

بررسی تقریب معادلات تابعی درجه دوم توسعه یافته با استفاده از فضای شبه p -نرم دار فازی

احسان موحدنیا^۱، پروانه لولو^{۲*}

(^{۱و۲}) گروه ریاضی و آمار، دانشکده انرژی و علوم داده، دانشگاه صنعتی خاتم‌الانبیاء، بهبهان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۱/۹/۱۴ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۲/۴/۱۱

چکیده

در این مقاله به بررسی فضاهای شبه p -نرم دار فازی و پایداری معادلات تابعی درجه دوم در این فضاها با استفاده از روش نقطه ثابت می‌پردازیم. ابتدا فضای شبه p -نرم دار فازی تعریف می‌شود و برخی از ویژگی‌های آن بررسی می‌شود. سپس، معادلات تابعی درجه دوم توسعه یافته زیر معرفی می‌شود و نهایتاً پایداری هایرز-اولام این معادلات تابعی در فضاهای شبه p -نرم دار فازی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

$$f(ax+by) + f(ax-by) - \frac{a}{2} f(x+y) = \frac{a}{2} f(x-y) + (2a^2 - a) f(x) + (2b^2 - a) f(y)$$

واژه‌های کلیدی: پایداری معادلات تابعی، قضیه نقطه ثابت، فضای فازی.

۱- مقدمه

در پاییز سال ۱۹۴۰، اولام^۲ در یک سخنرانی مشهور در باشگاه ریاضیات دانشگاه ویسکانسین^۳، تعدادی از مسائل حل نشده را ارائه نمود[۱]. این سخنرانی به عنوان نقطه آغازی برای نظریه پایداری معادلات تابعی شناخته شد. اولام مسئله پایداری را با این سوال مطرح کرد: "اگر فرض یک قضیه تقریباً برقرار باشد، آیا می‌توان ادعا نمود که حکم قضیه نیز تقریباً برقرار خواهد ماند؟"

مسئله پایداری برای معادلات تابعی به این صورت مطرح می‌شود: "اگر معادله‌ی تابعی فرضی دارای جواب تقریبی دلخواهی باشد، آیا این جواب تقریبی به اندازه کافی به یک جواب دقیق از معادله‌ی تابعی فرضی نزدیک خواهد بود؟" اگر پاسخ مثبت باشد، معادله‌ی تابعی فرضی را پایدار گوییم. اولین پاسخ به سوال اولام در سال ۱۹۴۱ توسط هایرز^۴ مطرح گردید[۲]. این پاسخ موجب شروع یک حوزه تحقیقاتی جدید در ریاضیات شد و باعث جلب توجه بسیاری از ریاضیدانان شد. پس از این پاسخ، تلاش‌های زیادی در جهت بررسی پایداری معادلات تابعی صورت گرفت و تئوری‌های گوناگونی در این زمینه توسعه یافت.

هایرز ثابت کرد که برای هر مقدار $\epsilon > 0$ دلخواه، اگر نگاشت $f: E_1 \rightarrow E_2$ بر روی فضاهای باناخ E_1 و E_2 تقریباً جمعی^۵ باشد، یعنی رابطه‌ی $\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \epsilon$ برقرار باشد، آنگاه می‌توان مقدار $k > 0$ و نگاشت جمعی یکتای $A: E_1 \rightarrow E_2$ را یافت به طوری که رابطه‌ی

$$\|A(x) - f(x)\| \leq \epsilon$$

برقرار باشد. روش استفاده شده توسط هایرز در اثبات پایداری معادله‌ی تابعی جمعی به عنوان "روش مستقیم" شناخته می‌شود. اگر پایداری یک معادله‌ی تابعی مشابه با قضیه هایرز و با استفاده از تابع کنترل ϵ ثابت گردد، آن را پایداری هایرز-اولام می‌نامند.

در سال ۱۹۵۰، آئوکی^۶ توانست قضیه هایرز را بهبود بخشد. آئوکی نشان داد که اگر $\theta_0 \geq 0$ و $0 \leq p < 1$ چنان موجود باشند که برای نگاشت $f: E_1 \rightarrow E_2$ بر روی فضاهای باناخ E_1 و E_2 رابطه‌ی

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\| \leq \theta_0 (\|x\|^p + \|y\|^p)$$

برقرار باشد، آنگاه نگاشت جمعی $A: E_1 \rightarrow E_2$ و $\theta \geq 0$ چنان موجود است که رابطه‌ی $\|A(x) - f(x)\| \leq \theta \|x\|^p$ برقرار خواهد بود. در قضیه‌ی آئوکی تابع کنترل با ضابطه‌ی $\|x\|^p + \|y\|^p$ معین گردیده است.

پس از قضیه‌ی آئوکی، موضوع پایداری معادلات تابعی سال‌ها به فراموشی سپرده شد تا اینکه راسیاس^۷ در سال ۱۹۷۸ با اثبات قضیه‌ای[۳]، قضیه آئوکی برای نگاشت‌های خطی را توسعه داد.

اگر پایداری یک معادله تابعی با استفاده از یک تابع کنترل مشابه قضیه آئوکی ثابت شود، آن را "پایداری هایرز-اولام-راسیاس" نام‌گذاری می‌کنند. با توجه به ترتیب اثبات قضیه آئوکی و قضیه راسیاس، به نظر می‌رسد که نام

² Ulam³ Wisconsin⁴ D. H. Hyers⁵ Additive⁶ T. Aoki⁷ Th. M. Rassias

راسیاس به دلیل تأثیر مهمی که در حفظ و استمرار پایداری معادلات تابعی داشته است، به جای آن‌وکی مورد استفاده قرار گرفته است.

مطالعه و تحقیق درباره پایداری معادلات تابعی در ابعاد مختلف، به توسعه‌ی گسترده‌ای دست یافته است. در این مسیر، تغییراتی در فرمولاسیون تابع کنترل، تحدید و تغییر دامنه نگاشت‌ها در قضیه‌ی پایداری، استفاده از روش‌های نوین برای اثبات و بررسی پایداری و بررسی معادلات تابعی با ساختارهای جدید مانند معادلات تابعی مربعی و مکعبی و غیره، صورت گرفته است. از دیگر توسعات جالب در این حوزه می‌توان به بررسی پایداری در فضاهای مختلف، از جمله فضاهای نرم‌دار فازی، فضاهای غیر ازشمیدسی و فضاهای نرم‌دار احتمالی اشاره کرد. این توسعات نقش مهمی در اثبات و حفظ پایداری معادلات تابعی ایفا می‌کنند و نشان می‌دهند که مفهوم پایداری معادلات تابعی با توجه به چندین عامل و پارامتر می‌تواند در بسیاری از فضاها و ساختارها قابل تعمیم باشد [۴] - [۱۳].

تعریف ۱.۱. [۱۴] فرض کنید X مجموعه‌ای ناتهی است. تابع $d: X \times X \rightarrow [0, \infty]$ را متریک تعمیم یافته گوئیم، هرگاه برای هر $x, y, z \in X$ داشته باشیم

الف) $d(x, y) = 0$ اگر و تنها اگر $x = y$ ،

ب) $d(x, y) = d(y, x)$.

ج) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

تعریف ۲.۱. [۱۴] فرض کنید X فضای خطی حقیقی است. تابع حقیقی مقدار $\|\cdot\|$ روی X را شبه نرم^۸ گوئیم، هر گاه برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم

(QN1) $\|x\| \geq 0$ و $\|x\| = 0$ اگر و تنها اگر $x = 0$.

(QN2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ برای هر $\lambda \in \mathbb{R}$.

(QN3) $\|x + y\| \leq K(\|x\| + \|y\|)$ برای عدد ثابت $K \geq 1$.

در این صورت $(X, \|\cdot\|)$ را فضای شبه نرم‌دار^۹ گوئیم. فضای شبه نرم‌دار کامل را فضای شبه باناخ^{۱۰} گوئیم. شبه نرم $\|\cdot\|$ را p -نرم $(0 < p \leq 1)$ می‌نامیم اگر برای هر $x, y \in X$ رابطه زیر برقرار باشد.

(QN4) $\|x + y\|^p \leq \|x\|^p + \|y\|^p$

در این صورت زوج $(X, \|\cdot\|)$ را فضای شبه p -نرم‌دار و فضای شبه باناخ را فضای p -باناخ^{۱۱} گوئیم.

مثال ۳.۱. فضای برداری $\mathbb{R}$ مجهز به نرم $\|x\| = |x|^p$ برای $0 < p \leq 1$ را در نظر بگیرید. می‌توان نشان داد که $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ یک فضای شبه p -نرم‌دار است. برای اثبات نامساوی (QN4) از تابع کمکی $f(t) = |t|^p$ استفاده می‌کنیم.

⁸ quasi norm

⁹ quasi normed space

¹⁰ quasi-Banach space

¹¹ p-Banach space

تعریف ۴.۱. [۱۴] فرض کنید X فضای خطی حقیقی است. تابع $N: X \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ را شبه نرم فازی روی

X گوییم هر گاه برای هر $x, y \in X$ و هر $s, t \in \mathbb{R}$ داشته باشیم

$$N(x, c) = 0 \text{ برای هر } c \leq 0. \quad (\text{QFN1})$$

$$N(x, c) = 1 \text{ اگر و تنها اگر } x = 0 \text{ برای هر } c > 0. \quad (\text{QFN2})$$

$$N(cx, t) = N(x, \frac{t}{|c|}) \text{ اگر } c \neq 0. \quad (\text{QFN3})$$

$$N(x+y, k(s+t)) \geq \min\{N(x, s), N(y, t)\} \text{ برای تعدادی ثابت } k \geq 1. \quad (\text{QFN4})$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} N(x, t) = 1 \text{ برای هر } x \in X. \quad (\text{QFN5})$$

در این صورت (X, N) را فضای شبه نرم دار فازی^{۱۲} گوییم.

تعریف ۵.۱. [۶] فضای شبه نرم دار فازی (X, N) را فضای شبه p -نرم فازی گوییم، اگر در شرط زیر صدق کند.

$$N(x+y, \sqrt[p]{s+t}) \geq \min\{N(x, \sqrt[p]{s}), N(y, \sqrt[p]{t})\} \quad (\text{QFN6})$$

برای هر $x, y \in X$ ، هر $s, t > 0$ و $0 < p \leq 1$.

مثال ۶.۱. [۱۶] فرض کنید $(X, \|\cdot\|)$ فضای شبه p -نرم دار حقیقی باشد و

$$N(x, t) = \begin{cases} \frac{t}{t + \|x\|} & x \in X, t > 0 \\ 0 & t \leq 0, x \in X. \end{cases}$$

در این صورت (X, N) فضای شبه p -نرم فازی است.

مثال ۷.۱. تابع $N: X \times \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ را با ضابطه

$$N(x, t) = \begin{cases} \frac{t}{t + |x|^p} & t > 0, x \in \mathbb{R} \\ 0 & t \leq 0, x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

در نظر بگیرید. به آسانی می‌توان نشان داد $(\mathbb{R}, N)$ برای $0 < p \leq 1$ یک فضای شبه p -نرم دار فازی است. اگر در

تعاریف (۴.۱) و (۵.۱) قرار دهیم، $k = p = 1$ آنگاه N همان نرم فازی معمولی در مفهوم [۱۵] است. بنابراین،

شبه p -نرم فازی تعمیم یافته از نرم فازی معمولی در نظر گرفته می‌شود. فرض کنید (X, N) فضای شبه نرم دار

فازی است. در ادامه، مفاهیم همگرایی و دنباله‌های کشی در فضای شبه نرم دار فازی (X, N) را معرفی می‌کنیم.

دنباله $\{x_n\}$ در X را همگرا به $x \in X$ گوییم هرگاه برای هر $t > 0$ داشته باشیم،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} N(x_n - x, t) = 1.$$

در این صورت X حد دنباله $\{x_n\}$ نامیده می‌شود و می‌نویسیم

¹² quasi fuzzy normed space

$$N\text{-}\lim x_n = x$$

دنباله $\{x_n\}$ در X را کشی گوئیم اگر برای هر $\varepsilon > 0$ و $\delta > 0$ عدد $n_0 \in N$ موجود باشد به طوری که برای $m, n \geq n_0$ داشته باشیم

$$.N(x_m - x_n, \delta) > 1 - \varepsilon .$$

فضای شبه نرم دار فازی (X, N) را کامل گوئیم هرگاه هر دنباله کشی در آن همگرا باشد. فضای شبه p -نرم دار فازی کامل را فضای p -باناخ فازی گوئیم.

لم ۸.۱. [۱۶] فرض کنید (E, d) یک فضای متری تعمیم یافته کامل و $J: E \rightarrow E$ یک نگاشت اکیداً انقباضی با ثابت لیپ شیتز $L < 1$ باشد. اگر عدد صحیح مثبت n_0 وجود داشته باشد به طوری که

$$d(J^{n_0+1}x, J^{n_0}x) < \infty$$

برای $x \in E$ آنگاه داریم

(الف) دنباله $J^n x$ به یک نقطه ی ثابت x^* از J همگراست.

(ب) x^* یک نقطه ثابت یکتا از J در مجموعه $\{e \in E \mid d(J^{n_0}x, e) < \infty\}$ است.

(ج) $d(e, x^*) \leq \frac{1}{1-L} d(Je, e)$ برای هر $e \in E$ است.

۲- نتایج اصلی

در این بخش به بررسی پایداری هایزر-اولام^{۱۳} معادله تابعی

$$f(ax + by) + f(ax - by) = \frac{a}{2}f(x + y) + \frac{a}{2}f(x - y) + (2a^2 - a)f(x) + (2b^2 - a)f(y)$$

در فضای شبه p -نرم دار فازی با استفاده از روش نقطه ثابت می پردازیم.

در این مقاله فرض می کنیم $q = \frac{1}{p}, 0 \leq p \leq 1$ و X فضای برداری حقیقی، (Y, N) فضای p -باناخ فازی و

(Z, N') فضای نرم دار فازی باشد. برای نگاشت $f: X \rightarrow Y$ تعریف می کنیم.

(1.2)

$$Df(x, y) =$$

$$f(ax + by) + f(ax - by) - \frac{a}{2}f(x + y) - \frac{a}{2}f(x - y) - (2a^2 - a)f(x) - (2b^2 - a)f(y)$$

برای هر $x, y \in X$ و $a, b \geq 1$ با $a \neq 2b^2$.

قضیه ۱.۲. فرض کنیم $\phi: X^2 \rightarrow Z$ یک نگاشت باشد به طوری که برای عدد حقیقی مثبت α با $\alpha < a^2$ در

نامعادله زیر صدق می کند

(2.2)

$$N'(\phi(ax, ay), t) \geq N'(\alpha\phi(x, y), t)$$

و $\lim_{n \rightarrow \infty} N'(\phi(a^n x, a^n y), a^{2n} t) = 1$ برای هر $x, y \in X$ و هر $t > 0$. همچنین اگر $f : X \rightarrow Y$ یک نگاشت با $f(0) = 0$ باشد که برای هر $x, y \in X$ و هر $t > 0$ در نامعادله زیر صدق کند

$$N(Df(x, y), t) \geq N'(\phi(x, y), t).$$

سپس یک معادله تابعی درجه دوم منحصر بفرد $F : X \rightarrow Y$ صادق در (1.2) وجود دارد که

$$(4.2)$$

$$N(f(x) - F(x), t) \geq N'(\phi(x, 0), 2(a^{2p} - \alpha^p)^q t)$$

برای هر $x \in X$ و هر $t > 0$.

اثبات: فرض کنیم $y = 0$ در (3.2) سپس داریم

$$(5.2)$$

$$N(2f(ax) - 2a^2 f(x), t) \geq N'(\phi(x, 0), t)$$

برای هر $x \in X$ و هر $t > 0$. فرض کنیم $S := \{g \mid g : X \rightarrow Y, g(0) = 0\}$ و متر تعمیم یافته d روی S را به فرم زیر تعریف کنیم:

$$d(g, h) := \inf\{\delta \in \mathbb{R}_+ \mid N(g(x) - h(x),$$

$$\delta^q t) \geq N'(\phi(x, 0), t), \forall x \in X, \forall t > 0\}.$$

در ادامه نشان می‌دهیم (S, d) فضای متری تعمیم یافته کامل است [۴] و [۶].

به وضوح d متقارن است و برای هر $g \in S$ ، $d(g, g) = 0$ است. اگر $d(g, h) = 0$ آنگاه با استفاده از تعریف

d برای ثابت‌های x, t و هر $\delta \in \mathbb{R}_+$ داریم، $N(g(x) - h(x), t) \geq N'(\phi(x, 0), \frac{t}{\delta^q})$. بنابراین، برای هر x

و t ، رابطه

$$N(g(x) - h(x), t) = 1$$

برقرار است، یعنی $g = h$. حال کافی است نامساوی مثلی را ثابت کنیم. فرض کنیم $g, h, j \in S$

$$d(g, h) \leq \eta_1$$

و

$$d(h, j) \leq \eta_2$$

سپس،

$$N(g(x) - h(x), \eta_1^q t) \geq N'(\phi(x, 0), t)$$

و

$$N(h(x) - j(x), \eta_2^q t) \geq N'(\phi(x, 0), t)$$

برای هر $x \in X$ و هر $t > 0$. بنابراین

$$N(g(x) - j(x), (\eta_1 + \eta_2)^q t) = N(g(x) - j(x), \sqrt[p]{(\eta_1 + \eta_2)^q} t^p)$$

$$\geq \min\{N(g(x) - h(x), \eta_1^q t), N(h(x) - j(x), \eta_2^q t)\}$$

$$\geq N'(\phi(x, 0), t)$$

برای هر $x \in X$ و هر $t > 0$. بنابراین با استفاده از تعریف d داریم، $d(g, j) \leq \eta_1 + \eta_2$ ، لذا نامساوی مثلثی اثبات می‌شود.

فرض کنیم $\{g_n\}$ یک دنباله کشی در S و $x \in X$ ثابت باشد. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ ، $\varepsilon \in (0, 1)$ و $t > 0$ باشد به طوری که $N'(\phi(x, 0), t) > 1 - \varepsilon$. چون $\{g_n\}$ دنباله کشی در S است لذا برای $\delta^q < \frac{\varepsilon}{t}$ و $n_0 \in \mathbb{N}$ وجود

دارد به طوری که $d(g_n, g_m) < \frac{\varepsilon}{t}$ برای هر $n, m \geq n_0$. بنابراین برای هر $n, m \geq n_0$ داریم

$$\begin{aligned} N(g_n(x) - g_m(x), \varepsilon) &\geq N(g_n(x) - g_m(x), \delta^q t) \\ &\geq N'(\phi(x, 0), t) > 1 - \varepsilon \end{aligned}$$

لذا نتیجه می‌گیریم که $\{g_n(x)\}$ در Y یک دنباله کشی است. چون Y کامل است، بنابراین نگاشت $g: X \rightarrow Y$ وجود دارد به طوری که $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = g(x)$. حال ثابت می‌کنیم g متعلق به S است. فرض کنیم $\delta, \zeta > 0$ باشد.

برای دنباله $\{g_n(x)\}$ ، عدد طبیعی n_0 وجود دارد به طوری که برای هر $n \geq n_0$ و هر $m > 0$ داریم

$$N(g_n(x) - g_{n+m}(x), \delta^q t) \geq N'(\phi(x, 0), t)$$

برای ثابت $n \geq n_0$ و $t > 0$ داریم

$$\begin{aligned} N(g_n(x) - g(x), (\delta + \zeta)^q t) &\geq \min\{N(g_n(x) - g_{n+m}(x), \delta^q t), N(g_{n+m}(x) - g(x), \zeta^q t)\} \\ &\geq \min\{N'(\phi(x, 0), t), N(g_{n+m}(x) - g(x), \zeta^q t)\}. \end{aligned}$$

وقتی $m \rightarrow \infty$ داریم

$$\begin{aligned} N(g_n(x) - g(x), (\delta + \zeta)^q t) &\geq \min\{N'(\phi(x, 0), t), 1\} \\ &= N'(\phi(x, 0), t). \end{aligned}$$

بنابراین، نتیجه می‌شود که g متعلق به S است و لذا (S, d) فضای متری تعمیم یافته و کامل است. حال نگاشت $J: S \rightarrow S$ را برای هر $g \in S$ و هر $x \in X$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

(6.2)

$$Jg(x) := \frac{1}{a^2} g(ax).$$

فرض کنیم $g, h \in S$ ، به طوری که $d(g, h) < \varepsilon$ و $\varepsilon \in (0, \infty)$ ثابت دلخواه باشد. بنابراین برای هر $x \in X$ و هر $t > 0$ داریم

$$N(g(x) - h(x), \delta^q t) \geq N'(\phi(x, 0), t).$$

لذا با استفاده از تعریف (2.2) برای هر $x \in X$ و هر $t > 0$ داریم

$$\begin{aligned} N(Jg(x) - Jh(x), a^{-2} \delta^q t) &= N(a^{-2} g(ax) - a^{-2} h(ax), a^{-2} \delta^q t) \\ &\geq N'(\phi(ax, 0), t) \geq N'(\alpha \phi(x, 0), t). \end{aligned}$$

بنابراین $d(Jg, Jh) \leq (\frac{\alpha}{a^2})^p \delta$ یعنی برای هر $g, h \in S$ داریم

$$d(Jg, Jh) \leq (\frac{\alpha}{a^2})^p d(g, h).$$

لذا J یک تابع اکیداً انقباضی با ثابت لیپ شیتز $L = (\frac{\alpha}{a^2})^p < 1$ است. علاوه بر این، با استفاده از (5.2)، به دست

$$d(f, Jf) \leq (\frac{1}{2a^2})^p \text{ می آوریم}$$

بنابراین با استفاده از لم (8.1) دنباله $J^n f$ همگرا به نقطه ثابت F از J است، یعنی برای هر $x \in X$ و هر $t > 0$ داریم

$$F : X \rightarrow Y,$$

$$F(x) := N - \lim_{n \rightarrow \infty} J^n f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a^{2n}} f(a^n x)$$

و

$$(8.2)$$

$$F(ax) = a^2 F(x).$$

از طرفی F نقطه ثابت منحصر به فرد از J در مجموعه $S^* = \{g \in S : d(f, g) < \infty\}$ است. بنابراین $\delta \in \mathbb{R}_+$ وجود دارد به طوری که برای هر $x \in X$ و هر $t > 0$ داریم

$$N(g(x) - h(x), \delta^q t) \geq N'(\alpha \phi(x, 0), t).$$

همچنین

$$d(f, F) \leq \frac{1}{1-L} d(f, Jf) \leq \frac{1}{2^p (a^{2p} - \alpha^p)}.$$

این نشان می‌دهد که نامعادله (4.2) برای هر $x \in X$ و هر $t > 0$ برقرار است.

نهایتاً کافی است نشان دهیم F در (1.2) صدق می‌کند. با استفاده از (7.2) داریم

$$DF(x, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{-2n} Df(a^n x, a^n y)$$

با جایگذاری x و y به ترتیب با $a^n x$ و $a^n y$ در (3.2) برای هر $x, y \in X$ و هر $t > 0$ داریم

$$N(\frac{1}{a^{2n}} Df(a^n x, a^n y), t) \geq N'(\phi(a^n x, a^n y), a^{2n} t).$$

چون $\lim_{n \rightarrow \infty} N'(\phi(a^n x, a^n y), a^{2n} t) = 1$ ، می‌توان نتیجه گرفت $N(DF(x, y), t) = 1$ برای هر $x, y \in X$ و هر

$t > 0$. بنابراین $DF(x, y) = 0$ و این یعنی F در معادله تابعی (1.2) صدق می‌کند.

قضیه ۲.۲. فرض کنیم $\phi : X^2 \rightarrow Z$ یک نگاشت باشد که برای عدد حقیقی مثبت α با $\alpha > a^2$ در نامعادله زیر صدق می‌کند.

$$(9.2)$$

$$N'(\phi(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}), t) \geq N'(\phi(x, y), \alpha t)$$

و همچنین برای هر $x, y \in X$ و هر $t > 0$ داشته باشیم $\lim_{n \rightarrow \infty} N'(a^{2n} \phi(\frac{x}{a^n}, \frac{y}{a^n}), t) = 1$

اگر $f: X \rightarrow Y$ یک نگاشت با $f(0) = 0$ باشد که در نامعادله (3.2) برای هر $x, y \in X$ و هر $t > 0$ صدق کند. آنگاه یک معادله تابعی درجه دوم منحصر به فرد $F: X \rightarrow Y$ صادق در معادله (1.2) وجود دارد که برای هر $x \in X$ و هر $t > 0$ رابطه زیر برقرار باشد

$$(10.2)$$

$$N(f(x) - F(x), t) \geq N'(\phi(x, 0), 2(\alpha^p - a^{2p})^q t).$$

اثبات: اثبات این قضیه به طور کامل مشابه با قضیه (1.2) می‌باشد و بنابراین حذف خواهد شد.

نتیجه ۳.۲. فرض کنیم X فضای نرم‌دار حقیقی با نرم $\|\cdot\|$ ، (Z, N') فضای نرم‌دار فازی، $z_0 \in Z$ و $l \in \{-1, 1\}$ باشد. همچنین فرض کنیم λ عدد حقیقی مثبت با $\lambda \neq 2$ باشد به طوری که $a^{l(\lambda-2)p} < 1$. اگر $f: X \rightarrow Y$ یک نگاشت با $f(0) = 0$ باشد که برای هر $x, y \in X$ و هر $t > 0$ در نامعادله

$$N(Df(x, y), t) \geq N'((\|x\|^\lambda + \|y\|^\lambda)z_0, t)$$

صدق کند. آنگاه معادله تابعی درجه دوم منحصر به فرد $F: X \rightarrow Y$ وجود دارد به طوری که برای هر $x \in X$ و هر $t > 0$ نامعادله زیر برقرار است

$$N(f(x) - F(x), t) \geq N'(\|x\|^\lambda z_0, 2[l(a^{2p} - a^{\lambda p})]^q t).$$

اثبات:

با جایگذاری $\phi(x, y) = (\|x\|^\lambda + \|y\|^\lambda)z_0$ برای هر $x, y \in X$ و با انتخاب $\alpha = a^\lambda$ در قضایای (1.2) و (2.2) نتیجه حاصل می‌شود.

نتیجه ۴.۲. فرض کنیم X فضای نرم‌دار حقیقی با نرم $\|\cdot\|$ و (Z, N') فضای نرم‌دار فازی، $z_0 \in Z$ و $l \in \{-1, 1\}$ باشد. همچنین فرض کنیم λ و μ اعداد حقیقی مثبت با $\lambda + \mu \neq 2$ باشد به طوری که $a^{l(\lambda+\mu-2)p} < 1$. اگر $f: X \rightarrow Y$ یک نگاشت با $f(0) = 0$ باشد که برای هر $x, y \in X$ و هر $t > 0$ در نامعادله

$$N(Df(x, y), t) \geq N'(\|x\|^\lambda \|y\|^\mu + (\|x\|^{\lambda+\mu} + \|y\|^{\lambda+\mu})z_0, t)$$

صدق کند. آنگاه معادله تابعی درجه دوم منحصر به فرد $F: X \rightarrow Y$ وجود دارد به طوری که برای هر $x \in X$ و هر $t > 0$ نامعادله زیر برقرار است

$$N(f(x) - F(x), t) \geq N'(\|x\|^{\lambda+\mu} z_0, 2[l(a^{2p} - a^{(\lambda+\mu)p})]^q t).$$

اثبات: این نتیجه به طور مستقیم با در نظر گرفتن

$$\phi(x, y) = (\|x\|^\lambda \|y\|^\mu + (\|x\|^{\lambda+\mu} + \|y\|^{\lambda+\mu})z_0$$

برای هر $x, y \in X$ و $\alpha = a^{\lambda+\mu}$ در قضیه‌های (1.2) و (2.2) به دست می‌آید.

مثال ۵.۲. فرض کنید N و N' فضای p -باناخ فازی تعریف شده در مثال (7.1) به ازای $p = \frac{1}{2}$ باشد. توابع $\phi(x, y) := x + y$ و $f(x) = x^2$ و ثابت‌های $a = 2, b = 3, \alpha = 2$ را در نظر بگیرید. واضح است که رابطه (2.2) برقرار است و همچنین نامعادله

$$1 = N(0, t) \geq N(x + y, t)$$

برای هر $x, y \in \mathbb{R}$ به صورت بدیهی برقرار می‌باشد. بنابراین طبق قضیه فوق، تابع منحصر به فردی مانند $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ وجود دارد که در نامعادله زیر صدق کند

$$\frac{t}{t + |F(x) - x^2|^{\frac{1}{2}}} \geq \frac{(12 - 8\sqrt{2})t}{(12 - 8\sqrt{2})t + |x|^{\frac{1}{2}}}.$$

۳- نتیجه‌گیری

در این مقاله فضاهای شبه p -نرم‌دار فازی و پایداری معادلات تابعی درجه دوم در این فضاها با استفاده از روش نقطه ثابت بررسی شد. در ابتدا، فضای شبه p -نرم‌دار فازی که یک توسعه جدید از فضاهای نرم‌دار فازی است، تعریف شد. این فضاها، خواص منحصر به فردی دارند که در مقاله مورد بررسی قرار گرفتند.

سپس، نوعی از معادلات تابعی درجه دوم توسعه یافته را معرفی و پایداری این معادلات را در فضاهای شبه p -نرم‌دار فازی را ثابت کردیم. این توسعه جدید، به ما امکان می‌دهد تا به طور دقیق‌تر و کامل‌تر، خواص و رفتار معادلات تابعی درجه دوم را در فضاهای شبه p -نرم‌دار فازی بررسی کنیم.

برای اثبات پایداری از روش نقطه ثابت و تکنیک‌های ریاضی مناسب استفاده کردیم و شرایط پایداری برای این نوع معادلات را در فضاهای شبه p -نرم‌دار فازی مورد بررسی قرار دادیم.

فهرست منابع

- [1] Ulam. S. M. (2004). Problems in modern mathematics. Courier Corporation.
- [2] Hyers. H. D. (1941) On the stability of the linear functional equation, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 27, 222-224.
- [3] Rassias. T. M. (1978) On the stability of the linear mapping in Banach spaces, Proceedings of the American Mathematical Society, 72, 297-300.
- [4] Mihet. D and Radu. V. (2008) On the stability of the additive Cauchy functional equation in random normed spaces, J. Math. Anal. Appl, 343, 567-572.
- [5] Mirmostafae. A. K. , Mirzavaziri. M. and Moslehian. M. S. (2008) Fuzzy stability of the Jensen functional equation, Fuzzy Sets and Systems, 159, 730-738.
- [6] A.K. Mirmostafae, A fixed point approach to almost quartic mappings in quasi fuzzy normed spaces, Fuzzy Sets Syst. 160 (2009) 1653-1662..
- [7] Modarres Mosadegh. S. M. S. and Movahednia. E. (2018) Stability of preserving lattice cubic functional equation in Menger probabilistic normed Riesz spaces, Journal of Fixed Point Theory and Applications, 20, 34-43.
- [8] Movahednia. E. and Mursaleen. M. (2016) Stability of a generalized quadratic functional equation in intuitionistic fuzzy 2-normed space, Filomat, 30, 449-457.
- [9] Movahednia. E., Cho. Y, Park. C and Paokanta. S. (2020), On approximate solution of lattice functional equations in Banach f -algebras, AIMS Mathematics, 5, 5458-5469.
- [10] Park. C, Eshaghi Gorgji. M and Saadati. R. (2012) Random homomorphisms and random derivations in random normed algebras via fixed point method, J. Inequal. Appl, 13, 1-4.
- [11] Salehi. N and Modarres. S. M. S (2020) A fixed point method for stability of involutions on multi-Banach algebra, Journal of Fixed Point Theory and Applications, 22.
- [12] Movahednia. E. (2011) Fuzzy stability of quadratic functional equations in general cases, International Scholarly Research Notices, 1--9.
- [13] Gordji. M. E., Alizadeh. Z., Khodaei. H. and Park. C. (2012) On approximate homomorphisms: a fixed point approach, Mathematical Sciences, 6.1, 1-8.
- [14] Cadariu. L and Radu. V. (2003) Fixed points and the stability of Jensen's functional equation, J. Inequal. Pure Appl. Math, 4, Art. ID 4.

- [15] Bag. T. and Samanta .S. K. (2003) Finite dimensional fuzzy normed linear spaces, *Journal of Fuzzy Mathematics*, 11, 687—705.
- [16] Diaz. J and Margolis. B. (1968) A fixed point theorem of the alternative for contractions on a generalized complete metric space, *Bull. Amer. Math. Soc*, 74, 305-309.
- [17] Katsaras. A. K. (1984) Fuzzy topological vector spaces 2, *Fuzzy Sets and Systems*, 12, 143—154.
- [18] Kramosil. I. and Michalek. J. (1975) Fuzzy metric and statistical metric spaces, *Kybernetika*, 11, 326—334.
- [19] Lo'lo'. P, Movahednia. E, and De la Sen M. (2022) Hyers Stability and Multi Fuzzy Banach Algebra. *Mathematics*. 10(1):106. <https://doi.org/10.3390/math10010106>