دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال دهم، شماره پنجاه و دوم، بهمن و اسفند ۱۴۰۳
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

بهینه‌سازی معکوس برای مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی با متغیرهای تصمیم کراندار

علی حمزه‌ای

گروه ریاضی کاربردی (تحقیق در عملیات)، واحد کرمان، دانشگاه آزاد اسلامی، کرمان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۱/۰۷/۱۲   تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۱۱/۰۱

چکیده

بهینه‌سازی معکوس یکی از مطالعات نوین در مباحث تحقیق در عملیات است که در سه دهه اخیر مورد توجه محققان قرار گرفته است. در واقع، هدف بهینه‌سازی معکوس تعدیل مقادیر پارامتری از یک مسئله برنامه‌ریزی ریاضی است، تا یک نقطه شدنی مفروض از آن مسئله به بهینگی برسد. اگر این امر امکان‌پذیر باشد، آنگاه باید مقادیر پارامتری که نیازمند کمترین تعدیل هستند، را پیدا نمود. در این مقاله، شاخه‌ای از بهینه‌سازی معکوس برای مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی با متغیرهای تصمیم کراندار مورد بررسی قرار می‌گیرد که کاربردهای وسیعی در حیطه صنعت با هدف بهینه کردن تولید دارند. برای انجام این کار، از روابط دوگانگی و شرایط مکمل زائد مسائل برنامه‌ریزی خطی استفاده می‌گردد. سپس، شرایطی که یک جواب شدنی، توانایی بهینه‌شدن توسط تعدیل مقادیر پارامتری تابع هدف را داشته باشد، بیان و مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد. سرانجام، یک مثال عددی از روش پیشنهادی با تحلیل کامل ارائه می‌گردد.

واژه‌های کلیدی: بهینه‌سازی معکوس، برنامه‌ریزی کسری خطی، شرایط مکمل زائد، متغیرهای کراندار.

عهده‌دار مکاتبات: Email: hamzehee_ali@yahoo.com

۱- مقدمه

در سال‌های اخیر مطالعه بر روی مسائل بهینه‌سازی معکوس، انواع آن و کاربردهایی از این دسته مسائل مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است. برای بیان این نوع مسائل، فرض کنید $\min F(x,c)$ برای $x\in\chi$ یک مساله بهینه‌سازی باشد، به‌طوری که χ ناحیه شدنی و c بردار پارامتری نشان‌دهنده هزینه در تابع هدف مسأله است. چنانچه مشخص است در مسائل بهینه‌سازی عمومی یا متداول، یا به‌عبارتی بهینه‌سازی مستقیم، هدف یافتن مقدار $x^*\in\chi$ است به‌طوری که تابع هدف $F(x,c)$ در x^* مقدار بهینه (کمترین مقدار) را داشته باشد. در حالی که مسأله بهینه‌سازی معکوس را می‌توان بدین صورت بیان نمود: فرض کنید $x^o\in\chi$ یک نقطه دلخواه از ناحیه شدنی صادق در قیود مسأله بهینه‌سازی باشد و بردار c تخمینی برای مقادیر ضرایب یا پارامترهای تابع هدف مسأله است، منظور از بیان و حل مسأله بهینه‌سازی معکوس، یافتن بردار پارامتری مانند $\tilde{c}$ است که کمترین فاصله را با بردار c داشته باشد و با این بردار $\tilde{c}$ مساله $\min F(x,\tilde{c})$ برای $x\in\chi$ مقدار بهینه x^o را به خود اختصاص دهد.

بارتون و توینت [۲،۱] اولین محققان و طراحان بیان و حل و بررسی مسائل بهینه‌سازی معکوس در سال ۱۹۹۲ بودند. در ابتدا آنها بر روی مسائل مربوط به کوتاه‌ترین مسیر معکوس کار کردند و سپس انواع مسائل بهینه‌سازی معکوس گسسته و پیوسته را مورد مطالعه قرار دادند. سپس ژانگ و همکاران [۳] با استفاده از روش تولید ستون، مسائل کوتاه‌ترین مسیر معکوس را مطرح و بررسی کردند. ژانگ و همکاران [۴] و سکالینگام و همکاران [۵] مسائل مینیمم‌سازی معکوس درخت فراگیر را مورد تجزیه و تحلیل قرار دادند. همچنین ژانگ و لیو [۷،۶] بر روی مسائل برنامه‌ریزی‌خطی معکوس کار کردند. مسائل ماکزیمم جریان و مینیمم برش معکوس توسط یانگ و همکاران [۸] ارائه گردید و پس از آن ژانگ و کای [۹] طی تحقیقی دیگر مجدداً مسأله معکوس مینیمم برش را مورد مطالعه قرار دادند. آهوجا و اورلین [۱۰]، یک روش کلی برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی معکوس ارائه و سپس کاربردهایی برای تعداد خاصی از این دسته مسائل مطرح کردند. همچنین آنها الگوریتم ترکیبیاتی برای مسائل جریان شبکه‌ای را پیشنهاد دادند [۱۱].

در حوزه تحلیل پوششی داده‌ها نیز در زمینه بهینه‌سازی معکوس، مطالعات و تحقیقات متعددی صورت گرفته است. بعنوان نمونه، امین و امروزی‌نژاد [12] مساله برنامه‌ریزی خطی معکوس را در تحلیل پوششی داده‌ها به کار بردند و روشی کارا در تحلیل پوششی داده‌ها و مدل جمعی پیشنهاد کردند. همچنین، صدری و همکاران [13] مسئله برنامه‌ریزی خطی معکوس را در کارایی هزینه به کار گرفتند و مقادیر مناسب را جهت کارایی هزینه محاسبه نمودند. اخیراً، صدری و رستمی مال‌خلیفه [14] یک مدل برنامه‌ریزی خطی معکوس در تحلیل پوششی داده‌ها جهت به‌کارگیری آن در محاسبه کارایی درآمد معرفی کرده‌اند.

در سال‌های اخیر تعدادی از محققان، بهینه‌سازی معکوس برای قالب‌های مختلف از مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی را با کمک شرایط بهینگی KKT مورد مطالعه قرار داده‌اند. به‌عنوان مثال، ژانگ و لیو [15] یک کلاس از بهینه‌سازی معکوس مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی درجه دوم را مورد بحث و بررسی قرار دادند. ژانگ و ژو [16] بهینه‌سازی معکوس برای مسائل برنامه‌ریزی محدب جدایی پذیر با قیود خطی را بیان و تحلیل نموده‌اند. در مسائل برنامه‌ریزی کسری خطی، هلادیک [17] پس از ارائه یک روش کارا برای بررسی مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی کلی با داده‌های غیرقطعی بازه‌ای، برای اولین بار بحث بهینه‌سازی معکوس برای این مسئله را مورد بررسی قرار داد. جاین و آریا [18,19] در دو کار متفاوت با کمک تبدیلات مختلف، روش‌هایی برای حل مسئله معکوس برنامه‌ریزی کسری خطی مطرح کردند.

در این تحقیق، هدف تعمیم و حل و بررسی مسئله بهینه‌سازی معکوس برنامه‌ریزی کسری خطی شامل متغیرهای تصمیم کراندار است. در ادامه، در بخش دوم مفاهیم اولیه شامل مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی و جزئیات حل آن و شرایط مکمل زائد برای حل مسائل برنامه ریزی خطی بیان می‌گردد. بخش سوم، شامل بیان مدل برنامه‌ریزی کسری خطی با متغیرهای تصمیم کراندار و روش پیشنهادی برای بهینه‌سازی معکوس آن مدل است. در بخش‌های چهارم و پنجم، یک مثال عددی از رویکرد پیشنهادی و بحث و نتیجه‌گیری کلی ارائه خواهد گردید.

۲- مفاهیم مقدماتی و پیش‌زمینه‌ها

در این بخش، ابتدا مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی و جزئیات حل آن و سپس شرایط مکمل زائد برای حل مسائل برنامه‌ریزی خطی اولیه و دوگان یادآوری می‌گردند.

۲-۱- برنامه‌ریزی کسری خطی و روند حل آن

برنامه‌ریزی کسری خطی یک مدل مهم و قوی برای فرموله‌کردن طیف وسیعی از مسائل بهینه‌سازی است. این مسئله به‌عنوان یکی از فنون تحقیق در عملیات، یک ابزار مهم برنامه‌ریزی است که در زمینه‌های گوناگونی مثل تخصیص منابع، حمل و نقل، برنامه‌ریزی تولید، ارزیابی عملکرد، مالی و غیره به‌کار گرفته شده است. در مسائلی که هدف حداکثرکردن نسبت دو کمیت مثل سود به سرمایه یا به‌طور کلی هدف بهینه‌کردن تولید باشد، برنامه‌ریزی کسری کاربرد قابل توجهی دارد. به‌عنوان مثال، اگر g(x) سود خالص و h(x) مجموع ساعات کاری مورد نیاز برای انجام یک کار تولیدی باشد، برای هر جواب شدنی مانند x تابع $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ خالص سود برگشتی هر ساعت کاری است. بنابراین، مسئله ماکزیمم کردن f(x) تحت شرط خطی بودن g(x) و h(x) و یکسری قیود خطی یک مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی خواهد بود.

بدون کاستن از کلیت، مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی شامل n متغیر و m محدودیت به حالت کوچکترمساوی خطی و متغیرهای نامنفی را با مدل (۱) به شکل زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} & max\ \ \frac{\alpha+cx}{\beta+dx} \\ & s.t. \\ & Ax\le b \\ & \ \ x\ge 0 \end{aligned} \qquad (1)$$

که در آن α و β اعداد حقیقی و c وd بردارهای سطری در R^n و A یک ماتریس m×n و b یک بردار ستونی در R^n و $x\in R^n$ بردار ستونی متغیرهای تصمیم است.

برای حل و بررسی مدل (۱)، ابتدا فرض کنید $g(x)=\alpha+cx$ و $h(x)=\beta+dx$ و $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$ باشد و ناحیه شدنی مدل (۱) به صورت $S=\{x\colon Ax\le b\ ,x\ge 0\}$ بیان شود. اولاً، فرض کنید که $S\neq\emptyset$ و ثانیاً، $h(x)\neq 0$، چون در غیر این‌صورت مدل خوش‌تعریف نیست. یک روش حل مدل (۱) استفاده از تغییر متغیر چارنز و کوپر [20] است، که هر مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی با یک ناحیه شدنی کراندار را می توان به یک مسئله برنامه‌ریزی خطی تبدیل نمود. در ضمن به‌کارگیری این روش بستگی به این دارد که آیا h(x) روی S دقیقاً مثبت است یا دقیقاً منفی. حالات زیر در نظر گرفته می‌شود:

حالت ۱:

فرض کنید : $\forall x \in S: \square(x) > 0$، (به‌عنوان مثال حالتی که: $\beta > 0 , d \geq 0$)، آنگاه روش تغییر متغیر چارنز-کوپر با تعریف متغیر $t = \frac{1}{\beta + dx}$ انجام می‌گردد و مدل (۱) به مسئله برنامه‌ریزی خطی به فرم (۲) تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} & max \quad cy + \alpha t \\ & s.t. \\ & \qquad Ay - bt \leq 0 \qquad\qquad (2) \\ & \qquad dy + \beta t = 1 \\ & \qquad y, t \geq 0 \end{aligned}$$

که در آن y=xt برای مقادیر نامنفی t در نظر گرفته شده است.

قضیه بعد جزئیات کامل در خصوص ارتباط بین جواب‌های شدنی و بهینه مدل‌های برنامه‌ریزی کسری (۱) و برنامه‌ریزی خطی (۲) را تحت کراندار بودن یا بی‌کرانی ناحیه شدنی S بیان می‌دارد.

قضیه ۱:[21] **الف**) اگر مجموعه S کراندار باشد و همچنین $\forall x \in S: \square(x) > 0$. آنگاه نتایج زیر قابل حصول است:

a) اگر (y, t) جواب شدنی مدل (۲) باشد آنگاه $t>0$، یعنی t اکیداً مثبت است.

b) مدل (۱) جواب شدنی دارد اگر و تنها اگر مدل (۲) جواب شدنی داشته باشد.

c) اگر $\tilde{x}$ جواب شدنی بهینه (۱) باشد، آنگاه با فرض $\tilde{t} = \frac{1}{d\tilde{x}+\beta}$ و $\tilde{y} = \tilde{t}\tilde{x}$، نقطه $(\tilde{y}, \tilde{t})$ یک جواب شدنی بهینه (۲) خواهد بود.

d) اگر $(\tilde{y}, \tilde{t})$ یک جواب شدنی بهینه (۲) باشد، آنگاه $\tilde{x} = \frac{1}{\tilde{t}}\tilde{y}$ یک جواب شدنی بهینه (۱) است.

ب) اگر مجموعه S بیکران و $\forall x \in S: h(x) > 0$ باشد، آنگاه نتایج زیر به‌دست خواهد آمد:

e) اگر مدل (۲) بیکران باشد، آنگاه تابع هدف f(x) نیز روی S بیکران است.

f) اگر مدل (۱) یک جواب شدنی بهینه متناهی مانند $\bar{x}$ داشته باشد، آنگاه با فرض $\bar{t} = \frac{1}{d\bar{x}+\beta}$ و $\bar{y} = \bar{t}\bar{x}$ نقطه $(\bar{y}, \bar{t})$ یک جواب شدنی بهینه (۲) است و برعکس اگر $(\bar{y}, \bar{t})$ جواب شدنی بهینه (۲) با شرط $\bar{t} > 0$ باشد، آنگاه $\bar{x} = \frac{1}{\bar{t}}\bar{y}$ جواب شدنی بهینه (۱) خواهد بود.

g) فرض کنید $\gamma = inf\ \{f(x): x \in S\}$، اگر γ متناهی باشد، آنگاه (۲) جواب شدنی دارد و γ مقدار بهینه آن است. همچنین اگر هر جواب شدنی بهینه مانند (y, t) از (۲) در شرط t=0 صدق کند، آنگاه مدل (۱) جواب شدنی متناهی ندارد.

حالت ۲:

فرض کنید بتوان به‌طور مستقیم از روی داده‌ها تعیین کرد که: $\forall x \in S: \square(x) < 0$، (به‌عنوان مثال حالتی که: $\beta < 0 , d \leq 0$)، آنگاه تنها با تغییر مدل (۲) به فرم زیر، تمام نتایج قضیه ۱ عیناً برقرار خواهند بود:

$$\begin{aligned} & max \quad cy + \alpha t \\ & s.t. \\ & \qquad Ay - bt \leq 0 \\ & \qquad dy + \beta t = -1 \\ & \qquad y, t \geq 0 \end{aligned}$$

مثال ۱: مسئله برنامه ریزی کسری خطی زیر را حل کنید:

$$\begin{aligned} &max \;\; Q(x) = \frac{8x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 4}{2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 7} \\ &s.t. \\ &\qquad x_1 + x_2 + 2x_3 \le 3 \\ &\qquad 2x_1 + x_2 + 4x_3 \le 4 \\ &\qquad 5x_1 + 3x_2 + x_3 \le 15 \\ &\qquad x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{aligned}$$

با استفاده از تبدیلات چارنز-کوپر مسئله برنامه‌ریزی کسری فوق به مسئله خطی زیر تبدیل می‌شود:

$$\begin{aligned} &max \;\; P(t) = 8t_1 + 9t_2 + 4t_3 + 4t_0 \\ &s.t. \\ &\qquad t_1 + t_2 + 2t_3 - 3t_0 \le 0 \\ &\qquad 2t_1 + t_2 + 4t_3 - 4t_0 \le 0 \\ &\qquad 5t_1 + 3t_2 + t_3 - 15t_0 \le 0 \\ &\qquad 2t_1 + 3t_2 + 2t_3 + 7t_0 = 1 \\ &\qquad t_1, t_2, t_3, t_0 \ge 0 \end{aligned}$$

با حل مسئله برنامه‌ریزی خطی اخیر به روش سیمپلکس جواب بهینه به‌صورت زیر خواهد بود:

$P(t^*) = 2$ و $t^* = (t_0, t_1, t_2, t_3) = (\frac{1}{15}, \frac{1}{15}, \frac{2}{15}, 0)$

بنابراین مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی دارای جواب بهینه زیر است:

$$x^* = (\frac{t_1}{t_0}, \frac{t_2}{t_0}, \frac{t_3}{t_0}) = (x_1, x_2, x_3) = (1,2,0)$$

و همچنین $Q(x^*) = P(t^*) = 2$.

۲-۲- شرایط مکمل زائد برای مدل‌های برنامه‌ریزی خطی

مسائل برنامه‌ریزی خطی اولیه (P) و دوگان آن (D) زیر را به فرم متعارفی در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &max \;\; cx \\ &s.t. \\ &\qquad Ax \le b \qquad\qquad (P) \\ &\qquad x \ge 0 \end{aligned}$$

و دوگان آن،

$$\begin{aligned} &min \;\; wb \\ &s.t. \\ &\qquad wA \ge c \qquad\qquad (D) \\ &\qquad w \ge 0 \end{aligned}$$

به‌طوریکه در دو مسئله اخیر $x, c \epsilon R^n$ و $b, w \epsilon R^m$ و همچنین A یک ماتریس m×n است. آنگاه قضیه مکمل زائد به شرح ذیل است:

قضیه ۲:[22] فرض کنید x^* و w^* به‌ترتیب جواب‌های شدنی دلخواه (P) و (D) باشند، آنگاه این دو جواب برای دو مسئله مذکور بهینه‌اند اگر و تنها اگر:

$$\begin{cases} (w^* a_j - c_j)x_j^* = 0, & j = 1, \dots, n \\ w_i^*(b_i - a^i x^*) = 0, & i = 1, \dots, m \end{cases}$$

که در آن a_j ستون jام و a^i سطر iام ماتریس A هستند.

این قضیه بسیار مهم، مسائل اولیه و دوگان را به هم مرتبط می‌سازد. شرایط مکمل زائد منتج از قضیه قبل برای هر اندیس i و j، به صورت زیر خلاصه می‌شوند:

$$\begin{cases} x_j^* > 0 \Rightarrow w^* a_j = c_j \\ w^* a_j > c_j \Rightarrow x_j^* = 0 \\ w_i^* > 0 \Rightarrow a^i x^* = b_i \\ a^i x^* < b_i \Rightarrow w_i^* = 0 \end{cases}$$

۳- مدل‌بندی مسائل بهینه‌سازی معکوس برای برنامه‌ریزی کسری خطی با متغیرهای تصمیم کراندار

در این بخش ابتدا مدل کلی مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی با متغیرهای تصممیم کراندار بیان می‌گردد. سپس به بحث بهینه‌سازی معکوس آن پرداخته خواهد شد.

۳-۱- بیان مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی با متغیرهای تصمیم کراندار

در بیشتر مسائل عملی بهینه‌سازی معمولاً متغیرهای تصممیم‌گیری کراندار هستند. لذا به‌کارگیری روش حل مناسب برای این مسائل حائز اهمیت است. جهت بیان فرم کلی مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی با متغیرهای تصمیم کراندار، فرض کنید این مسئله دارای n متغیر تصمیم‌گیری x_j با مجموعه اندیس گذار $I = \{1, 2, \dots, n\}$ و m قید اصلی (به جز قیود کرانداری) با مجموعه اندیس‌گذار $J = \{1, 2, \dots, m\}$ باشد، آنگاه بدون کاستن از کلیت مدل مسئله به فرم (۳) به شرح ذیل در نظر گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} Z = Max \ & \frac{\sum_{j\epsilon J} c_j x_j + c_0}{\sum_{j\epsilon J} d_j x_j + d_0} \\ s.t. \ & \\ & \sum_{j\epsilon J} a_{ij}\, x_j \le b_i, \quad \forall\, i\epsilon I \qquad (3) \\ & l_j \le x_j \le u_j, \quad \forall\, j\epsilon J \end{aligned}$$

که در آن l_j و u_j به‌ترتیب کران‌های متناهی پایین و بالای متغیر x_j هستند.

۳-۲- خطی‌سازی مسئله برنامه‌ریزی کسری

بر اساس مطالب مطرح شده در بخش قبل در خصوص مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی، فرض کنید مخرج کسر تابع هدف مدل (۳) مثبت، ناحیه شدنی آن کراندار و تابع هدف نیز به‌طور پیوسته مشتقپذیر باشد. آنگاه با تغییر متغیر چارنز-کوپر مدل (۳) به مدل برنامه ریزی خطی (۴) تبدیل خواهد شد. این تغییر متغیر برابر است با:

$$\forall j,\ t_j = x_j t_0 \ \text{و}\ t_0 = \frac{1}{\sum_{j\epsilon J} d_j x_j + d_0}.$$

لذا با تغییر متغیر یادشده و تبدیل مجموعه قیود کراندار بصورت $x_j - u_j \le 0$ و $-x_j + l_j \le 0$ برای هر j، مدل خطی شده (۴) به شرح ذیل به‌دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} K = Max \ & \sum_{j\epsilon J} c_j t_j + c_0\, t_0 \qquad (4) \\ s.t. \ & \\ & \sum_{j\epsilon J} a_{ij}\, t_j - b_i t_0 \le 0, \quad \forall\, i\epsilon I \\ & \sum_{j\epsilon J} d_j t_j + d_0\, t_0 = 1, \\ & -t_j + l_j t_0 \le 0, \quad \forall\, j\epsilon J \\ & t_j - u_j t_0 \le 0, \quad \forall\, j\epsilon J \\ & t_0 \ge 0. \end{aligned}$$

البته توجه کنید اگر مخرج کسر تابع هدف مدل (۳) منفی هم باشد، طبق حالت ۲ مطرح‌شده در بخش ۱-۲، باز با همان تغییر متغیر مربوط یک مدل خطی مشابه مدل (۴) حاصل خواهد شد، که تنها تفاوت آن با (۴) وجود عدد ۱- در سمت راست قید دوم است.

اکنون مسئله دوگان مدل خطی (۴) معرفی می‌گردد. به این نحو که متغیرهای دوگان متناظر مجموعه قیود اول برابر y_i و برای تک قید دوم متغیر دوگان w و برای دسته قیود سوم و چهارم به‌ترتیب متغیرهای دوگان λ_j و μ_j در نظر گرفته می‌شوند. آنگاه دوگان مدل خطی (۴) بصورت (۵) به فرم زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} & Min \quad w \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (5) \\ & s.t. \\ & \sum_{i\epsilon I} a_{ij}\, y_i + d_j w - \lambda_j + \mu_j = c_j, \quad \forall\, j\epsilon J \\ & -\sum_{i\epsilon I} b_i\, y_i + d_0 w + \sum_{j\epsilon J} l_j\ \lambda_j - \sum_{j\epsilon J} u_j\, \mu_j \geq c_0 \\ & y_i \geq 0\,, \quad \forall\, i\epsilon I \\ & \lambda_j, \mu_j \geq 0\,, \quad \forall\, j\epsilon J\,. \end{aligned}$$

نکته ۱: طبق قضیه ۱ اگر مسائل (۳) و(۴) جواب شدنی بهینه متناهی داشته باشند و Z^* و K^* به‌ترتیب مقادیر بهینه آن مسائل باشند، آنگاه $Z^* = K^*$. همچنین طبق قضیه قوی دوگانگی اگر w^* هم مقدار بهینه مدل (۵) باشد، آنگاه $w^* = K^*$ و در نتیجه در صورت وجود جواب بهینه متناهی، مقدار بهینه سه مدل برابر است.

در ادامه برای ساختن مسئله بهینه‌سازی معکوس مدنظر از شرایط مکمل زائد بین دو مسئله اولیه و دوگان استفاده می‌گردد. فرض کنید (t_0, t) و (y, λ, μ, w) به‌ترتیب بردار جواب‌های شدنی مسائل خطی اولیه و دوگان (۴) و (۵) باشند، آنگاه طبق شرایط مکمل زائد منتج از قضیه ۲، این جواب‌ها برای دو مسئله بهینه‌اند اگر وتنها اگر در شرایط (۶) صدق کنند:

$$\begin{cases} \begin{cases} \sum_{j\epsilon J} a_{ij}\, t_j - b_i t_0 < 0 \Rightarrow \ y_i = 0 \\ \text{یا} \ \ y_i > 0 \Rightarrow \sum_{j\epsilon J} a_{ij}\, t_j - b_i t_0 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} t_j > l_j t_0 \ \Rightarrow \lambda_j = 0 \\ \text{یا} \ \ \lambda_j > 0 \Rightarrow \ t_j = l_j t_0 \end{cases} \qquad\qquad (6) \\ \begin{cases} t_j < u_j t_0 \Rightarrow \ \mu_j = 0 \\ \text{یا} \ \ \mu_j > 0 \Rightarrow \ t_j = u_j t_0 \end{cases} \end{cases}$$

۳-۳- تعدیل ضرایب مدل برای تعیین مسئله بهینه‌سازی معکوس

فرض کنید $\bar{x}$ یک جواب شدنی از مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی با متغیرهای تصمیم کراندار (۳) و متناظر آن $(\bar{t}_0, \bar{t})$ جواب شدنی مدل (۴) باشد. آنگاه ابتدا مجموعه‌های اندیس‌گذار زیر بر اساس این جواب‌های شدنی و شرایط مکمل زائد (۶) تعریف می‌شوند:

$$\begin{cases} B = \left\{i\epsilon I \middle| \sum_{j\epsilon J} a_{ij}\, \bar{t}_j - b_i \bar{t}_0 = 0\right\} \\ L = \left\{j\epsilon J \middle| \bar{t}_j = l_j \bar{t}_0\right\} \\ U = \left\{j\epsilon J \middle| \bar{t}_j = u_j \bar{t}_0\right\} \qquad\qquad (7) \\ F = \left\{j\epsilon J \middle| l_j \bar{t}_0 < \bar{t}_j < u_j \bar{t}_0\right\} \end{cases}$$

بنابراین با توجه به مجموعه‌های اندیس‌گذار (7) شرایط مکمل زائد (۶) به‌صورت (۸) بازنویسی و خلاصه می‌گردند:

$$\begin{cases} y_i = 0 & \forall \mathrm{i} \notin \mathrm{B} \\ \lambda_j = 0 & \forall \mathrm{j} \notin \mathrm{L} \\ \mu_j = 0 & \forall \mathrm{j} \notin \mathrm{U} \end{cases} \tag{8}$$

حال، برای تبدیل‌کردن جواب شدنی $\bar{x}$ به‌عنوان جوابی بهینه از مدل (۳) یا به‌طور معادل برای اینکه $(\bar{t}_0, \bar{t})$ به‌عنوان جواب بهینه مدل (۴) تبدیل شود، فرض کنید در تابع هدف مدل (3) ضرایب (c_0, c) به $(\tilde{c}_0, \tilde{c})$ و ضرایب (d_0, d) به $(\tilde{d}_0, \tilde{d})$ تعدیل شوند. آنگاه $(\bar{t}_0, \bar{t})$ جواب بهینه (۴) خواهد بود اگر و تنها اگر جواب شدنی (y, λ, μ, w) برای مدل (۵) موجود باشد، به‌طوریکه با جایگزینی یا تعدیل‌های انجام‌شده، هر دو مسئله (۴) و (۵) همزمان در شرایط مکمل زائد (۸) نیز صدق کنند. به‌عبارت دیگر، از ترکیب حالات مطرح‌شده، باید تمام شرایط (۹) برقرار گردند:

$$\begin{cases} \sum_{i \epsilon B} a_{ij}\, y_i + \tilde{d}_j w - \lambda_j = \tilde{c}_j\,, & \forall\, j \epsilon L \\ \sum_{i \epsilon B} a_{ij}\, y_i + \tilde{d}_j w + \mu_j = \tilde{c}_j\,, & \forall\, j \epsilon U \\ \sum_{i \epsilon B} a_{ij}\, y_i + \tilde{d}_j w = \tilde{c}_j\,, & \forall\, j \epsilon F \\ -\sum_{i \epsilon B} b_i\, y_i + \tilde{d}_0 w + \sum_{j \epsilon L} l_j\ \lambda_j - \sum_{j \epsilon U} u_j\, \mu_j \geq \tilde{c}_0 & \\ y_i \geq 0\ \ \forall \mathrm{i} \in \mathrm{B}\ \text{ و }\ \lambda_j \geq 0\ \ \forall \mathrm{j} \in \mathrm{L}\ \text{ و }\ \mu_j \geq 0\ \ \forall \mathrm{j} \in \mathrm{U}\,. & \end{cases} \tag{9}$$

لذا با فرض $\tilde{C} = (\tilde{c}_0, \tilde{c})$ و $\widetilde{D} = (\tilde{d}_0, \tilde{d})$ و همچنین $\|e - \mathrm{f}\|_{\mathrm{p}} = \sqrt[p]{\sum_{\mathrm{j} \in \mathrm{J}} |\,\mathrm{e_j} - \mathrm{f_j}\,|^{\mathrm{p}}}$ ، آنگاه مسئله *بهینه‌سازی معکوس* برای مدل برنامه‌ریزی کسری خطی (۳) که در واقع حداقل‌کردن فاصله $\|\tilde{C} - C\|_p$ بعلاوه $\|\widetilde{D} - D\|_p$ تحت شرایط (۹) است، با مدل (۱۰) به فرم زیر به‌دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} Min\ \ & \|\tilde{C} - C\|_p + \|\widetilde{D} - D\|_p \qquad\qquad (10) \\ s.t.\ \ & \\ & \sum_{i \epsilon B} a_{ij}\, y_i + \tilde{d}_j w - \lambda_j = \tilde{c}_j\,, \quad \forall\, j \epsilon L \\ & \sum_{i \epsilon B} a_{ij}\, y_i + \tilde{d}_j w + \mu_j = \tilde{c}_j\,, \quad \forall\, j \epsilon U \\ & \sum_{i \epsilon B} a_{ij}\, y_i + \tilde{d}_j w = \tilde{c}_j\,, \quad \forall\, j \epsilon F \\ & -\sum_{i \epsilon B} b_i\, y_i + \tilde{d}_0 w + \sum_{j \epsilon L} l_j\ \lambda_j - \sum_{j \epsilon U} u_j\, \mu_j \geq \tilde{c}_0 \\ & y_i \geq 0, \quad \forall \mathrm{i} \in \mathrm{B} \\ & \lambda_j \geq 0, \quad \forall \mathrm{j} \in \mathrm{L} \\ & \mu_j \geq 0, \quad \forall \mathrm{j} \in \mathrm{U}. \end{aligned}$$

واضح است که مدل (۱۰) با تابع هدف شامل نرم $L_p = \|.\|_p$ یک مسئله برنامه‌ریزی خطی نیست. لذا برای حل چنین مسئله‌ای بستگی به مقدار p می‌توان مدل‌های متداول بهینه‌سازی را با تبدیلات مناسب به‌دست آورد و آنها را حل و بحث نمود. در ادامه، مدل (۱۰) به ازای مقادیر پرکاربرد p یعنی $p = 1, 2, \infty$ مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۳-۳-۱- مسئله بهینه‌سازی معکوس با نرم L_1

اگر برای مدل بهینه سازی معکوس بدست آمده (۱۰) نرم L_1 بکار گرفته شود، آنگاه مسئله حاصل با همان قیود مدل (۱۰) دارای تابع هدف زیر است:

$$Min \quad \sum_{j\in J_0} \left|\tilde{c}_j - c_j\right| + \sum_{j\in J_0} \left|\tilde{d}_j - d_j\right|$$

که در آن $J_0 = J \cup \{0\}$.

به‌طور مشخص، این تابع خطی نیست ولی با یک تغییر متغیر استاندارد قابل خطی‌شدن است. برای این منظور، فرض کنید برای هر $j \in J_0$ مقادیر $\alpha_j, \beta_j, \varphi_j, \theta_j \geq 0$ موجود باشند به‌طوریکه:

$$\tilde{d}_j - d_j = \varphi_j - \theta_j \quad \text{و} \quad \tilde{c}_j - c_j = \alpha_j - \beta_j$$

لذا با توجه به فرض $\left|\tilde{c}_j - c_j\right| = \left|\alpha_j - \beta_j\right|$ و همچنین $\alpha_j, \beta_j \geq 0$ دو حالت وجود دارد:

الف) اگر $\tilde{c}_j - c_j \geq 0$ باشد، آنگاه:

$$\alpha_j = \tilde{c}_j - c_j \quad \text{و} \quad \beta_j = 0$$

ب) اگر $\tilde{c}_j - c_j < 0$ باشد، آنگاه:

$$\beta_j = -(\tilde{c}_j - c_j) \quad \text{و} \quad \alpha_j = 0$$

بنابراین، در هر صورت:

$\left|\tilde{c}_j - c_j\right| = \alpha_j + \beta_j$ و به همین دلیل، $\left|\tilde{d}_j - d_j\right| = \varphi_j + \theta_j$.

در ضمن باید در نظر داشت که مقادیر نامنفی α_j و β_j نمی‌توانند همزمان مثبت باشند، چون در غیر این صورت می‌توان یکی از آنها را به صفر کاهش داد بدون آنکه هیچ قیدی نقض شود و بدون آنکه مقدار تابع هدف بدتر شود. به‌عبارت دیگر: $\alpha_j\beta_j = 0$ و به همین دلیل $\varphi_j\theta_j = 0$.

در نهایت با انجام تغییر متغیرهای فوق پارامترهای تعدیل‌شده عبارتند از:

$$\forall j \in J_0: \quad \tilde{c}_j = \alpha_j - \beta_j + c_j \quad \text{و} \quad \tilde{d}_j = \varphi_j - \theta_j + d_j$$

و مدل بهینه سازی معکوس (۱۰) با نرم L_1 به مدل (۱۱) تبدیل خواهد شد:

$$\begin{aligned}
&Min \ \sum_{j\in J_0} (\alpha_j + \beta_j + \varphi_j + \theta_j) \qquad\qquad (11)\\
&s.t.\\
&\quad \sum_{i\epsilon B} a_{ij}\, y_i + (\varphi_j - \theta_j)w + d_j w - \lambda_j - \alpha_j + \beta_j = c_j\,, \qquad \forall\, j\epsilon L\\
&\quad \sum_{i\epsilon B} a_{ij}\, y_i + (\varphi_j - \theta_j)w + d_j w + \mu_j - \alpha_j + \beta_j = c_j\,, \qquad \forall\, j\epsilon U\\
&\quad \sum_{i\epsilon B} a_{ij}\, y_i + (\varphi_j - \theta_j)w + d_j w - \alpha_j + \beta_j = c_j, \qquad \forall\, j\epsilon F\\
&\quad -\sum_{i\epsilon B} b_i\, y_i + (\varphi_0 - \theta_0)w + d_0 w + \sum_{j\epsilon L} l_j\ \lambda_j - \sum_{j\epsilon U} u_j\, \mu_j - \alpha_0 + \beta_0 \geq c_0,\\
&\qquad \alpha_j, \beta_j, \varphi_j, \theta_j \geq 0, \quad \forall\, j \in J_0\\
&\qquad y_i \geq 0, \qquad \forall \mathrm{i} \in \mathrm{B}\\
&\qquad \lambda_j \geq 0, \qquad \forall \mathrm{j} \in \mathrm{L}\\
&\qquad \mu_j \geq 0, \qquad \forall \mathrm{j} \in \mathrm{U}.
\end{aligned}$$

مدل بهینه سازی معکوس (۱۱) بر خلاف خطی بودن تابع هدف آن، بر مبنای قیودش با بردار متغیرهای $(\alpha, \beta, \varphi, \theta, \lambda, \mu, y, w)$ یک مدل خطی نیست. این مدل با روش‌های حل مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی موجود یا نرم افزارهایی مانند MATLAB و Lingo قابل حل است.

اما اگر بر اساس نظر اولیه تصمیم‌گیرنده، برای بهینه‌سازی معکوس مدل (۳)، هدف بهینه‌کردن جواب شدنی $\bar{x}$ با مقدار بهینه مشخصی مانند Z^* باشد، آنگاه با توجه به نکته ۱ بایستی مدل (۱۲) به شرح ذیل حل گردد. به‌طوری که یک مدل کاملاً خطی خواهد شد و با تمام روش‌های موجود متداول از جمله روش سیمپلکس قابل حل است:

$$
\begin{aligned}
Min \ & \sum_{j\in J_0} (\alpha_j + \beta_j + \varphi_j + \theta_j) \qquad\qquad (12)\\
s.t.\ & \\
& \sum_{i\epsilon B} a_{ij}\, y_i + Z^*\varphi_j - Z^*\theta_j - \lambda_j - \alpha_j + \beta_j = c_j - Z^* d_j, \quad \forall j\epsilon L\\
& \sum_{i\epsilon B} a_{ij}\, y_i + Z^*\varphi_j - Z^*\theta_j + \mu_j - \alpha_j + \beta_j = c_j - Z^* d_j, \quad \forall j\epsilon U\\
& \sum_{i\epsilon B} a_{ij}\, y_i + Z^*\varphi_j - Z^*\theta_j - \alpha_j + \beta_j = c_j - Z^* d_j, \quad \forall j\epsilon F\\
& -\sum_{i\epsilon B} b_i\, y_i + Z^*\varphi_0 - Z^*\theta_0 + \sum_{j\epsilon L} l_j\ \lambda_j - \sum_{j\epsilon U} u_j\,\mu_j - \alpha_0 + \beta_0 \ge c_0 - Z^* d_0,\\
& \alpha_j, \beta_j, \varphi_j, \theta_j \ge 0, \quad \forall j \in J_0\\
& y_i \ge 0, \quad \forall i \in B\\
& \lambda_j \ge 0, \quad \forall j \in L\\
& \mu_j \ge 0, \quad \forall j \in U.
\end{aligned}
$$

بنابراین تمام مباحث مطرح شده قبل در این بخش، به منظور یافتن مدل بهینه‌سازی معکوس مربوط به مدل مورد مطالعه (۳) را می‌توان در قضیه بعد خلاصه نمود:

قضیه ۳: فرض کنید $\bar{x}$ یک جواب شدنی از مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی با متغیرهای تصمیم کراندار (۳) با مقدار بهینه مشخص Z^* صادق در مجموعه‌های (۷) و $(\bar{t}_0, \bar{t})$ جواب شدنی متناظر آن در مدل (۴) باشد. آنگاه $\bar{x}$ جواب بهینه مدل (۳) خواهد بود، اگر ضرایب تابع هدف پارامتری آن مدل با تعدیل زیر بر اساس جواب بهینه $(\alpha^*, \beta^*, \varphi^*, \theta^*, \lambda^*, \mu^*)$ از مدل خطی (۱۲) تحت نرم L_1 به‌دست آیند:

$$
\forall j \in J_0: \begin{cases} \tilde{c}_j = \alpha_j^* - \beta_j^* + c_j \\ \tilde{d}_j = \varphi_j^* - \theta_j^* + d_j \end{cases}.
$$

۳-۲-۲- مسئله بهینه‌سازی معکوس با نرم L_2

حال اگر برای مدل بهینه‌سازی معکوس بدست آمده (۱۰) نرم L_2 در نظر گرفته شود، آنگاه مسئله حاصل با همان قیود مدل (۱۰) دارای تابع هدف زیر است:

$$
Min \ \sqrt[2]{\sum_{j\in J_0} \left|\tilde{c}_j - c_j\right|^2} + \sqrt[2]{\sum_{j\in J_0} \left|\tilde{d}_j - d_j\right|^2}
$$

لذا اگر همان تغییر متغیر استاندارد حالت قبل به کار رفته و ساده‌سازی تابع هدف صورت پذیرد، آنگاه قضیه ۴ خلاصه مباحث مربوط به حل و بررسی مدل بهینه‌سازی معکوس از مدل (۳) خواهد بود.

قضیه ۴: فرض کنید $\bar{x}$ یک جواب شدنی از مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی با متغیرهای تصمیم کراندار (۳) با مقدار بهینه مشخص Z^* صادق در مجموعه‌های (۷) و $(\bar{t}_0, \bar{t})$ جواب شدنی متناظر آن در مدل (۴) باشد. آنگاه $\bar{x}$ جواب بهینه مدل (۳) خواهد بود، اگر ضرایب پارامتری تابع هدف آن مدل با تعدیل زیر بر اساس جواب بهینه $(\alpha^*, \beta^*, \varphi^*, \theta^*, \lambda^*, \mu^*)$ از مدل درجه دوم (۱۳) تحت نرم L_2 به‌دست آیند:

$$\forall j \in J_0: \begin{cases} \tilde{c}_j = {\alpha_j}^* - {\beta_j}^* + c_j \\ \tilde{d}_j = {\varphi_j}^* - {\theta_j}^* + d_j \end{cases}$$

به‌طوریکه مدل (۱۳) یک مدل برنامه‌ریزی غیرخطی از نوع درجه دوم است و با روش‌های حل مربوطه، مانند روش ولف یا نرم‌افزارهای موجود قابل حل خواهد بود.

$$Min \sum_{j\in J_0} (\alpha^2{}_j + \beta^2{}_j + \varphi^2{}_j + \theta^2{}_j) \tag{13}$$
$$s.t.$$
$$\sum_{i\epsilon B} a_{ij}\, y_i + Z^*\varphi_j - Z^*\theta_j - \lambda_j - \alpha_j + \beta_j = c_j - Z^* d_j, \qquad \forall j\epsilon L$$
$$\sum_{i\epsilon B} a_{ij}\, y_i + Z^*\varphi_j - Z^*\theta_j + \mu_j - \alpha_j + \beta_j = c_j - Z^* d_j, \qquad \forall j\epsilon U$$
$$\sum_{i\epsilon B} a_{ij}\, y_i + Z^*\varphi_j - Z^*\theta_j - \alpha_j + \beta_j = c_j - Z^* d_j, \qquad \forall j\epsilon F$$
$$-\sum_{i\epsilon B} b_i\, y_i + Z^*\varphi_0 - Z^*\theta_0 + \sum_{j\epsilon L} l_j\ \lambda_j - \sum_{j\epsilon U} u_j\, \mu_j - \alpha_0 + \beta_0 \geq c_0 - Z^* d_0,$$
$$\alpha_j, \beta_j, \varphi_j, \theta_j \geq 0, \quad \forall j \in J_0$$
$$y_i \geq 0, \quad \forall i \in B$$
$$\lambda_j \geq 0, \quad \forall j \in L$$
$$\mu_j \geq 0, \quad \forall j \in U.$$

۳-۳-۳- مسئله بهینه‌سازی معکوس با نرم L_∞

سرانجام اگر برای مدل بهینه‌سازی معکوس به‌دست آمده (۱۰) نرم L_∞، که برای دو بردار مفروض e و f با نماد $\|e - f\|_\infty = \max_j |e_j - f_j|$ معرفی می‌گردد، در نظر گرفته شود. آنگاه تابع هدف مدل با تغییر متغیرهای زیر بازنویسی خواهد گردید و مسئله بهینه‌سازی معکوس به یک مدل برنامه‌ریزی خطی تبدیل می‌گردد:

$$\|\tilde{C} - C\|_\infty = \max_{j\in J_0} |\tilde{c}_j - c_j| = \delta_1$$
$$\|\tilde{D} - D\|_\infty = \max_{j\in J_0} |\tilde{d}_j - d_j| = \delta_2$$

به‌عبارت دیگر طبق تغییر متغیر استاندارد حالت اول یعنی:

$\tilde{c}_j - c_j = \alpha_j - \beta_j$ و $\tilde{d}_j - d_j = \varphi_j - \theta_j$

یک مدل برنامه‌ریزی خطی جدید به فرم (۱۴) همراه با قضیه بعد به‌عنوان خلاصه این حالت به‌دست خواهند آمد.

قضیه ۵: فرض کنید $\bar{x}$ یک جواب شدنی از مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی با متغیرهای تصمیم کراندار (۳) با مقدار بهینه مشخص Z^* صادق در مجموعه‌های (۷) و $(\bar{t}_0, \bar{t})$ جواب شدنی متناظر آن در مدل (۴) باشد. آنگاه $\bar{x}$ جواب بهینه مدل (۳) خواهد بود، اگر ضرایب پارامتری تابع هدف آن مدل با تعدیل زیر و با جواب $(\alpha^*, \beta^*, \varphi^*, \theta^*, \lambda^*, \mu^*, \delta_1^*, \delta_2^*)$ به عنوان جواب بهینه مدل خطی (۱۴) تحت نرم L_∞ به‌دست آیند:

$$.\forall j \in J_0:\begin{cases} \tilde{c}_j = {\alpha_j}^* - {\beta_j}^* + c_j \\ \tilde{d}_j = {\varphi_j}^* - {\theta_j}^* + d_j \end{cases}$$

به‌طوریکه بر اساس توضیحات بیان‌شده فوق، مدل بهینه‌سازی معکوس تحت نرم L_∞ با مدل (۱۴) به شرح ذیل است:

$$\begin{aligned}
&Min \quad \delta_1 + \delta_2 \qquad\qquad (14)\\
&s.t.\\
&\sum_{i\epsilon B} a_{ij}\, y_i + Z^*\varphi_j - Z^*\theta_j - \lambda_j - \alpha_j + \beta_j = c_j - Z^* d_j\,, \qquad j\epsilon L\\
&\sum_{i\epsilon B} a_{ij}\, y_i + Z^*\varphi_j - Z^*\theta_j + \mu_j - \alpha_j + \beta_j = c_j - Z^* d_j\,, \qquad j\epsilon U\\
&\sum_{i\epsilon B} a_{ij}\, y_i + Z^*\varphi_j - Z^*\theta_j - \alpha_j + \beta_j = c_j - Z^* d_j\,, \qquad j\epsilon F\\
&-\sum_{i\epsilon B} b_i\, y_i + Z^*\varphi_0 - Z^*\theta_0 + \sum_{j\epsilon L} l_j\ \lambda_j - \sum_{j\epsilon U} u_j\, \mu_j - \alpha_0 + \beta_0 \geq c_0 - Z^* d_0\,,\\
&\alpha_j + \beta_j \leq \delta_1, \quad \forall j \in J_0\\
&\varphi_j + \theta_j \leq \delta_2, \quad \forall j \in J_0\\
&\alpha_j, \beta_j, \varphi_j, \theta_j \geq 0, \quad \forall\, j \in J_0\\
&y_i \geq 0, \quad \forall \mathrm{i} \in \mathrm{B}\\
&\lambda_j \geq 0, \quad \forall \mathrm{j} \in \mathrm{L}\\
&\mu_j \geq 0, \quad \forall \mathrm{j} \in \mathrm{U}.\\
&\delta_1, \delta_2 \geq 0
\end{aligned}$$

نکته ۲: همیشه لزومی ندارد که مسئله معکوس وجود داشته باشد، وجود مسئله معکوس بستگی به جواب شدنی داده شده $\bar{x}$ و مقدار تابع هدف Z^* دارد. زیرا مقدار تابع هدف کران بالا و پائین مشخصی دارد. بنابراین این تحقیق برای موقعیت‌هایی که مسئله معکوس وجود خواهد داشت، محدود می‌گردد.

4- نتایج و مثال عددی

در این بخش جهت نمایش و نحوه کارکرد روش پیشنهادی یک مثال عددی بیان می گردد.

مثال 2: مسئله برنامه ریزی کسری خطی با متغیرهای کراندار (۱۵) به شرح زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned}
&max \quad Z = \frac{x_2 + 1}{x_1 + 3} \qquad\qquad (15)\\
&s.t.\\
&-x_1 + x_2 \leq 1\\
&x_1 + 2x_2 \leq 7\\
&0 \leq x_1 \leq 5\\
&0 \leq x_2 \leq 2
\end{aligned}$$

آنگاه مدل خطی متناظر (۱۵) بر اساس تغییر متغیر چارنز-کوپر برابر است با:

$$\begin{aligned}
&max \quad K = t_0 + t_2 \qquad\qquad (16)\\
&s.t.\\
&-t_0 - t_1 + t_2 \leq 0\\
&-7t_0 + t_1 + 2t_2 \leq 0\\
&-5t_0 + t_1 \leq 0\\
&-2t_0 + t_2 \leq 0\\
&3t_0 + t_1 = 1\\
&t_0, t_1, t_2 \geq 0
\end{aligned}$$

با حل مدل (۱۶) به روش سیمپلکس، جواب بهینه $t^* = (t_0, t_1, t_2) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2})$ با مقدار بهینه $K^* = \frac{3}{4}$ به‌دست می‌آید. بنابراین مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی (۱۵) شامل جواب بهینه x^* با مقدار بهینه Z^* است:

$$Z^* = \frac{3}{4} \text{ و } x^* = (\frac{t_1}{t_0}, \frac{t_2}{t_0}) = (x_1, x_2) = (1,2).$$

حال با بهینه سازی معکوس فرض کنید جواب شدنی $\bar{x} = (5,1)$ بخواهد جواب بهینه مدل (۱۵) با مقدار بهینه $Z^* = 1$، یعنی عملاً یک مقدار بهینه بهتر، باشد. آنگاه هدف این است که معین شود برای ضرایب متغیرهای تابع هدف چه تعدیلی بایستی انجام گردد.

ابتدا مجموعه‌های معرفی شده در روابط (۷) با جواب شدنی $\bar{x} = (5,1)$ از مدل (۱۵) و معادل آن جواب شدنی $(\bar{t}_0, \bar{t}_1, \bar{t}_2) = (\frac{1}{8}, \frac{5}{8}, \frac{1}{8})$ از مدل (۱۶) عبارتند از:

$F = \{2\}$ و $U = \{1\}$ و $L = \emptyset$ و $B = \{2\}$.

لذا با توجه به مجموعه‌های فوق، مدل بهینه‌سازی معکوس تحت نرم L_1 مربوط به مسئله (۱۵) بر اساس مدل خطی (۱۲) به فرم (۱۷) به‌دست خواهد آمد:

$$Min\ \ \Delta = \sum_{j=0}^{2} (\alpha_j + \beta_j + \varphi_j + \theta_j) \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
s.t.&\\
&a_{21}y_2 + Z^*\varphi_1 - Z^*\theta_1 + \mu_1 - \alpha_1 + \beta_1 = c_1 - Z^*d_1\\
&a_{22}y_2 + Z^*\varphi_2 - Z^*\theta_2 - \alpha_2 + \beta_2 = c_2 - Z^*d_2\\
&-b_2y_2 + Z^*\varphi_0 - Z^*\theta_0 - u_1\mu_1 - \alpha_0 + \beta_0 \geq c_0 - Z^*d_0\\
&y_2,\ \mu_1 \geq 0,\\
&\alpha_j, \beta_j, \varphi_j, \theta_j \geq 0, \quad \forall\, j \in \{0,1,2\}
\end{aligned}$$

با جایگذاری ضرایب عددی از مسئله (۱۵) و مقدار پیشنهادی $Z^* = 1$، مدل (۱۷) به فرم (۱۸) بازنویسی می‌گردد:

$$Min\ \ \Delta = \sum_{j=0}^{2} (\alpha_j + \beta_j + \varphi_j + \theta_j) \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
s.t.&\\
&y_2 + \varphi_1 - \theta_1 + \mu_1 - \alpha_1 + \beta_1 = -1\\
&2y_2 + \varphi_2 - \theta_2 - \alpha_2 + \beta_2 = 1\\
&-7y_2 + \varphi_0 - \theta_0 - 5\,\mu_1 - \alpha_0 + \beta_0 \geq -2\\
&y_2,\ \mu_1 \geq 0,\\
&\alpha_j, \beta_j, \varphi_j, \theta_j \geq 0, \quad \forall\, j \in \{0,1,2\}
\end{aligned}$$

مدل (۱۸) یک مدل برنامه ریزی خطی است که با روش سیمپلکس و حتی بدون نیاز به هیچ نرم‌افزاری قابل حل است. با حل این مدل جواب‌های بهینه دگرین با مقدار بهینه $\Delta^* = \frac{12}{7}$ به‌دست خواهند آمد، که می‌توان آنها را در چهار دسته بیان نمود.

حالت اول: جواب بهینه اول برابر است با:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha_1^*} = \mathbf{\frac{9}{7}} \text{ و } \boldsymbol{\varphi_2^*} = \mathbf{\frac{3}{7}} \text{ و } \boldsymbol{y_2^*} = \mathbf{\frac{2}{7}} \\ \text{مابقی متغیرها} = 0 \end{cases}$$

در این حالت پارامترهای تعدیل‌شده تابع هدف بر اساس قضیه ۳ عبارتند از:

$$\begin{cases} \tilde{C} = (\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2) = (1, \frac{9}{7}, 1) \\ \widetilde{D} = (\tilde{d}_0, \tilde{d}_1, \tilde{d}_2) = (3, 1, \frac{3}{7}) \end{cases}$$

لذا تابع هدف جدید مدل (۱۵) برای بهینه‌شدن نقطه شدنی $\bar{x} = (5,1)$ با $Z^* = 1$ برابر است با:

$$max \qquad Z_1(x) = \frac{\frac{9}{7}x_1 + x_2 + 1}{x_1 + \frac{3}{7}x_2 + 3}$$

حالت دوم: جواب بهینه دوم برابر است با:

$$\begin{cases} \boldsymbol{\alpha}_1^* = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{7}} \ \text{و} \ \boldsymbol{\beta}_2^* = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{7}} \ \text{و} \ \boldsymbol{y}_2^* = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{7}} \\ \text{مابقی متغیرها} = 0 \end{cases}$$

پارامترهای تعدیل‌شده تابع هدف این حالت نیز عبارتند از:

$$\begin{cases} \tilde{C} = (\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2) = (1, \frac{9}{7}, \frac{4}{7}) \\ \widetilde{D} = (\tilde{d}_0, \tilde{d}_1, \tilde{d}_2) = D = (3, 1, 0) \end{cases}$$

تابع هدف جدید نیز از مدل (۱۵) برای بهینه‌شدن نقطه شدنی $\bar{x}$ با $Z^* = 1$ برابر است با:

$$max \qquad Z_2(x) = \frac{\frac{9}{7}x_1 + \frac{4}{7}x_2 + 1}{x_1 + 3}$$

حالت سوم: جواب بهینه سوم برابر است با:

$$\begin{cases} \theta_1^* = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{7}} \ \text{و} \ \boldsymbol{\beta}_2^* = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{7}} \ \text{و} \ \boldsymbol{y}_2^* = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{7}} \\ \text{مابقی متغیرها} = 0 \end{cases}$$

پارامترهای تعدیل‌شده تابع هدف این حالت برابرند با:

$$\begin{cases} \tilde{C} = (\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2) = (1, 0, \frac{4}{7}) \\ \widetilde{D} = (\tilde{d}_0, \tilde{d}_1, \tilde{d}_2) = (3, -\frac{2}{7}, 0) \end{cases}$$

و تابع هدف جدید سوم از مدل (۱۵) برای بهینه‌شدن نقطه شدنی $\bar{x}$ با $Z^* = 1$ برابر است با:

$$max \qquad Z_3(x) = \frac{\frac{4}{7}x_2 + 1}{-\frac{2}{7}x_1 + 3}$$

حالت چهارم: جواب بهینه چهارم برابر است با:

$$\begin{cases} \theta_1^* = \frac{\mathbf{9}}{\mathbf{7}} \ \text{و} \ \boldsymbol{\varphi}_2^* = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{7}} \ \text{و} \ \boldsymbol{y}_2^* = \frac{\mathbf{2}}{\mathbf{7}} \\ \text{مابقی متغیرها} = 0 \end{cases}$$

و پارامترهای تعدیل‌شده تابع هدف عبارتند از:

$$\begin{cases} \tilde{C} = (\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2) = C = (1, 0, 1) \\ \widetilde{D} = (\tilde{d}_0, \tilde{d}_1, \tilde{d}_2) = (3, -\frac{2}{7}, \frac{3}{7}) \end{cases}$$

سرانجام، تابع هدف جدید چهارم برای مدل (۱۵) جهت بهینه‌شدن نقطه شدنی $\bar{x}$ با $Z^* = 1$ برابر است با:

$$max \qquad Z_4(x) = \frac{x_2 + 1}{-\frac{2}{7}x_1 + \frac{3}{7}x_2 + 3}$$

بنابراین برای مثال مطرح‌شده جهت نقطه شدنی $\bar{x}$ حالت‌های متفاوتی از بهینه‌سازی معکوس به‌دست آمد، که برای همه آنها مقدار بهینه پیشنهادی برقرار بود، یعنی:

$Z_1(\bar{x}) = Z_2(\bar{x}) = Z_3(\bar{x}) = Z_4(\bar{x}) = Z^* = 1$.

در ضمن حصول حالت‌های مختلف از مسئله معکوس در مثال اخیر، برای جواب شدنی خاص $\bar{x} = (5,1)$ با $Z^* = 1$، میسر گردید. ولی در کل بایستی در نظر داشت طبق نکته ۲ ممکن است برای هر جواب شدنی دیگر و یا تغییر مقدار بهینه آن این اتفاق رخ ندهد.

۵ – بحث و نتیجه گیری

بهینه‌سازی معکوس یک مبحث بسیار مهم در تحقیقات روزمره و کاربردهای عملیاتی به شمار می‌رود. به‌عنوان نمونه، زمانی که در بحث تولید و تجارت به دلایل مختلف مانند عملکرد نامناسب منابع، یک کار سرمایه‌گذاری نمی‌تواند تقاضای بازار را به موقع پاسخ دهد، می‌توان به کمک این روش‌ها با در دست گرفتن موقعیت‌های موجود و تغییر در ضرایب هزینه و یا سود، نبض بازار را به دست گرفت.

در این مقاله، بهینه‌سازی معکوس برای مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی با متغیرهای تصمیم کراندار مورد بررسی قرار گرفت. اهمیت این تحقیق از این حیث مطرح می‌گردد که در بیشتر مسائل بهینه‌سازی یا معکوس آنها، متغیرهای تصمیم معمولاً کراندار هستند و برای آنها حد و مرز بالا و پایین در نظر گرفته می‌شود. به‌طوریکه حتی در بهینه‌سازی مستقیم، حل و بررسی مسائل برنامه‌ریزی با متغیرهای کراندار مراحل و محدودیت‌های بیشتری نسبت به مسائل با متغیرهای صرفاً نامنفی وجود دارد. لذا عمده تفاوت این کار با آخرین کارهای تحقیقاتی قبلی در زمینه بهینه‌سازی معکوس برای مسئله برنامه‌ریزی کسری خطی، مانند [۱۹-۱۷]، همین بحث کرانداربودن متغیرهای تصمیم و همچنین تکمیل‌کردن نوع فاصله یا نرم تعدیل پارامتری است. البته کار انجام شده توسط جاین و آریا [۱۹] با متغیرهای نامنفی، از اقبال کاملی برخوردار نبوده است. زیرا در آن تحقیق، علاوه بر نداشتن شرایط کرانداری متغیرها ماهیت اصلی بحث بهینه‌سازی معکوس نیز زیر سئوال است. در واقع، ماهیت بهینه‌سازی معکوس بهینه‌نمودن یک جواب شدنی دلخواه با تعدیل ضرایب موثر در بهینگی، یعنی ضرایب تابع هدف است نه تعدیل در ضرایب قیود مسئله، که مربوط به شدنی یا نشدنی بودن مسئله است. در پایان این تحقیق، یک مثال عددی خاص مطرح گردید که مسئله بهینه‌سازی معکوس حاصل آن با نرم L_1 یک مسئله برنامه‌ریزی خطی شامل جواب‌های دگرین (چندگانه) بود. به‌طوریکه این مثال توانست در حالات مختلف و به‌طور کامل تعدیل پارامترهای تابع هدف یک مدل برنامه‌ریزی کسری خطی با متغیرهای تصمیم کراندار را مورد تجزیه و تحلیل قرار دهد.

فهرست منابع

[1] Burton, D., Toint, Ph. L., On an instance of the inverse shortest paths problem. *Mathematical Programming*, 53(1992), 45–61.

[2] Burton, D., Toint, Ph. L., On the use of an inverse shortest paths algorithm for recovering correlated costs. *Mathematical Programming*, 63(1994), 1–22.

[3] Zhang, J., Ma, Z., Yang, C., A column generation method for inverse shortest paths problems. *ZOR Mathematical Methods of Operations Research*, 41(1995), 347–358.

[4] Zhang, J., Liu, Z., Ma, Z., On the inverse problem of minimum spanning tree with partition constraints. *ZOR Mathematical Methods of Operations Research*, 44(1996), 171–188.

[5] Sokkalingam, P. T., Ahuja, R., Orlin, J.B., Solving inverse spanning tree problems through network flow techniques. *Operations Research*, 47(1999), 291–298.

[6] Zhang, J., Liu, Z., Calculating some inverse linear programming problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 72(1996), 261– 273.

[7] Zhang, J., Liu, Z., A further study on inverse linear programming problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 106(1999), 345–359.

[8] Yang, C., Zhang, J., Ma, Z., Inverse maximum flow and minimum cut problems. *Optimization*, 40(1997), 147–170.

[9] Zhang, J., Cai, nM.C., Inverse problem of minimum cuts. *Mathematical Methods of Operations Research*, 47(1998), 51–58.

[10] Ahuja, R.K., Orlin, J.B., Inverse optimization. *Operations Research*, 49(2001), 771–783.

[11] Ahuja, R.K., Orlin, J.B., Combinatorial algorithms for inverse network flow problems. *Networks*, 40(2002), 181–187.

[12] Amin, G., R., Emrouznejad, A., Inverse Linear Programming in DEA. *International Journal of Operations Research*, 4(2) (2007), 105-109.

[13] Sadri, S., Rostamy- Malkhalifeh, M., Shoja, N., Inverse Linear Programming in Cost Efficiency and Network. *Advances and Applications in Statistics*, 51(2017), 131-149.

[14] Sadri, S., Rostamy-Malkhalifeh, M., The Calculation of the output price vectorby applying reverse linear programming: The novel approach in DEA. *Journal of New Researches in Mathematics*, 4(16) (2019), 55-68.

[15] Zhang, J., Liu, Z. Solving a class of inverse Qp problems by a smoothing Newton methode. *Journal of Computational Mathmathics*, 27(6) (2009), 787-801.

[16] Zhang, J., Xu, C., Inverse optimization for linearly constrained convex separable programming problems. *European Journal of Operational Research*, 200(2010), 671–679.

[17] Hladik, M., Generalized linear fractional under interval uncertainty. European *Journal of Operational Research*, 205(1) (2010), 42-46.

[18] Jain, S., Arya, N., Inverse linear fractional programming: A new approach. *Journal of Computer and Mathmathical Sciences*, 3(5) (2012), 542-547.

[19] Jain, S., Arya, N., On Inverse Linear Fractional Programming Problem. European *Journal of Mathematical Sciences*, 2(3) (2013), 320-328.

[20] Charnes, A., Cooper, W., W., Programming with linear fractional functionals. *Naval Reserch Logistics Quarterly*, 9(1962), 181-186.

[21] Murty KG., Linear Programming. *John Wiley & Sons*, New York, 1983.

[22] Bazaraa, Mokhtar, S., John J., Jarvis, Hanis, D., Sherali, Linear programming and network flows. *John Wiley & Sons*, 1990.