |F_0(x, w)| dx \\
 &\geq m_0 \|w\|^{p_0} - |\lambda_0| \int_{\Omega} \left(\max_{|z| \leq \delta_{\lambda_0}, x \in \bar{\Omega}} |f_0(x, z)| \right) |w| dx \\
 &\quad - |\lambda_0| \|k_1\|_{\infty} \int_{\Omega} |w| dx - \frac{|\lambda_0| \beta}{c_{p_0}^{p_0}} \int_{\Omega} |w|^{p_0} dx \\
 &\geq m_0 \|w\|^{p_0} - 2c|\lambda_0| |\Omega| \left(\max_{|z| \leq \delta_{\lambda_0}, x \in \bar{\Omega}} |f_0(x, z)| \right) \|w\| \\
 &\quad - 2c|\lambda_0| |\Omega| \|k_1\|_{\infty} \|w\| - |\lambda_0| \beta \|w\|^{p_0} \\
 &= (m_0 - |\lambda_0| \beta) \|w\|^{p_0} - \Gamma_1 \|w\|.
 \end{aligned}$$

برای مقدار ثابت مثبت مناسب Γ_1 .

بنابراین از آنجائیکه $\beta < \frac{m_0}{|\lambda_0|}$ و $p_0 > N > 1$ لذا J_{λ_0} یک تابع اجباری است یعنی هرگاه $\|w\| \rightarrow +\infty$ آنگاه $J_{\lambda_0}(w) \rightarrow +\infty$ همچنین J_{λ_0} از پایین کراندار روی X است. حال اگر $\alpha \in \mathbb{R}$ را ثابت در نظر بگیریم ما ثابت می‌کنیم که J_{λ_0} در شرط $(PS)_{\alpha}$ صدق می‌کند و برای این کار فرض می‌کنیم $\{w_n\} \subset X$ یک دنباله پالایز - اسمال برای تابع J_{λ_0} در سطح تراز α به طوری که $J_{\lambda_0}(w_n) \rightarrow \alpha$

و

$$\|J'_{\lambda_0}(w_n)\|_{X^*} \rightarrow 0$$

که X^* فضای دوگان X است. ثابت می‌کنیم $\{w_n\}$ دارای یک زیر دنباله‌ای به طور قوی همگرا است. با توجه به اجباری بودن J_{λ_0} ، دنباله $\{w_n\}$ در X کراندار است و چون فضای X انعکاسی است [۱۶] قضیه ۱.۳ [پس می‌توانیم یک زیر دنباله از $\{w_n\}$ که مجدد آن را $\{w_n\}$ می‌نامیم، بدست آوریم به طوری که $w_n \rightharpoonup w$ (به طور ضعیف) در X ثابت می‌کنیم که w_n به طور قوی به $w \in X$ همگرا است. داریم:

$$\begin{aligned}
 \langle J'_{\lambda_0}(w_n), (w_n - w) \rangle &= \mathcal{N}'(w_n)(w_n - w) - \lambda_0 \mathcal{F}'_0(w_n)(w_n - w) \\
 &= M_0 \left(\int_{\Omega} [\Phi(|\nabla w_n|) + \Phi(|w_n|)] dx \right) \\
 &\quad \times \left(\int_{\Omega} [\alpha(|\nabla w_n|) \nabla w_n \nabla(w_n - w) + \alpha(|w_n|) w_n (w_n - w)] dx \right) \\
 &\quad - \lambda_0 \int_{\Omega} f_0(x, w_n)(w_n - w) dx.
 \end{aligned}$$

از آنجائیکه $\|J'_{\lambda_0}(w_n)\|_{X^*} \rightarrow 0$ و دنباله $\{w_n - w\}$ در X کراندار است و با توجه به

$$|\langle J'_{\lambda_0}(w_n), w_n - w \rangle| \leq \|J'_{\lambda_0}(w_n)\|_{X^*} \|w_n - w\|_X,$$

داریم:

$$\langle J'_{\lambda_0}(w_n), w_n - w \rangle = o(1). \quad (۳.۳)$$

علاوه بر این با توجه به شرط (f_{∞}) و تذکره ۱ یک ثابت حقیقی مثبت τ و یک تابع مثبت $l_{\tau} \in L^{\infty}(\Omega)$ موجود هستند به طوری که

$$|f_0(x, z)| \leq \tau |z|^{p_0-1} + l_{\tau}(x)$$

برای هر $(x, z) \in \Omega \times \mathbb{R}$ برقرار است با توجه به نامساوی هولدر در نظر می‌گیریم که:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |f_0(x, w_n)| |w_n - w| dx &\leq \tau \int_{\Omega} |w_n|^{p_0-1} |w_n - w| dx + \int_{\Omega} l_{\tau}(x) |w_n - w| dx \\ &\leq \tau \int_{\Omega} |w_n|^{p_0-1} |w_n - w| dx + \|l_{\tau}\|_{\infty} \|w_n - w\|_{\infty} |\Omega| \\ &\leq \tau \| |w_n|^{p_0-1} \|_{L^{p'_0}} \|w_n - w\|_{L^{p_0}} + |\Omega| \|l_{\tau}\|_{\infty} \|w_n - w\|_{\infty}. \end{aligned}$$

از آنجایی که نشاندهی $X \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$ و $X \hookrightarrow L^{p_0}(\Omega)$ فشرده هستند از این رو $w_n \rightarrow w$ به طور قوی در $L^{p_0}(\Omega)$ و $C^0(\bar{\Omega})$ پس

$$\int_{\Omega} |f_0(x, w_n)| |w_n - w| dx \rightarrow 0, \quad (۴.۳)$$

وقتی که $n \rightarrow \infty$ به طور مشابه داریم:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\alpha(w_n)| |w_n| |w_n - w| dx &\leq \left(\int_{\Omega} |\alpha(|w_n(x)|)| dx \right) \|w_n\|_{\infty} \|w_n - w\|_{\infty} \\ &\rightarrow 0, \quad (۵.۳) \end{aligned}$$

وقتی که $n \rightarrow \infty$ بنابراین از (۳.۳)، (۵.۳) داریم

$$\begin{aligned} o(1) &= M_0 \left(\int_{\Omega} [\Phi(|\nabla w_n|) + \Phi(|w_n|)] dx \right) \int_{\Omega} [\alpha(|\nabla w_n|) \nabla w_n (\nabla w_n - \nabla w)] dx \\ &\quad + o(1), \end{aligned}$$

لذا

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} M_0 \left(\int_{\Omega} [\Phi(|\nabla w_n|) + \Phi(|w_n|)] dx \right) \int_{\Omega} [\alpha(|\nabla w_n|) \nabla w_n (\nabla w_n - \nabla w)] dx \leq 0.$$

با توجه به شرط $M_0(z) \geq m_0 > 0$ برای $z \geq 0$ داریم:

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} [\alpha(|\nabla w_n|) \nabla w_n (\nabla w_n - \nabla w)] dx \right) \leq 0$$

بنابراین از اینکه عملگر $\Theta(\xi) := \alpha(|\xi|)\xi$ در شرط (S_+) صدق می‌کند به این نتیجه می‌توان رسید که $w_n \rightarrow w$ به طور قوی در X .

تذکره ۲:

برای شرط $(PS)^{[r]}$ نگاه می‌کنیم به شرط (α_3) ، مشابه $[\Delta]$ ، لم ۱، ۳ می‌توان نشان داد دنباله $\{w_n\}$ یک زیردنباله همگرا دارد. با به کارگیری لم ۶ ما قضیه زیر را ثابت می‌کنیم.

قضیه ۳:

فرض کنید ثابت‌های مثبت θ ، η ، و c با شرط

$$2c \left(\frac{2\widetilde{M}_0(\text{meas}(\Omega)\Phi(\eta))}{m_0} \right)^{\frac{1}{p_0}} < \theta < 1$$

$$\frac{\int_{\Omega} F_0(x, \eta) dx}{\bar{M}_0(meas(\Omega)\Phi(\eta))} > \max \left\{ \frac{\frac{\rho c p_0}{p_0} \left(\frac{\theta}{2c}\right)^{p_0} + 4c \|k_0\|_{\infty} meas(\Omega) \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\theta}{2c}\right)^{p_0}}}{m_0 \left(\frac{\theta}{2c}\right)^{p_0}}, \frac{\frac{\rho c p_0}{2p_0} \left(\frac{\theta}{2c}\right)^{p_0} + \theta \|k_0\|_{\infty} meas(\Omega) \sqrt{\frac{1}{2}}}{\frac{m_0}{2} \left(\frac{\theta}{2c}\right)^{p_0}} \right\}$$

موجود باشند در این صورت برای هر $\lambda_{\eta}^*, \lambda_{\theta}^* \in]\lambda_0, \infty[$ که در آن $\lambda_0 := \frac{\bar{M}_0(meas(\Omega)\Phi(\eta))}{\int_{\Omega} F_0(x, \eta) dx}$ و

$$\lambda_{\theta}^* := \min \left\{ \frac{m_0 \left(\frac{\theta}{2c}\right)^{p_0}}{\frac{\rho c p_0}{p_0} \left(\frac{\theta}{2c}\right)^{p_0} + 4c \|k_0\|_{\infty} meas(\Omega) \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\theta}{2c}\right)^{p_0}}}, \frac{\frac{m_0}{2} \left(\frac{\theta}{2c}\right)^{p_0}}{\frac{\rho c p_0}{2p_0} \left(\frac{\theta}{2c}\right)^{p_0} + \theta \|k_0\|_{\infty} meas(\Omega) \sqrt{\frac{1}{2}}} \right\}$$

مسئله (۱,۱) حداقل دارای یک جواب ضعیف نابدیهی است.

خصوصاً فرض می‌کنیم $f_0(x, z) \geq 0$ برای هر $(x, z) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ این جواب ضعیف مثبت است. برهان. ثابت $\lambda_0 \in \Lambda$ را در نظر می‌گیریم هدف به کارگیری قضیه ۱ ابتدا با استفاده از لم ۶، ثابت می‌کنیم $\mathcal{N} - \lambda_0 \mathcal{F}_0$ در شرط $(PS)^{[r]}$ برای $r_1 = 0$ و $r_2 := \frac{m_0}{2} \left(\frac{\theta}{2c}\right)^{p_0}$ صدق می‌کند ما ادعا می‌کنیم که شرط زیر برقرار است:

$$\vartheta(r_1, r_2) < \frac{1}{\lambda_0} < \rho(r_1, r_2)$$

با این حقیقت که تابع $v_{\eta} \in X$ برای هر $x \in \Omega$ را به صورت $v_{\eta}(x) := \eta$ تعریف می‌کنیم و رابطه

$$2c \left(\frac{2 \bar{M}_0(meas(\Omega)\Phi(\eta))}{m_0} \right)^{\frac{1}{p_0}} < \theta$$

برقرار باشد داریم:

$$\mathcal{N}(v_{\eta}) = \mathcal{N}(\eta) = \bar{M}_0 \left(\int_{\Omega} \Phi(\eta) dx \right) = \bar{M}_0(meas(\Omega)\Phi(\eta)) < r_2$$

اگر $\|w\| \geq 1$ آنگاه از روابط $(f_{\infty}), (2,1), (2,2), (3,2)$ و نامساوی $\|w\| < \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\theta}{2c}\right)^{p_0}}$ برای هر $w \in X$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{\sup_{w \in \mathcal{N}^{-1}([-\infty, r_2])} \mathcal{F}_0(w)}{r_2} &= \frac{\sup_{w \in \mathcal{N}^{-1}([-\infty, r_2])} \int_{\Omega} F_0(x, w(x)) dx}{r_2} \\ &\leq \frac{\sup_{w \in \mathcal{N}^{-1}([-\infty, r_2])} \left[\frac{\rho c p_0}{p_0} \|w\|^{p_0} + 2c \|k_0\|_{\infty} meas(\Omega) \|w\| \right]}{r_2} \\ &\leq \frac{\frac{\rho c p_0}{2p_0} \left(\frac{\theta}{2c}\right)^{p_0} + 2c \|k_0\|_{\infty} meas(\Omega) \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\theta}{2c}\right)^{p_0}}}{\frac{m_0}{2} \left(\frac{\theta}{2c}\right)^{p_0}} \\ &\leq \frac{1}{\lambda_{\theta}^*} < \frac{1}{\lambda_0}. \end{aligned}$$

به طور مشابه برای $\|w\| < 1$ شرایط بالا برقرار است از تعریف λ_θ^* نتیجه می‌شود:

$$\frac{\sup_{w \in \mathcal{N}^{-1}([-\infty, r_2])} \mathcal{F}_0(w)}{r_2} \leq \frac{\frac{\rho c p_0}{2} \left(\frac{\theta}{2c}\right)^{p_0} + \theta \|k_0\|_\infty \text{meas}(\Omega)^{p_0} \sqrt{\frac{1}{2}}}{\frac{m_0}{2} \left(\frac{\theta}{2c}\right)^{p_0}} \leq \frac{1}{\lambda_\theta^*} < \frac{1}{\lambda_0}$$

علاوه بر این

$$\mathcal{F}_0(v_\eta) = \int_\Omega \mathcal{F}_0(x, v_\eta(x)) dx = \int_\Omega F_0(x, \eta) dx. \quad (۶.۳)$$

بنابراین

$$\frac{\mathcal{F}_0(v_\eta)}{\mathcal{N}(v_\eta)} = \frac{\int_\Omega F_0(x, \eta) dx}{\widetilde{M}_0(\text{meas}(\Omega)\Phi(\eta))} > \frac{1}{\lambda_0}.$$

لذا

$$\frac{\sup_{w \in \mathcal{N}^{-1}([-\infty, r_2])} \mathcal{F}_0(w)}{r_2} < \frac{\mathcal{F}_0(v_\eta)}{\mathcal{N}(v_\eta)}, \quad (۷.۳)$$

که در آن $0 = r_1 < \mathcal{N}(v_\eta) < r_2$ می‌باشد. پس

$$\begin{aligned} \vartheta(r_1, r_2) &= \vartheta(0, r_2) = \inf_{v \in \mathcal{N}^{-1}([0, r_2])} \frac{\sup_{w \in \mathcal{N}^{-1}([0, r_2])} \mathcal{F}_0(w) - \mathcal{F}_0(v)}{r_2 - \mathcal{N}(v)} \\ &\leq \frac{\sup_{w \in \mathcal{N}^{-1}([0, r_2])} \mathcal{F}_0(w) - \mathcal{F}_0(v_\eta)}{r_2 - \mathcal{N}(v_\eta)} \\ &\leq \frac{\sup_{w \in \mathcal{N}^{-1}([-\infty, r_2])} \mathcal{F}_0(w) - \mathcal{F}_0(v_\eta)}{r_2 - \mathcal{N}(v_\eta)} \\ &< \frac{\frac{r_2 \mathcal{F}_0(v_\eta)}{\mathcal{N}(v_\eta)} - \mathcal{F}_0(v_\eta)}{r_2 - \mathcal{N}(v_\eta)} = \frac{\mathcal{F}_0(v_\eta)}{\mathcal{N}(v_\eta)}. \end{aligned}$$

اما برای هر $w \in \mathcal{N}^{-1}([-\infty, 0])$ داریم

$$\mathcal{N}(w) \geq m_0 \max\{\|w\|^{p_0}, \|w\|^{p^0}\}$$

بنابراین

$$m_0 \max\{\|w\|^{p_0}, \|w\|^{p^0}\} \leq \mathcal{N}(w) \leq 0$$

پس $w \equiv 0$ ، لذا $\sup_{w \in \mathcal{N}^{-1}([-\infty, 0])} \mathcal{F}_0(w) = 0$ در نتیجه

$$\begin{aligned} \rho(r_1, r_2) &= \rho(0, r) = \sup_{v \in \mathcal{N}^{-1}([0, r_2])} \frac{\mathcal{F}_0(v) - \sup_{w \in \mathcal{N}^{-1}([-\infty, 0])} \mathcal{F}_0(w)}{\mathcal{N}(v)} \\ &\geq \frac{\mathcal{F}_0(v_\eta)}{\mathcal{N}(v_\eta)} > \vartheta(r_1, r_2). \end{aligned}$$

در این صورت:

$$\left] \frac{\mathcal{N}(v_\eta)}{\mathcal{F}_0(v_\eta)}, \frac{r_2}{\sup_{w \in \mathcal{N}^{-1}([-\infty, r_2])} \mathcal{F}_0(w)} \right[\subseteq \left] \frac{1}{\rho(r_1, r_2)}, \frac{1}{\vartheta(r_1, r_2)} \right[$$

مطابق با قضیه ۱، تابع $J_{\lambda_0} = \mathcal{N} - \lambda_0 \mathcal{F}_0$ حداقل یک نقطه بحرانی $w_1 \in X$ دارد که $0 < \mathcal{N}(w_1) < r_2$ یعنی

$$\|w_1\| < \sqrt[p_0]{\frac{1}{2} \left(\frac{\theta}{2c} \right)^{p_0}}$$

در این صورت برای هر $\lambda_0 \in \Lambda$ و $w \in \mathcal{N}^{-1}(]0, r_2[)$ داریم: $J_{\lambda_0}(w_1) \leq J_{\lambda_0}(w)$. یادآور می‌شویم که نقاط بحرانی تابع J_{λ_0} در X دقیقاً جواب‌های ضعیف مسأله $(1,1)$ می‌باشند پس مسأله $(1,1)$ حداقل یک جواب ضعیف دارد. فرض کنید برای هر $(x, z) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ قرار دهیم $f_0(x, z) \geq 0$ پس بر اساس [۱۷] قضیه ۲،۳ (برای حالت $\mu = 0$) جواب بدست آمده برای مسأله $(1,1)$ مثبت است. اکنون در زیر مثالی برای کاربرد قضیه ۳ با فرض این که تابع f_0 در شرایط قضیه ۳ صدق می‌کند، قرار می‌دهیم.

مثال ۱:

فرض کنید f_0 یک تابع با ضابطه

$$f_0(x, z) = e^{|x|} [|z|^{\zeta-1} + |z|^{p_0-1}]$$

برای هر $(x, z) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ که $1 < \zeta < p_0 - 1$ باشد.

$$\rho \equiv k_0 \equiv 2 \left(\max_{x \in \bar{\Omega}} e^{|x|} \right)$$

در شرط (f_∞) در نظر می‌گیریم

فرض کنید ثابت‌های مثبت θ ، η ، و c با شرط

$$2c \left(\frac{2\widetilde{M}_0(\text{meas}(\Omega)\Phi(\eta))}{m_0} \right)^{\frac{1}{p_0}} < \theta < 1$$

و

$$\left(\frac{1}{\zeta} \eta^\zeta + \frac{1}{q} \eta^q \right) \left(\min_{x \in \bar{\Omega}} e^{|x|} \right) > \frac{\widetilde{M}_0(\text{meas}(\Omega)\Phi(\eta))}{\lambda_\theta^*}$$

موجود باشند بنابراین، از آنجائیکه

$$\int_{\Omega} F_0(x, \eta) dx \geq \left(\frac{1}{\zeta} \eta^\zeta + \frac{1}{q} \eta^q \right) \left(\min_{x \in \bar{\Omega}} e^{|x|} \right)$$

می‌باشد در این صورت همه شرط‌های قضیه ۳ برقرار است از این رو برای هر

$$\lambda_0 \in \left[\frac{\widetilde{M}_0(\text{meas}(\Omega)\Phi(\eta))}{\left(\frac{1}{\zeta} \eta^\zeta + \frac{1}{q} \eta^q \right) \left(\min_{x \in \bar{\Omega}} e^{|x|} \right)}, \lambda_\theta^* \right],$$

پس با به کارگیری قضیه ۳ برای مسأله

$$\begin{cases} \chi(w) = \lambda_0 e^{|x|} (|w|^{\zeta-1} + |w|^{p_0-1}) & \text{in } \Omega \\ w = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

که در آن

$$\chi(w) := M_0 \left(\int_{\Omega} [\Phi(|\nabla w|) + \Phi(|w|)] dx \right) (-\text{div}(\alpha(|\nabla w| \nabla w) + \alpha(|w| w)).$$

تذکر ۳:

یادآور می‌شویم فرض‌های قضیه ۳ برای حالتی که

$$\limsup_{z \rightarrow 0^+} \int_{\Omega} F_0(x, z) dx = +\infty \quad (۸.۳)$$

باشد، به عبارت دیگر از فرض (۸.۳) به جای فرض‌های قضیه ۳ استفاده کرده و به صورت زیر بیان می‌کنیم. فرض کنید ثابت‌های مثبت θ, η, c ، با شرط

$$2c \left(\frac{2\widetilde{M}_0(\text{meas}(\Omega)\Phi(\eta))}{m_0} \right)^{\frac{1}{p^0}} < \theta < 1$$

موجوداند به طوری که:

$$\int_{\Omega} F_0(x, \eta) dx > \widetilde{M}_0(\text{meas}(\Omega)\Phi(\eta)) \max \left\{ \frac{\frac{\rho c p_0}{p_0} \left(\frac{\theta}{2c} \right)^{p^0} + 4c \|k_0\|_{\infty} \text{meas}(\Omega)^{p_0} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\theta}{2c} \right)^{p^0}}}{m_0 \left(\frac{\theta}{2c} \right)^{p^0}}, \right. \\ \left. \frac{\frac{\rho c p_0}{2 p_0} \left(\frac{\theta}{2c} \right)^{p^0} + \theta \|k_0\|_{\infty} \text{meas}(\Omega)^{p_0} \sqrt{\frac{1}{2}}}{\frac{m_0}{2} \left(\frac{\theta}{2c} \right)^{p^0}} \right\}$$

تذکر ۴:

به جای فرض (f_{∞}) در اثبات قضیه ۳ می‌توانیم از فرضی که در زیر بیان می‌شود استفاده کنیم. فرض کنید ثابت‌های مثبت θ, η, c که

$$2c \left(\frac{2\widetilde{M}_0(\text{meas}(\Omega)\Phi(\eta))}{m_0} \right)^{\frac{1}{p^0}} < \theta < 1$$

و

$$\frac{\int_{\Omega} F_0(x, \eta) dx}{\widetilde{M}_0(\text{meas}(\Omega)\Phi(\eta))} > \frac{\int_{\Omega} \sup_{|z| \leq \theta} F_0(x, z) dx}{\frac{m_0}{2} \left(\frac{\theta}{2c} \right)^{p^0}}$$

موجود باشند و در این صورت در قضیه ۳ تعریف می‌کنیم

$$\frac{\sup_{w \in \mathcal{N}^{-1}([- \infty, r_2])} F_0(w)}{r_2} \leq \frac{\sup_{w \in \mathcal{N}^{-1}([- \infty, r_2])} \int_{\Omega} F_0(x, w(x)) dx}{r_2} \\ \leq \frac{\int_{\Omega} \sup_{|z| \leq \theta} F_0(x, z) dx}{r_2}$$

تعریف می‌کنیم

$$\lambda_{\theta}^* := \frac{\frac{m_0}{2} \left(\frac{\theta}{2c} \right)^{p^0}}{\int_{\Omega} \sup_{|z| \leq \theta} F_0(x, z) dx}$$

قضیه ۳ برای این شرایط برقرار است.

اکنون در زیر یک نتیجه از قضیه ۳ را بیان می‌کنیم

قضیه ۴:

فرض کنید $f_0 : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته نامنفی با شرط (f_∞) به طوری که :

$$\lim_{z \rightarrow 0^+} \left(\inf_{x \in \bar{\Omega}} f_0(x, z) \right) = +\infty \quad (9.3)$$

در این صورت ثابت مثبت λ_0^* وجود دارد به طوری که برای هر $\lambda_0 \in]0, \lambda_0^*[$ مسأله (۱,۱) حداقل یک جواب ضعیف مثبت دارد.

برهان . شرط (۹,۳) نتیجه فرض (۸,۳) است. بنابراین با به کارگیری تذکر ۳ و قضیه ۳ نتیجه خواسته شده حاصل می‌گردد.

با توجه به تذکر ۱ حالت خاص از قضیه ۴ را بیان می‌داریم :

نتیجه ۱:

فرض کنید $f_0 : \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته نامنفی باشد به طوری که

$$\limsup_{|z| \rightarrow +\infty} \frac{f_0(x, z)}{|z|^{p_0-1}} = 0 \quad (10.3)$$

به طور یکنواخت برای تقریباً هر $x \in \Omega$ برقرار باشد.

همچنین رابطه (۹,۳) نیز برقرار باشد در این صورت ثابت مثبت λ_0^* وجود دارد به طوری که برای هر $\lambda_0 \in]0, \lambda_0^*[$ مسأله (۱,۱) حداقل یک جواب ضعیف مثبت دارد.

برهان. از رابطه (۱۰,۳) شرط (f_∞) به دست می‌آید و بنابراین با به کارگیری قضیه ۴ نتیجه خواسته شده، حاصل می‌گردد. علاوه بر این شرط (f_∞) را با تابع f_0 که یک تابع پیوسته با شرط زیر خطی $(p_0 - 1)$ در بی نهایت است جایگزین می‌کنیم به عبارت دیگر همان فرض (۱۰,۳) است.

اکنون، ما آماده‌ایم که وجود دومین نقطه بحرانی متمایز (مینیمم موضعی) را نشان دهیم. برای این منظور فرضیه‌های قضیه ۱ را بررسی خواهیم کرد.

قضیه ۵:

با توجه به مفروضات قضیه ۴ وجود دارند اعداد مثبت r و Λ_* وجود دارند به طوری که برای هر $\lambda_0 \in \Lambda_*$ مسأله (۱,۱) دارای حداقل یک جواب ضعیف w_2 که متمایز از اولین جواب ضعیف w_1 می‌باشد. تابع‌های $\mathcal{N}$ و J_{λ_0} که در بخشهای قبلی معرفی شدند در شرایط زیر صدق می‌کنند

$$J_{\lambda_0}(w_2) \leq J_{\lambda_0}(w)$$

و

$$r < \mathcal{N}(w_2) < 2r$$

برای هر

$$w \in \mathcal{N}^{-1}(]r, 2r[)$$

برهان . با در نظر گرفتن تذکر ۳ ، دو ثابت مثبت δ^* و θ موجود هستند به طوری که

$$\int_{\Omega} F_0(x, \delta^*) dx > M_\theta + m_\theta \quad (11.3)$$

و

$$r < \mathcal{N}(v_{\delta^*}) < 2r$$

با

$$r = \frac{m_0}{2} \left(\frac{\theta}{2c} \right)^{p_0}$$

که در آن

$$M_\theta := \frac{\rho c_{p_0}^{p_0}}{p_0} \left(\frac{\theta}{2c} \right)^{p_0} + 2c \|k_0\|_\infty \text{meas}(\Omega)^{p_0} \sqrt{\left(\frac{\theta}{2c} \right)^{p_0}}$$

9

$$m_\theta := \frac{\rho c_{p_0}^{p_0}}{2p_0} \left(\frac{\theta}{2c} \right)^{p_0} + 2c \|k_0\|_\infty \text{meas}(\Omega)^{p_0} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\theta}{2c} \right)^{p_0}}$$

مشابه بحث‌های بخش قبلی برای هر $w \in \mathcal{N}^{-1}([-\infty, 2r])$ و جایگزینی $2r$ به جای r_2 داریم

$$\frac{\sup_{w \in \mathcal{N}^{-1}([-\infty, 2r])} \mathcal{F}_0(w)}{2r} \leq \frac{\frac{\rho c_{p_0}^{p_0}}{p_0} \left(\frac{\theta}{2c} \right)^{p_0} + 2c \|k_0\|_\infty \text{meas}(\Omega)^{p_0} \sqrt{\left(\frac{\theta}{2c} \right)^{p_0}}}{2r} \quad (12.3)$$

و از $(4,2), (5,2), (6,3), (7,3), (8,3), (9,3), (10,3), (11,3)$ و $(12,3)$ ما بدست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \vartheta(r_1, r_2) = \vartheta(r, 2r) &= \inf_{v \in \mathcal{N}^{-1}([r, 2r])} \frac{\sup_{w \in \mathcal{N}^{-1}([r, 2r])} \mathcal{F}_0(w) - \mathcal{F}_0(v)}{2r - \mathcal{N}(v)} \\ &\leq \frac{\sup_{w \in \mathcal{N}^{-1}([r, 2r])} \mathcal{F}_0(w) - \mathcal{F}_0(v_{\delta^*})}{2r - \mathcal{N}(v_{\delta^*})} \\ &\leq \frac{\sup_{w \in \mathcal{N}^{-1}([r, 2r])} \mathcal{F}_0(w)}{2r} \\ &\leq \frac{\frac{\rho c_{p_0}^{p_0}}{p_0} \left(\frac{\theta}{2c} \right)^{p_0} + 2c \|k_0\|_\infty \text{meas}(\Omega)^{p_0} \sqrt{\left(\frac{\theta}{2c} \right)^{p_0}}}{2r} \\ &\leq \frac{\int_\Omega F_0(x, \delta^*) dx - m_\theta}{2r} \\ &\leq \frac{\mathcal{F}_0(v_{\delta^*}) - \sup_{w \in \mathcal{N}^{-1}([-\infty, r])} \mathcal{F}_0(w)}{\mathcal{N}(v_{\delta^*}) - r} \\ &\leq \rho(r, 2r) = \rho(r_1, r_2), \end{aligned}$$

با شرط $r < \mathcal{N}(v_{\delta^*}) < 2r$ و برای هر

$$\frac{1}{\rho(r_1, r_2)} < \lambda_0 < \frac{1}{\vartheta(r_1, r_2)}$$

برای نامساوی دوم از این حقیقت استفاده کردیم که اگر

$$\frac{\zeta_1}{\zeta_2} \leq \gamma \leq \frac{\zeta_3}{\zeta_4}$$

در این صورت

$$\frac{\zeta_1 - \zeta_3}{\zeta_2 - \zeta_4} \leq \gamma$$

می‌باشد. با توجه به قضیه ۱ برای هر $\lambda_0 < \bar{\lambda}_r < \lambda_*$ و هر $w \in \mathcal{N}^{-1}(]r, 2r[)$ تابع J_{λ_0} حداقل یک نقطه بحرانی w_2 دارد که

$$r < \mathcal{N}(w_2) < 2r$$

و

$$J_{\lambda_0}(w_2) \leq J_{\lambda_0}(w)$$

می‌باشد. از آنجائیکه

$$\mathcal{N}(w_1) < r < \mathcal{N}(w_2)$$

در این صورت $w_1 \neq w_2$ است. از اینکه هر جواب ضعیف نابديهی از مسئله (۱,۱) یک نقطه بحرانی از تابع J_{λ_0} است بنابراین، اثبات کامل است.

۴- وجود جواب‌های ضعیف دیگر

در این بخش وجود حداقل دو جواب ضعیف برای مسئله (۱,۱) که متفاوت از جواب‌های بدست آمده در بخش قبلی است را بیان خواهیم کرد. حال برای هر $\gamma_i > 0$ (با $i = 1, 2$) قرار می‌دهیم

$$K_{\gamma_i} := \frac{\rho c p_0}{2 p_0} \left(\frac{\gamma_i}{2 c} \right)^{p_0} + 2 c \|k_0\|_{\infty} \text{meas}(\Omega)^{p_0} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\gamma_i}{2 c} \right)^{p_0}}$$

برای هر $i = 1, 2$

اکنون با بکار گیری قضیه ۲ قضیه زیر را اثبات می‌کنیم

قضیه ۶:

فرض کنید ثابت‌های مثبت γ_1 ، γ_2 و δ با شرط

$$\gamma_1 < 2 c \left(\frac{2 \widetilde{M}_0(\text{meas}(\Omega) \Phi(\delta))}{m_0} \right)^{\frac{1}{p_0}} < \gamma_2 < 1, \quad (۱.۴)$$

موجوداند به طوری که

$$\int_{\Omega} F_0(x, \delta) dx \geq K_{\gamma_1}, \quad \left| \int_{\Omega} \sup_{|z| \leq \gamma_1} F_0(x, z) dx \right| = 0$$

و

$$(F_1) \quad \frac{\int_{\Omega} F_0(x, \delta) dx}{\widetilde{M}_0(\text{meas}(\Omega) \Phi(\delta))} > \max \left\{ \frac{K_{\gamma_1}}{\frac{m_0}{2} \left(\frac{\gamma_1}{2 c} \right)^{p_0}}, \frac{K_{\gamma_2}}{\frac{m_0}{2} \left(\frac{\gamma_2}{2 c} \right)^{p_0}} \right\}$$

در این صورت برای هر

$$\lambda_0 \in \Lambda_* := \left(\frac{\widetilde{M}_0(\text{meas}(\Omega)\Phi(\delta))}{\int_{\Omega} F_0(x, \delta) dx}, \frac{1}{\max \left\{ \frac{K_{\gamma_1}}{\frac{m_0(\gamma_1)}{2} \left(\frac{\gamma_1}{2c} \right)^{p_0}}, \frac{K_{\gamma_2}}{\frac{m_0(\gamma_2)}{2} \left(\frac{\gamma_2}{2c} \right)^{p_0}} \right\}} \right)$$

مسأله (۱,۱) دارای حداقل دو جواب ضعیف w_{1,λ_0} و w_{2,λ_0} که $\max_{x \in \Omega} |w_{1,\lambda_0}(x)| < \gamma_1$ و $\max_{x \in \Omega} |w_{2,\lambda_0}(x)| < \gamma_2$ می‌باشد. برهان. قرار می‌دهیم

$$\bar{f}_0(x, s) = \begin{cases} f_0(x, -\gamma_2), & s < -\gamma_2, \\ f_0(x, s), & -\gamma_2 \leq s \leq \gamma_2, \\ f_0(x, \gamma_2), & s > \gamma_2, \end{cases}$$

برای هر $(x, s) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ ، واضح است $\bar{f}_0: \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته که در شرط (f_{∞}) صدق می‌کند. همچنین قرار می‌دهیم

$$\bar{F}_0(x, \xi) = \int_0^{\xi} \bar{f}_0(x, s) ds$$

برای هر $(x, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ ، فرض کنید $\mathcal{F}_0$ و $\mathcal{N}$ تابع‌های تعریف شده در بخش ۲ باشند اما $-\bar{F}_0(x, z)$ به جای $F_0(x, z)$ می‌گذاریم هدف ما به کارگیری قضیه ۲ برای تابع‌های $\mathcal{F}_0$ و $\mathcal{N}$ می‌باشد. مطابق با لم ۶، تابع‌های $\mathcal{F}_0$ و $\mathcal{N}$ اجباری هستند علاوه بر این تابع $\mathcal{N}$ به طور پیوسته مشتق پذیر گاتو است. پس کافی است ثابت کنیم تابع‌های $\mathcal{F}_0$ و $\mathcal{N}$ در شرط‌های (i)، (ii) و (iii) در قضیه ۲ صدق می‌کنند. فرض کنید دو ثابت نامساوی (۱,۴) با انجام محاسباتی ساده داریم

$$r_1 < \mathcal{N}(v_{\delta}) < r_2, \inf_X \mathcal{N} < r_1 < r_2$$

و

$$\mathcal{F}_0(v_{\delta}) = - \int_{\Omega} \bar{F}_0(x, v_{\delta}(x)) dx = - \int_{\Omega} F_0(x, \delta) dx. \quad (۲.۴)$$

رابطه زیر را برای تابع F_0 معرفی می‌کنیم

$$F_0(x, \xi) \leq \frac{\rho}{p_0} |\xi|^{p_0} + \|k_0\|_{\infty} |\xi| \quad (۳.۴)$$

برای هر $(x, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ ، فرض کنید $r > 0$ با در نظر گرفتن رابطه (۳,۴) و به طور مشابه اثبات از قسمت‌های قبلی داریم:

$$\mathcal{F}_0(w) = - \int_{\Omega} \bar{F}_0(x, w(x)) dx \geq - \left[\frac{\rho c^{p_0}}{p_0} \|w\|^{p_0} + 2c \|k_0\|_{\infty} \text{meas}(\Omega) \|w\| \right],$$

برای هر $w \in X$ با $\mathcal{N}(w) < r$ و

$$\mathcal{F}_0(w) \geq - \left[\frac{\rho c_{p_0}^{p_0}}{m_0 p_0} r + 2 c \|k_0\|_{\infty} \text{meas}(\Omega)^{p_0} \sqrt{\frac{r}{m_0}} \right]$$

برای هر $w \in X$ با $\mathcal{N}(w) < r$ (چون که

$$m_0 \|w\|^{p_0} \leq \mathcal{N}(w)$$

برای هر $\|w\| \geq 1$) بنابراین

$$\inf_{\mathcal{N}(w) < r} \mathcal{F}_0(w) \geq - \left[\frac{\rho c_{p_0}^{p_0}}{m_0 p_0} r + 2 c \|k_0\|_{\infty} \text{meas}(\Omega)^{p_0} \sqrt{\frac{r}{m_0}} \right] \quad (۴.۴)$$

به طوری که برای هر $w \in \mathcal{N}^{-1}(]-\infty, r_1[)$ از (F_1) ، $(۲,۴)$ و فرض $\gamma_1 < \delta$ ،

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0(w) &\geq - \left[\frac{\rho c_{p_0}^{p_0}}{m_0 p_0} r_1 + 2 c \|k_0\|_{\infty} \text{meas}(\Omega)^{p_0} \sqrt{\frac{r}{m_0}} \right] \\ &= - \left[\frac{\rho c_{p_0}^{p_0}}{2 p_0} \left(\frac{\gamma_1}{2 c} \right)^{p_0} + 2 c \|k_0\|_{\infty} \text{meas}(\Omega)^{p_0} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\gamma_1}{2 c} \right)^{p_0}} \right] := -K_{\gamma_1} \\ &\geq - \int_{\Omega} F_0(x, \delta) dx = \mathcal{F}_0(v_{\delta}). \end{aligned}$$

از تعریف $\phi_1(r)$ و $\phi_2^*(r_1, r_2)$ نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} \phi_1(r_1) &= \inf_{w \in \mathcal{N}^{-1}(]-\infty, r_1[)} \frac{\mathcal{F}_0(w) - \inf_{\mathcal{N}^{-1}(]-\infty, r_1[)} \mathcal{F}_0}{r_1 - \mathcal{N}(w)} \leq \frac{- \inf_{\mathcal{N}^{-1}(]-\infty, r_1[)} \mathcal{F}_0}{r_1} \\ &\leq \frac{\left[\frac{\rho c_{p_0}^{p_0}}{2 p_0} \left(\frac{\gamma_1}{2 c} \right)^{p_0} + 2 c \|k_0\|_{\infty} \text{meas}(\Omega)^{p_0} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\gamma_1}{2 c} \right)^{p_0}} \right]}{r_1} = \frac{K_{\gamma_1}}{\frac{m_0 (\gamma_1)^{p_0}}{2}}. \\ \phi_1(r_2) &\leq \frac{K_{\gamma_2}}{\frac{m_0 (\gamma_2)^{p_0}}{2}}. \end{aligned}$$

از آنجایی که $\mathcal{N}(0) = \mathcal{F}_0(0) = 0$ ،

$$\overline{\mathcal{N}^{-1}(]-\infty, r[)}^w = \mathcal{N}^{-1}(]-\infty, r[), \mathcal{F}_0(w) - \mathcal{F}_0(v_{\delta}) \geq 0$$

برای هر $w \in \mathcal{N}^{-1}(]-\infty, r_1[)$ و $\int_{\Omega} \sup_{|z| \leq \gamma_1} F_0(x, z) dx = 0$ ، بنابراین

$$\begin{aligned}
 \varphi_2^*(r_1, r_2) &= \inf_{w \in \mathcal{N}^{-1}([- \infty, r_1[)} \sup_{v \in \mathcal{N}^{-1}([r_1, r_2[)} \frac{\mathcal{F}_0(w) - \mathcal{F}_0(v)}{\mathcal{N}(v) - \mathcal{N}(w)} \\
 &\geq \inf_{w \in \mathcal{N}^{-1}([- \infty, r_1[)} \frac{\mathcal{F}_0(w) - \mathcal{F}_0(v_\delta)}{\mathcal{N}(v_\delta) - \mathcal{N}(w)} \\
 &\geq \frac{\inf_{w \in \mathcal{N}^{-1}([- \infty, r_1[)} (\mathcal{F}_0(w) - \mathcal{F}_0(v_\delta))}{\mathcal{N}(v_\delta) - \mathcal{N}(0)} = \frac{-\mathcal{F}_0(v_\delta) - \sup_{w \in \mathcal{N}^{-1}([- \infty, r_1[)} \mathcal{F}_0(w)}{\mathcal{N}(v_\delta)} \\
 &= \frac{-\mathcal{F}_0(v_\delta) - \sup_{w \in \mathcal{N}^{-1}([- \infty, r_1[)} (\int_{\Omega} \bar{F}_0(x, w(x)) dx)}{\mathcal{N}(v_\delta)} \\
 &\geq \frac{-\mathcal{F}_0(v_\delta) - \left| \sup_{|z| \leq \gamma_1} \int_{\Omega} \bar{F}_0(x, z) \right|}{\mathcal{N}(v_\delta)} \\
 &= \frac{-\mathcal{F}_0(v_\delta) - \left| \int_{\Omega} \sup_{|z| \leq \gamma_1} F_0(x, z) dx \right|}{\mathcal{N}(v_\delta)} \\
 &= \frac{-\mathcal{F}_0(v_\delta)}{\mathcal{N}(v_\delta)} = \frac{\int_{\Omega} F_0(x, \delta) dx}{\tilde{M}_0(meas(\Omega)\Phi(\delta))}.
 \end{aligned}$$

از این رو از (F_1) ، شرایط (ii) و (iii) از قضیه ۲ بدست می‌آیند. با بکارگیری قضیه ۲ برای هر $\lambda_0 \in \Lambda_*$ مسأله زیر

$$\begin{cases} M_0 \left(\int_{\Omega} [\Phi(|\nabla w|) + \Phi(|w|)] dx \right) (-div(\alpha(|\nabla w|)\nabla w) + \alpha(|w|)w) = \lambda_0 \bar{f}_0(x, w) & \text{in } \Omega \\ w = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

حداقل دو جواب ضعیف w_{1, λ_0} و w_{2, λ_0} که در آن $\max_{x \in \Omega} |w_{2, \lambda_0}(x)| < \gamma_2$ و $\max_{x \in \Omega} |w_{1, \lambda_0}(x)| < \gamma_1$

این جواب‌ها دقیقاً جواب‌های مسأله $(1, 1)$ هستند به طوری که نتیجه زیر را دنبال می‌کنیم
حال به حالت خاصی از قضیه ۶ اشاره می‌کنیم

قضیه ۷:

فرض کنید $f_0: \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته که در شرط (f_∞) و

$$\lim_{\xi \rightarrow 0^+} (\sup_{x \in \bar{\Omega}} f_0(x, \xi)) = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} (\sup_{x \in \bar{\Omega}} f_0(x, \xi)) = 0, \quad (\Delta.4)$$

صدق کند در این صورت برای هر $\lambda_0 > \tilde{\lambda}_0$ که

$$\tilde{\lambda}_0 := \inf \left\{ \frac{\tilde{M}_0(meas(\Omega)\Phi(\delta))}{\int_{\Omega} F_0(x, \delta) dx}, \delta > 0, \int_{\Omega} F_0(x, \delta) dx > 0 \right\},$$

مسأله $(1, 1)$ حداقل دو جواب ضعیف در X دارد.

برهان. فرض کنید $\lambda_0 > \tilde{\lambda}_0$ باشد پس وجود دارد $\delta > 0$ به طوری که

$$\lambda_0 > \frac{\tilde{M}_0(meas(\Omega)\Phi(\delta))}{\int_{\Omega} F_0(x, \delta) dx}$$

از $(\Delta.4)$ وجود دارد $\gamma_1 > 0$ ، به طوری که

$$\gamma_1 < 2c \left(\frac{2\tilde{M}_0(meas(\Omega)\Phi(\delta))}{m_0} \right)^{\frac{1}{p^0}}$$

و وجود دارد γ_2 مثبت به طوری که

$$1 > \gamma_2 > 2c \left(\frac{2 \tilde{M}_0(\text{meas}(\Omega)\Phi(\delta))}{m_0} \right)^{\frac{1}{p^0}}$$

9

$$\max \left\{ \frac{K_{\gamma_1}}{\frac{m_0}{2} \left(\frac{\gamma_1}{2c} \right)^{p^0}}, \frac{K_{\gamma_2}}{\frac{m_0}{2} \left(\frac{\gamma_2}{2c} \right)^{p^0}} \right\} < \frac{1}{\lambda_0}.$$

پس با در نظر گرفتن شرط (F_1) از قضیه ۶ و

$$\lambda_0 \in \Lambda_* := \left(\frac{\tilde{M}_0(\text{meas}(\Omega)\Phi(\delta))}{\int_{\Omega} F_0(x, \delta) dx}, \frac{1}{\max \left\{ \frac{K_{\gamma_1}}{\frac{m_0}{2} \left(\frac{\gamma_1}{2c} \right)^{p^0}}, \frac{K_{\gamma_2}}{\frac{m_0}{2} \left(\frac{\gamma_2}{2c} \right)^{p^0}} \right\}} \right)$$

با به کارگیری قضیه ۶ مسأله $(1,1)$ حداقل دو جواب ضعیف w_{1,λ_0} و w_{2,λ_0} دارد که $\max_{x \in \Omega} |w_{1,\lambda_0}(x)| < \gamma_1$ و $\max_{x \in \Omega} |w_{2,\lambda_0}(x)| < \gamma_2$ بنابراین اثبات کامل است.

مثال ۲:

این مثال کاربردی از نتایج به دست آمده در حالت‌های متشابه است در حالت $M_0(z) = az + b$ $z \in [\alpha, \beta]$ برای $0 < \alpha < \beta$ ، a, b, α و β اعداد مثبت هستند. در حقیقت در حالت خاص داریم:

$$\tilde{M}_0(z) = \int_0^z (a\xi + b) d\xi = \frac{a}{2} z^2 + bz = \frac{(b+az)^2}{2a} - \frac{b^2}{2a}$$

برای هر $m_1 = b + \alpha\beta$ و $m_0 = b + a\alpha$ ، $z \in [\alpha, \beta]$ در حالت خاص $M_0 \equiv 1$ صدق می‌کنند. فرض کنید $p > N + 1$ و تابع

$$\varphi(z) := \begin{cases} \frac{|z|^{p-2}z}{\log(1+|z|)}; & z \neq 0, \\ 0; & z = 0 \end{cases}$$

که $p_0 = p - 1 < p^0 = p = \liminf_{z \rightarrow \infty} \frac{\log(\Phi(z))}{\log(z)}$ برای مسأله

$$\begin{cases} -\text{div} \left(\frac{|\nabla w|^{p-2}}{\log(1+|\nabla w|)} \nabla w \right) + \frac{|w|^{p-2}}{\log(1+|w|)} w = \lambda_0 f_0(x, w) & \text{in } \Omega \\ w = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

و برای $p > N$ تعریف می‌کنیم تابع $\varphi(z) := \log(1+|z|^r)|z|^{p-2}z$ ، $z \in \mathbb{R}$ ، $\gamma > 1$ که $p_0 = p$ ، $p^0 = p + \gamma$ ،

$$\begin{cases} -\text{div} (\log(1+|\nabla w|^r)|\nabla w|^{p-2} \nabla w) + \log(1+|w|^r)|w|^{p-2} = \lambda_0 f_0(x, w) & \text{in } \Omega \\ w = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases}$$

می‌توان وجود جواب یا جواب‌ها را بررسی کرد. اکنون قضایای ۶ و ۷ را با ارائه مثال‌های زیر توضیح می‌دهیم.

مثال ۳:

فرض کنید

$$M_0 \equiv 1, \Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

با انتخاب تابع f_0 مثل مثال ۱ به عبارت دیگر

$$f_0(x, z) = e^{|x|} [|z|^{\zeta-1} + |z|^{p_0-1}]$$

که در آن $1 < \zeta < p_0 - 1$ و فرض می‌کنیم که $p > 4$ ، تابع زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\varphi(z) = \begin{cases} 0; & z = 0, \\ \frac{|z|^{p-2}z}{\log(1+|z|)}; & z \neq 0, \end{cases}$$

که

$$p_0 = p - 1 < p^0 = p = \liminf_{z \rightarrow \infty} \frac{\log(\Phi(z))}{\log(z)}$$

فرض کنید وجود دارد γ_1, γ_2 و δ با

$$\gamma_1 < 2c \left(\frac{8\pi\Phi(\delta)}{3} \right)^{\frac{1}{p}} < \gamma_2 < 1$$

و $\sup_{|z| \leq \gamma_1} \left[\frac{z^\zeta}{\zeta} + \frac{z^{p_0}}{p_0} \right] = 0$ به طوری که:

$$\left[\frac{\delta^\zeta}{\zeta} + \frac{\delta^{p_0}}{p_0} \right] > \max \left\{ \frac{K_{\gamma_1}}{4\pi(e-1)}, \frac{2\Phi(\delta) \max \left\{ \frac{K_{\gamma_1}}{\left(\frac{\gamma_1}{2c} \right)^p}, \frac{K_{\gamma_2}}{\left(\frac{\gamma_2}{2c} \right)^p} \right\}}{3(e-1)} \right\},$$

که

$$K_{\gamma_i} := \frac{c^{p-1}}{p-1} e \left(\frac{\gamma_i}{2c} \right)^p + \frac{8c}{3} e^{p-1} \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{\gamma_i}{2c} \right)^p}$$

برای $i = 1, 2$ درحقیقت از آنجایی که $m_0 = 1$ و

$$meas(\Omega) = meas(B(x_0, 1)) = \frac{4}{3}\pi$$

با $x_0 = (0, 0, 0)$ داریم

$$\frac{2\tilde{M}_0(meas(\Omega)\Phi(\delta))}{m_0} = 2meas(\Omega)\Phi(\delta) = \frac{8}{3}\pi\Phi(\delta)$$

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} F_0(x, \delta) dx &= \left[\frac{\delta^\zeta}{\zeta} + \frac{\delta^{p_0}}{p_0} \right] \int_{x^2+y^2+z^2 \leq 1} e^{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} dx dy dz \\ &= \left[\frac{\delta^\zeta}{\zeta} + \frac{\delta^{p_0}}{p_0} \right] \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^1 e^\rho \sin(\varphi) d\rho d\varphi d\theta \\ &= 4\pi(e-1) \left[\frac{\delta^\zeta}{\zeta} + \frac{\delta^{p_0}}{p_0} \right]\end{aligned}$$

بنابراین فرض (F_1) در قضیه ۶ صدق می‌کند. از این رو برای هر

$$\lambda_0 \in \left(\frac{\Phi(\delta)}{3(e-1) \left[\frac{\delta^\zeta}{\zeta}, \frac{\delta^{p_0}}{p_0} \right]}, \frac{1}{2 \max \left\{ \frac{K_{\gamma_1}}{\left(\frac{\gamma_1}{2c} \right)^p}, \frac{K_{\gamma_2}}{\left(\frac{\gamma_2}{2c} \right)^p} \right\}} \right)$$

مسئله زیر

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left(\frac{|\nabla w|^{p-2}}{\log(1+|\nabla w|)} \nabla w \right) + \frac{|w|^{p-2}}{\log(1+|w|)} w = \lambda_0 f_0(x, w) & \text{in } \Omega \\ w = 0 & \text{on } \partial\Omega \end{cases} \quad (۶.۴)$$

دارای حداقل دو جواب ضعیف w_{1,λ_0} و w_{2,λ_0} به طوری که $\max_{x \in \Omega} |w_{1,\lambda_0}(x)| < \gamma_1$ و $\max_{x \in \Omega} |w_{2,\lambda_0}(x)| < \gamma_2$ می‌باشد.

مثال ۴:

به عنوان مثالی از کاربرد قضیه ۷ مسئله (۶.۴) را در نظر می‌گیریم با انتخاب

$$f_0(x, \xi) = \frac{e^{|\xi|} |\xi|^3}{(1+|\xi|)(1+|\xi|^3)}$$

و ثابت $p = 6$ برای هر $(x, \xi) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R}$ به وضوح

$$\lim_{\xi \rightarrow 0^+} \left(\sup_{x \in \bar{\Omega}} f_0(x, \xi) \right) = \lim_{\xi \rightarrow +\infty} \left(\sup_{x \in \bar{\Omega}} f_0(x, \xi) \right) = 0$$

می‌باشد بنابراین با در نظر گرفتن شرط (f_∞) و با انتخاب $\rho = e, q = 3$ و $k_0 \equiv \epsilon$ برای هر $\epsilon > 0$ تمام فرض‌های قضیه ۷ صدق می‌کند. با محاسباتی ساده

$$\tilde{M}_0(\operatorname{meas}(\Omega)\Phi(\delta)) = \frac{4}{3}\pi\Phi(\delta), F_0(x, \delta) = e^{|x|} \int_0^\delta \frac{s^3}{(1+s)(1+s^3)} ds = M_\delta e^{|x|}$$

و $\int_{\Omega} F_0(x, \delta) dx = 4\pi(e-1)M_\delta$ بدست می‌آیند بنابراین برای هر $\lambda_0 > \frac{\Phi(\delta)}{3(e-1)M_\delta}$ که در آن

$$\begin{aligned}M_\delta &:= \ln(1+\delta) + \frac{-\delta}{3(1+\delta)} + \frac{1}{6} \ln(\delta^2 - \delta + 1) \\ &\quad - \frac{\sqrt{3}}{3} \tan^{-1} \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}(\delta - 1) \right) - \frac{\sqrt{3}}{3} \tan^{-1} \left(\frac{2\sqrt{3}}{3} \right),\end{aligned}$$

مسئله زیر

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \left(\frac{|\nabla w|^4}{\log(1+|\nabla w|)} \nabla w \right) + \frac{|w|^4}{\log(1+|w|)} w = \lambda_0 \frac{e^{|x|} |w|^3}{(1+|w|)(1+|w|^3)} & \text{in } \Omega, \\ w = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

دارای حداقل دو جواب ضعیف مثبت در X است.

تذکره ۵:

جواب‌های بدست آمده در قضیه ۷ برای مسأله (۱,۱) متفاوت از جواب‌های بدست آمده در قضیه ۳ و نیز در [۳] ، قضیه ۱,۸ [۵] ، قضیه ۱,۱ [۱] می باشد. در حقیقت تابع f_0 در [۳] ، قضیه ۱,۸ [۵] و [۵] ، قضیه ۱,۱ در

$$\lim_{\xi \rightarrow 0^+} \left(\sup_{x \in \bar{\Omega}} f_0(x, \xi) \right) = +\infty$$

صدق می کند در صورتی که در قضیه ۷ و به ویژه در مثال ۴ داریم:

$$\lim_{\xi \rightarrow 0^+} \left(\sup_{x \in \bar{\Omega}} f_0(x, \xi) \right) = \lim_{\xi \rightarrow 0^+} \frac{e |\xi|^3}{(1 + |\xi|)(1 + |\xi|^3)} = 0.$$

۶- نتیجه گیری و پیشنهادات

در این مقاله وجود حداقل یک و دو جواب ضعیف را برای مسأله (۱,۱) که از نوع کیرشهف با شرط مرزی دیریکله در فضای اریلیس- سوبولف می باشد را نشان دادیم. روش بکار رفته بر اساس قضایای نقطه بحرانی بونانو و روش های تغییراتی می باشد.

- [1]. R.A. Adams, *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.
- [2]. G.A. Afrouzi, S. Heidarkhani, S. Shokoooh, *Infinitely many solutions for Steklov problems associated to nonhomogeneous differential operators through Orlicz-Sobolev spaces*, Complex Var. Elliptic Equ. **60** (2015), 1505-1521.
- [3]. G. Bonanno, *A critical point theorem via the Ekeland variational principle*, Nonlinear Anal. **75** (2012), 2992-3007.
- [4]. G. Bonanno, *Multiple critical points theorems without the Palais-Smale condition*, J. Math. Anal. Appl. **299** (2004), 600-614.
- [5]. G. Bonanno, G. D'Agui, *Critical nonlinearities for Elliptic Dirichlet problems*, Dynam. Systems Appl. **22** (2013), 411-418.
- [6]. G. Bonanno, G. Molica Bisci, V. Rădulescu, *Arbitrarily small weak solutions for a nonlinear eigenvalue problem in Orlicz-Sobolev spaces*, Monatsh. Math. **165** (2012), 305-318.
- [7]. G. Bonanno, G. Molica Bisci, V. Rădulescu, *Existence of three solutions for a non-homogeneous Neumann problem through Orlicz-Sobolev spaces*, Nonlinear Anal. Anal. TMA **18** (2011), 4785-4795.
- [8]. G. Bonanno, G. Molica Bisci, V. Rădulescu, *Infinitely many solutions for a class of nonlinear eigenvalue problem in Orlicz-Sobolev spaces*, C. R. Acad. Sci. Paris **349**(I) (2011), 263-268.
- [9]. F. Cammaroto, L. Vilasi, *Multiple solutions for a non-homogeneous Dirichlet problem in Orlicz Sobolev spaces*, Appl. Math. Comput. **218** (2012), 11518-11527.
- [10]. N.T. Chung, *Three solutions for a class of nonlocal problems in Orlicz-Sobolev spaces*, J. Korean Math. Soc. **250**(6) (2013), 1257-1269.
- [11]. Ph. Clément, B. de Pagter, G. Sweers, F. de Thélin, *Existence of solutions to a semilinear elliptic system through Orlicz-Sobolev spaces*, Mediterr. J. Math. **1** (2004), 241-267.
- [12]. Ph. Clément, M. García-Huidobro, R. Manásevich, K. Schmitt, *Mountain pass type solutions for quasilinear elliptic equations*, Calc. Var. Partial Differential Equations **11** (2000), 33-62.
- [13]. G. Dankert, *Sobolev embedding theorems in Orlicz spaces (Ph.D. thesis)*, University of Köln, 1966.
- [14]. N. Halidias, V.K. Le, *Multiple solutions for quasilinear elliptic Neumann problems in Orlicz-Sobolev spaces*, Bound. Value Probl. **3** (2005), 299-306.
- [15]. S. Heidarkhani, A. Salari, G. Caristi, D. Barilla, *Perturbed nonlocal fourth order equations of Kirchhoff type with Navier boundary conditions*, Boundary Value Problems 2017, No. **1** (2017): 1-20.
- [16]. S. Heidarkhani, G. Caristi, M. Ferrara, *Perturbed Kirchhoff-type Neumann problems in Orlicz-Sobolev spaces*, Comp. Math. Appl. **71** (2016), 2008-2019.

- [17]. S. Heidarkhani, M. Ferrara, G. Caristi, *Multiple solutions for perturbed Kirchhoff-type non-homogeneous Neumann problems through Orlicz-Sobolev spaces*, Elec. J. Dif. Aqu. 2018, No.43, (2018), 1-22.
- [18]. V.K. Le, *On a sub-supersolution method for variational inequalities with Leray-Lions operators in variable exponent spaces*, Nonlinear Anal. **71** (2009), 3305-3321.
- [19]. M. Mihăilescu, V. Rădulescu, *Existence and multiplicity of solutions for quasilinear nonhomogeneous problems: an Orlicz-Sobolev space setting*, J. Math. Anal. Appl. **330** (2007), 416-432.
- [20]. M. Mihăilescu, V. Rădulescu, *Neumann problems associated to non-homogeneous differential operators in OrliczSobolev spaces*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **6** (2008), 2087-2111.
- [21]. M. Mihăilescu, V. Rădulescu, *Existence and multiplicity of solutions for quasilinear nonhomogeneous problems: an Orlicz-Sobolev space setting*, J. Math. Anal. Appl. **330** (2007), 416-432.
- [22]. M. Mihăilescu, V. Rădulescu, *Neumann problems associated to non-homogeneous differential operators in OrliczSobolev spaces*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **6** (2008), 2087-2111.