دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال دهم، شماره چهل و هفتم، فروردین و اردیبهشت ۱۴۰۳
شماره شاپا: ۲۵۸۸x-۵۸۸
دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

نگاشت‌های غیرپخشی برگمن مجموعه مقدار در فضاهای باناخ

روشنک لطفی‌کار[1]*، غلامرضا زمانی اسکندانی[2]، معصومه رئیسی [3]

(۱) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه ایلام، ایلام، ایران
(۲و۳) گروه ریاضی محض، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه تبریز، تبریز، ایران

تاریخ ارسال: ۱۴۰۰/۰۸/۱۹ تاریخ پذیرش: ۱۴۰۱/۰۹/۱۴

چکیده

در سال ۲۰۰۸ کوساکا و تاکاهاشی در فضاهای باناخ هموار اکیدا محدب انعکاسی نگاشت‌های غیرپخشی را معرفی و به مطالعه خواص آنها پرداختند [۱]. بعد از آن محققان زیادی به مطالعه روی این نگاشت‌ها پرداختند و چندین قضیه در مورد نقاط ثابت این نگاشت‌ها را ثابت کردند. لازم به ذکر است که نگاشت‌های غیرپخشی به خاطر کاربردهای فراوانی که دارند از اهمیت زیادی در آنالیز غیرخطی برخوردارند. در این مقاله به معرفی و بررسی نگاشت‌های غیرپخشی مجموعه مقدار، که آنها را نگاشت‌های غیرپخشی برگمن مجموعه مقدار می‌نامیم، خواهیم پرداخت. برای این منظور فاصله هاسدرف برگمن را روی زیر مجموعه‌های بسته و کراندار یک فضای باناخ تعریف کرده و خواص آن را بررسی خواهیم کرد. بعلاوه یک قضیه همگرایی ضعیف برای تقریب نقطه ثابت مشترکی از یک خانواده متناهی از نگاشت‌های غیرپخشی برگمن مجموعه مقدار در فضاهای باناخ ارائه خواهیم کرد. در نهایت یک قضیه وجودی برای نقاط ثابت نگاشت‌های غیرپخشی برگمن مجموعه مقدار را اثبات خواهیم کرد. نتایج ارائه شده در این مقاله برخی از نتایج موجود را نیز تعمیم و بهبود می‌دهد.

واژه‌های کلیدی: نگاشت‌های غیرپخشی، متر هاسدورف، فاصله برگمن، نقطه ثابت.

نویسنده مسئول: Email: r.lotfikar@ilam.ac.ir

۱- مقدمه

فرض کنید C یک زیرمجموعه محدب، بسته و ناتهی از فضای هیلبرت H باشد. نگاشت $T: C \to C$ را غیرپخشی گویند هرگاه به ازای هر $x, y \in C$ داشته باشیم:

$$۲\|Tx - Ty\|^۲ \le \|x - Ty\|^۲ + \|y - Tx\|^۲$$

اخیراً ایموتو و تاکاهاشی[۲] نشان داده‌اند که نگاشت $T: C \to C$ غیر پخشی است اگر و تنها اگر به ازای هر $x, y \in C$ داشته باشیم:

$$\|Tx - Ty\|^۲ \le \|x - y\|^۲ + ۲\langle x - Tx,\ y - Ty\rangle.$$

فرض کنید C زیرمجموعه ناتهی از فضای هیلبرت H باشد، مجموعه همه زیرمجموعه‌های ناتهی، بسته و کراندار C را با نماد CB(C) و مجموعه همه زیر مجموعه‌های ناتهی و فشرده C را با نماد K(C) نشان خواهیم داد. متر هاسدرف H روی CB(C) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$H(A, B): max\{sup_{x\in A} d(x, B), sup_{y\in B} d(y, A)\}$$

به ازای هر A و B از CB(C) که در آن $\{d(x, B) = \inf\,(d(x, z): z \in B\}$

فرض کنید $T: X \to ۲^x$ یک نگاشت مجموعه مقدار باشد، $x \in X$ را نقطه ثابت T می‌گویند هرگاه $x \in T(x)$. مجموعه همه نقاط ثابت T را با نماد F(T) نشان می دهیم.

چولمجیاک و همکارانش در [۳،۴] نگاشت‌های k- غیرپخشی مجموعه مقدار را به صورت زیر تعریف کرده‌اند:

$$H^۲(Tx, Ty) \le k\big(d^۲(x, Ty) + d^۲(Tx, y)\big), \qquad \forall x, y \in C,$$

که در آن $k \in (۰, \infty)$. برای $k = \frac{۱}{۲}$ این رده از نگاشتها را نگاشت‌های غیرپخشی نامیدند. آنها همچنین روش تکراری زیر را برای تقریب یک نقطه ثابت مشترک خانواده متناهی از نگاشت‌های غیرپخشی $T_i: C \to K(C)$ ارایه کردند:

$$x_{n+۱} \in \alpha_{۰,n} x_n + \alpha_{i,n} T_i x_n \qquad n \ge ۱$$

و تحت شرایطی ثابت کردند که دنباله$\{x\}$ همگرای ضعیف به عضوی از$\bigcap_{i=۱}^{m} F(T_i)$ است.

در سال ۱۹۶۷ برگمن [۵] فاصله برگمن را معرفی و به کاربردهای موثر آن در مسایل آنالیز غیرخطی پی برد. فرض کنید$f: X \to [۰, +\infty[$ یک تابع لژاندر باشد، فاصله برگمن نسبت به f تابع $D_f: dom\, f \times intdom\, f \to [۰, +\infty]$ می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_f(y, x) := f(y) - f(x) - \langle y - x, \nabla f(x)\rangle.$$

لازم به یادآوری است که D_f یک متر به معنای متعارف آن نمی‌باشد. واضح است که $D_f(x, x) = ۰$ ولی $D_f(x, y) = ۰$ ممکن است $x = y$ را نتیجه ندهد، با این حال اگر f تابع لژاندر باشد، این رابطه را خواهیم داشت [۶]. فاصله برگمن در کل متقارن نمی‌باشد و در نامساوی مثلثی صدق نمی‌کند، اما به ازای هر x از دامنه f و هر y از درون دامنه f در خاصیت سه نقطه‌ای زیر صدق می کند:

$$D_f(x, y) + D_f(y, z) - D_f(x, z) = \langle x - y, \nabla f(z) - \nabla f(y)\rangle.$$

همچنین فاصله برگمن به ازای هر y و w متعلق به دامنه‌ی f و هر x و z متعلق به درون دامنه f در خاصیت چهار نقطه‌ای زیر صدق می کند:

$$D_f(x, y) + D_f(w, z) - D_f(x, z) - D_f(w, y) = \langle x - w, \nabla f(z) - \nabla f(y)\rangle.$$

به آسانی دیده می‌شود که اگر X فضای هیلبرت و $f(x) = \|x\|^۲$، آنگاه $D_f(x, y) = \|x - y\|^۲$.

فاصله برگمن کاربردهای زیادی در مسایل مختلف آنالیز غیرخطی دارد که علاقمندان می‌توانند به [۶،۱۶] مراجعه کنند.

در این مقاله، ابتدا فاصله هاسدرف برگمن را روی زیر مجموعه‌های بسته و کراندار یک فضای باناخ تعریف کرده، سپس با استفاده از این مفهوم نگاشت‌های غیرپخشی برگمن مجموعه مقدار را در فضاهای باناخ تعریف کرده، به بررسی خواص این نگاشت‌ها خواهیم پرداخت. همچنین یک قضیه همگرایی ضعیف برای تقریب نقطه ثابت مشترکی از یک خانواده متناهی از نگاشت‌های غیرپخشی برگمن مجموعه مقدار در فضاهای باناخ ارائه خواهیم داد. در نهایت یک قضیه وجودی برای نقاط ثابت نگاشت‌های غیرپخشی برگمن ثابت خواهیم کرد. نتایج ارایه شده در این مقاله برخی از نتایج موجود را تعمیم می‌دهد.

۲-پیش‌نیازها

در این بخش به یادآوری برخی مفاهیم و لم‌های مقدماتی که در نتایج اصلی این مقاله مورد استفاده قرار خواهند گرفت، می‌پردازیم. در سراسر این مقاله X را یک فضای باناخ حقیقی انعکاسی و C را زیرمجموعه‌ای محدب، بسته و ناتهی از X در نظر می گیریم. اگر $\{x_n\}$ یک دنباله در X و $x \in X$ باشد، همگرایی ضعیف $\{x_n\}$ به x را با $x_n \rightharpoonup x$ و همگرایی قوی $\{x_n\}$ به x را با $x_n \to x$ نمایش می‌دهیم. فرض کنید $f : X \to (-\infty,+\infty]$ تابعی سره، محدب و نیم‌پیوسته پایین باشد. دامنه f را با نماد $dom\ f$ نمایش می‌دهیم که برابر مجموعه $\{x \in X: f(x) < \infty\}$ است. فرض کنید $x \in dom\ f$. زیر مشتق f در x به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\partial f(x) = \{\xi \in X^*: f(x) + \langle y - x, \xi\rangle \leq f(y), \forall y \in X\},$$

و مزدوج فنچل f تابع $f^*: X^* \to (-\infty,\infty]$ می باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f^*(\xi) = sup\{\langle x,\xi\rangle - f(x): x \in X\}.$$

می‌دانیم که $x^* \in \partial f(x)$ اگر وتنها اگر

$$f(x) + f^*(\xi) = \langle x,\xi\rangle,$$

وf^* تابعی سره، محدب و نیم‌پیوسته پایین می‌باشد. تابع $f : X \to (-\infty,+\infty]$ را محدود گویند هرگاه $domf^* = X^*$. فرض کنید $f : X \to (-\infty,+\infty]$ تابعی محدب باشد، مشتق سوئی f در نقطه x و در جهت y را با نماد $f^\circ(x,y)$ نشان می‌دهند و به صورت زیر تعریف می شود:

$$f^\circ(x,y) := \lim_{t\downarrow ۰} \frac{f(x+ty) - f(x)}{t}.$$

با میل دادن $t \to ۰$، اگر حد فوق به ازای هر y موجود باشد f را در نقطه x مشتق‌پذیر گاتو می‌گویند. در این صورت گرادیان f در نقطه x نگاشت خطی $\nabla f(x)$ می‌باشد که به ازای هر y متعلق به X به فرم $\langle y, \nabla f(x)\rangle := f^\circ(x,y)$ تعریف می‌شود. نگاشت f را مشتق‌پذیر گاتو گویند هر گاه f در هر نقطه از x متعلق به درون دامنه f مشتق‌پذیر گاتو باشد. اگر حد فوق برای هر $y \in x$ که $\|y\| = ۱$ به طور یکنواخت موجود باشد، تابع f را در x مشتق پذیر فرشه گویند. f را روی مجموعه $E \subseteq X$ به طور یکنواخت مشتق پذیر فرشه گویند، هرگاه حد فوق برای هر $x \in E$ و هر $y \in X$ که $\|y\| = ۱$ به طور یکنواخت به دست آمده باشد.

تعریف ۲-۱ نگاشت f را لژاندر گویند هرگاه در شرایط زیر صدق کند:

(L۱) ∂f روی دامنه‌اش تک مقداری و درون دامنه f ناتهی باشد،

(L۲) ∂f^* روی دامنه‌اش تک مقداری و درون دامنه f^* ناتهی باشد.

چون X انعکاسی فرض شده است، $(\partial f)^{-۱} = \partial f^*$ (مرجع [۱۷] صفحه۸۲) که این همراه با شرایط (L۱) و (L۲) برابری‌های زیر را ایجاب می‌کند:

$$\nabla f = (\nabla f^*)^{-۱}, ran\,\nabla f = dom\nabla f^* = int\ domf^*, ran\,\nabla f^* = dom\nabla f = int\ dom\,f$$

همچنین شرایط $(L1)$ و $(L2)$ همراه با قضیه ۵-۴ از [۶] ایجاب می‌کند که نگاشت‌های f و f^* در درون دامنه‌هایشان اکیداً محدب می باشند و f تابع لژاندر است اگر و تنها اگر f^* لژاندر باشد. مثال‌های جالب بیشتری از نگاشت‌های لژاندر در [۶] مورد بررسی قرار گرفته‌اند. اگر X یک فضای باناخ اکیداً محدب و هموار باشد آنگاه نگاشت‌های $\frac{1}{p}\|.\|^p$ برای هر $p \in (1,\infty)$ لژاندر هستند.

نگاشت لژاندر $f: x \to (-\infty,+\infty]$ را در نقطه $x \in int\ dom\ f$ کلا محدب گویند هرگاه اندازه تحدب کلی f در x، یعنی نگاشت $v_f(x,\cdot): [0,+\infty) \to [0,+\infty]$ که به صورت

$$v_f(x,t) := inf\{D_f(y,x) : y \in dom\ f, \|y-x\| = t\},$$

تعریف می‌شود، برای هر $t > 0$ مثبت باشد. این نماد برای اولین بار توسط بوتناریو و یوسم [۸] معرفی شده است. فرض کنید E زیرمجموعه ناتهی از X باشد، اندازه تحدب کلی نگاشت f روی E به صورت

$$v_f(E,t) := inf\{v_f(x,t) : x \in E \cap int\ dom\ f\},$$

تعریف می شود. نگاشت f را روی زیر مجموعه های کراندار محدب کلی گوییم هر گاه v_f برای هر زیر مجموعه ناتهی و کراندار E و به ازای هر $t > 0$ مثبت باشد.

از لم‌های زیر برای اثبات نتایج خود استفاده خواهیم کرد.

لم۲-۲ : [۱۳] اگر نگاشت $f: X \to \mathbb{R}$ لژاندر، بطور یکنواخت مشتق پذیر فرشه و روی زیر مجموعه های کراندار X کراندار باشد، آنگاه ∇f روی زیرمجموعه‌های کراندار E به طور یکنواخت پیوسته است.

لم۲-۳: [۸] نگاشت لژاندر $f: X \to (-\infty,+\infty]$ روی زیرمجموعه های کراندار X کلا محدب است اگر و تنها اگر برای هر دنباله کراندار $\{x_n\}$ در $int\ domf$ و هر دنباله $\{y_n\}$ در $domf$ داشته باشیم:

$$\lim_{n\to\infty} D_f(y_n,x_n) = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \|y_n - x_n\| = 0.$$

لم ۲-۴:[۱۴] فرض کنید $f: X \to (-\infty,+\infty]$ مشتق پذیر گاتو و کلاً محدب باشد. اگر $x_0 \in X$ و دنباله $\{D_f(x_n,x_0)\}$ کراندار باشد، آنگاه دنباله $\{x_n\}$ نیز کراندار است.

لم۲-۵: [۱۸] فرض کنید $f: X \to \mathbb{R}$ نگاشت لژاندر باشد به طوری که ∇f^* روی زیرمجموعه‌های کراندار $int\ dom\ f^*$ کراندار باشد. اگر $x_0 \in X$ و $\{D_f(x_0,x_n)\}$ کراندار باشند، در این صورت $\{x_n\}$ نیز کراندار است.

تصویر برگمن $x \in int\ dom\ f$ تحت f روی زیرمجموعه ناتهی، بسته و محدب $C \subset int\ dom\ f$ ، بردار منحصر به فرد $\overleftarrow{Proj}_C^f(x) \in C$ می‌باشد که به صورت زیر تعریف می شود [۵]:

$$D_f(\overleftarrow{Proj}_C^f(x),x) = inf\{D_f(y,x): y \in C\}.$$

مانند تصویر متری در فضاهای هیلبرت، تصویر برگمن متناظر با توابع کلاً محدب و مشتق پذیر گاتو دارای مشخصه تغییراتی زیر است که برای اثبات می توان به نتیجه ۴-۴، [۱۰] مراجعه کرد.

لم ۲-۶: فرض کنید f نگاشت مشتق پذیر گاتو و کلاً محدب روی درون دامنه f باشد. همچنین فرض کنید $x \in int\ dom\ f$ و $C \subset int\ dom\ f$ بسته، محدب و ناتهی باشد. اگر $\hat{x} \in C$ ، آنگاه گزاره های زیر معادلند.

۱) $\hat{x} = \overleftarrow{Proj}_C^f(x)$

۲) $\hat{x} \in C$ جواب منحصربه فرد نامساوی تغییراتی زیر می‌باشد:

$$\langle z-y, \nabla f(x) - \nabla f(z)\rangle \geq 0, \quad \forall y \in C.$$

۳) $\hat{x} \in C$ جواب منحصربه فرد نابرابری زیر می‌باشد:

$$D_f(y,z)+D_f(z,x)\le D_f(y,x),\qquad \forall y\in C.$$

مشابه مقالات [۲۰،۱۹]، تابع $V_f: X\times X^*\to[\cdot,+\infty]$ وابسته به نگاشت f را به صورت

$$V_f(x,x^*)=f(x)-\langle x,x^*\rangle+f^*(x^*),\quad \forall x\in X, x^*\in X^*,$$

تعریف می‌کنیم، بنابراین برای هر $x\in X$ و $x^*\in X^*$ داریم:

$$V_f(x,x^*)=D_f(x,\nabla f^*(x^*)).$$

علاوه‌براین، با استفاده از نامعادله زیرمشتق برای هر $x\in X$ و $x^*,y^*\in X^*$ داریم:

$$V_f(x,x^*)+\langle\nabla f^*(x^*)-x,y^*\rangle\le V_f(x,x^*+y^*),$$

که برای اثبات به مرجع [۱] مراجعه شود. همچنین اگر $f: X\to(-\infty,+\infty]$ محدب، سره و نیم‌پیوسته پایین باشد، آنگاه $f^*: X^*\to(-\infty,+\infty]$ محدب، سره و نیم‌پیوسته پایین ستاره می‌باشد [۲۱]. بنابراین V_f نسبت به متغیر دوم محدب است و برای هر $z\in X$ داریم:

$$D_f\left(z,\nabla f^*\left(\sum_{i=1}^{N}t_i\,\nabla f(x_i)\right)\right)\le\sum_{i=1}^{N}t_i\,D_f(z,x_i),$$

که در آن $\{x_i\}_{i=۱}^N\subset X$، $\{t_i\}_{i=۱}^N\subset(\cdot,۱)$، $\sum_{i=۱}^N t_i=۱$.

فرض کنید B و S به ترتیب گوی واحد بسته و دیسک واحد از فضای باناخ X باشد. همچنین برای هر $r>\cdot$، فرض کنید $rB=\{z\in X:\|z\|\le r\}$. نگاشت $f: X\to\mathbb{R}$ روی زیرمجموعه‌های کراندار X محدب یکنواخت نامیده می‌شود اگر برای هر $t,r>\cdot$ داشته باشیم $\rho_r(t)>\cdot$ که در آن $\rho_r:[\cdot,\infty)\to[\cdot,\infty]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho_r(t)=\inf_{x,y\in rB,\|x-y\|=t,\alpha\in(\cdot,۱)}\frac{\alpha f(x)+(۱-\alpha)f(y)-f(y)-f(\alpha x+(۱-\alpha)y)}{\alpha(۱-\alpha)},$$

به ازاء هر $t>\cdot$.

نگاشت ρ_r اندازه تحدب یکنواخت تابع f نامیده می‌شود و یک نگاشت صعودی می‌باشد.

لم۲-۷: [۲۲] فرض کنید X یک فضای باناخ، $r>\cdot$ و f روی زیرمجموعه‌های کراندار X محدب یکنواخت باشد. در این صورت برای هر $i,j\in\{\cdot,۱,\dots,n\}$، $x_k\in rB$، $\alpha_k\in(\cdot,۱)$ با فرض $\sum_{k=\cdot}^{n}\alpha_k=۱$ داریم
:

$$f(\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\,x_k)\le\sum_{k=0}^{n}\alpha_k\,f(x_k)-\alpha_i\alpha_j\rho_r(\|x_i-x_j\|),$$

که‌درآن ρ_r اندازه تحدب یکنواخت نگاشت f می‌باشد.

نگاشت f روی زیرمجموعه‌های کراندار هموار یکنواخت [۲۳] نامیده می‌شود، اگر برای هر $r>\cdot$، $\lim_{t\downarrow\cdot}\frac{\delta_r(t)}{t}=\cdot$ که در آن $\delta_r:[\cdot,\infty)\to[\cdot,\infty]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\sigma_r(t)=\sup_{x\in rB,y\in S,\alpha\in(\cdot,۱)}\frac{\alpha f(x+(۱-\alpha)ty)+(۱-\alpha)f(x-\alpha ty)-f(x)}{\alpha(۱-\alpha)},\forall t\ge\cdot.$$

نگاشت f را ابرافزاینده گویند اگر $\lim_{\|x\|\to\infty}\frac{f(x)}{\|x\|}=+\infty$.

قضیه۲-۸ : [۲۳] فرض کنید $f: X \to \mathbb{R}$ نگاشت محدب و ابرافزاینده باشد. در این صورت گزاره های زیر معادلند:

۱) f روی زیرمجموعه‌های کراندار X ، کراندار و هموار یکنواخت است،

۲) f مشتق پذیر فرشه و ∇f روی زیرمجموعه‌های کراندار X به طور یکنواخت پیوسته نرم به نرم می‌باشد،

۳) $dom\ f^* = X^*$ ، f^* ابرافزاینده و محدب یکنواخت روی زیرمجموعه‌های کراندار X^* است.

قضیه۲-۹: [۲۳] فرض کنید $f: X \to \mathbb{R}$ محدب و روی زیرمجموعه‌های کراندار X کراندار باشد. آنگاه گزاره‌های زیر معادلند:

۱) f ابرافزاینده و روی زیرمجموعه‌های کراندار X محدب یکنواخت است.

۲) $dom\ f^* = X^*$ و f^* روی زیرمجموعه‌های کراندار X^* کراندار و هموار یکنواخت است.

۳) $dom\ f^* = X^*$ و f^* مشتق پذیر فرشه و ∇f^* روی زیر مجموعه های کراندار X^* یکنواخت پیوسته است.

قضیه ۲-۱۰: [۹] فرض کنید $f: X \to (-\infty, +\infty]$ نگاشت لژاندر باشد. نگاشت f روی زیرمجموعه‌های کراندار کلا محدب است اگر و تنها اگر روی مجموعه های کراندار محدب یکنواخت باشد.

فرض کنید $۱ < q \leq ۲ \leq p$ که در آن $\frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = ۱$. اندازه تحدب عبارت است از نگاشت $\delta_X: [۰,۲] \to [۰,۱]$ که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta_X(\varepsilon) = inf\ \left\{۱ - \frac{\|x+y\|}{۲}:\ \|x\| = \|y\| = ۱, \|x-y\| \geq \varepsilon\right\}.$$

X را محدب یکنواخت گویند اگر برای هر $\varepsilon \in (۰,۲]$ داشته باشیم $\delta_X(\varepsilon) > ۰$ و آن را p- محدب یکنواخت گویند اگر ثابت $C_p > ۰$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $\varepsilon \in (۰,۲]$، $\delta_X(\varepsilon) \geq C_p \varepsilon^p$.

اندازه همواری عبارت است از نگاشت $\rho_X: [۰, \infty) \to [۰, \infty)$ که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\rho_X(\tau) = sup\ \left\{\frac{\|x+\tau y\| + \|x-\tau y\|}{۲} - ۱: \|x\| = \|y\| = ۱\right\}.$$

X را هموار گویند اگر برای هر $\tau > ۰$، $\rho_X(\tau) > ۰$ و آن را هموار یکنواخت گویند اگر $\lim_{\tau \to ۰} \frac{\rho_X(\tau)}{\tau} = ۰$ و q- هموار یکنواخت گویند، اگر ثابت $C_q > ۰$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $\tau > ۰$ داشته باشیم $\rho_\varepsilon(\tau) \leq C_p \tau^q$.

برای فضای p- محدب یکنواخت، رابطه زیر بین نرم و فاصله برگمن برقرار است [۲۴]:

$$\tau\|x-y\|^p \leq D_{\frac{۱}{p}\|.\|^p}(x,y) \leq \langle x-y, J_X^p(x) - J_X^p(y)\rangle,$$

که در آن $\tau > ۰$ ثابت و نگاشت دوگان $J_X^p: X \to ۲^{X^*}$ برای هر $x \in X$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J_X^p(x) = \{f \in X^*, \langle x, f\rangle = \|x\|^p, \|f\| = \|x\|^{p-۱}\}.$$

قضیه ۲-۱۱: [۲۵] اگر x فضای باناخ محدب یکنواخت باشد، آنگاه نگاشت $f_p(.) = \frac{۱}{p}\|.\|^p$ کلا محدب است.

۳-نتایج اصلی

در این بخش ابتدا فاصله هاسدرف برگمن را روی $CB(X)$ تعریف کرده سپس به معرفی دسته جدیدی از نگاشت‌های مجموعه مقدار روی فضای انعکاسی باناخ پرداخته و برخی از خواص این نگاشت‌ها را بررسی خواهیم کرد.

تعریف ۳-۱: فرض کنید $f: X \to \mathbb{R}$ نگاشت لژاندر باشد. فاصله هاسدرف برگمن (BH) روی $CB(X)$ برای هر $A, B \in CB(X)$ به صورت زیر تعریف می‌شود

$$BH(A,B) := max\{sup_{a\in A} Bdist(a,B), sup_{b\in B} Bdis(A,b)\},$$

که در آن $Bdist(a,B) = \left(inf_{\ b\in B} D_f\ (a,b)\right)^{\frac{۱}{۲}}$ و $Bdist(A,b) = \left(inf_{\ a\in A} D_f\ (a,b)\right)^{\frac{۱}{۲}}$.

تعریف ۳-۲: فرض کنید $f: X \to \mathbb{R}$ نگاشت لژاندر باشد. نگاشت $T: C \to CB(C)$ را k-غیرپخشی برگمن مجموعه مقدار گویند، اگر $k > ۰$ موجود باشد به‌طوری‌که

$$BH^{۲}(Tx,Ty) \le k\left(Bdist^{۲}(x,Ty) + Bdist^{۲}(Tx,y)\right),$$

به ازاء هر $x, y \in C$.

نگاشت مجموعه مقدار $T: C \to CB(C)$ را غیرپخشی برگمن گویند، اگر $k = \frac{۱}{۲}$ به‌عبارتی

$$۲BH^{۲}(Tx,Ty) \le \left(Bdist^{۲}(x,Ty) + Bdist^{۲}(Tx,y)\right),$$

به ازاء هر $x, y \in C$.

تعریف ۳-۳: فرض کنید $f: X \to \mathbb{R}$ نگاشت لژاندر باشد. نگاشت $T: C \to CB(C)$ را شبه غیرانبساطی برگمن مجموعه مقدار گویند، هرگاه $F(T) \ne \emptyset$ و $BH^{۲}(Tp,Tx) \le D_f(p,x)$.

توجه ۳-۴: به راحتی می‌توان نشان داد که:

- اگر X فضای هیلبرت و $f(x) = \frac{۱}{۲}\|x\|^{۲}$ باشند، آنگاه $H^{۲}(Tx,Ty) = ۲BH^{۲}(Tx,Ty)$ و بنابراین تعریف نگاشت k- غیرپخشی برگمن مجموعه مقدار به نگاشت k- غیرپخشی مجموعه مقدار تبدیل می شود.
- اگر $T: C \to CB(C)$ نگاشت غیرپخشی برگمن و $F(T) \ne \emptyset$ باشد، آنگاه T نگاشت شبه غیرانبساطی برگمن مجموعه مقدار است. بعلاوه، برای هر $x \in C$ و $p \in F(T)$ داریم:

$$\begin{aligned} ۲BH^{۲}(Tp,Tx) &\le Bdist^{۲}(p,Tx) + Bdist^{۲}(Tp,x) \\ &\le BH^{۲}(Tp,Tx) + D_f(p,x). \end{aligned}$$

در نتیجه $BH^{۲}(Tp,Tx) \le D_f(p,x)$.

- بنا به تعریف ۳-۲، نگاشت $T: C \to C$ غیرپخشی برگمن است اگر

$$۲D_f(Tx,Ty) \le D_f(x,Ty) + D_f(Tx,y), \qquad \forall x, y \in C.$$

مثال ۳-۴: فرض کنید $C = [-۳, ۰]$ باشد. نگاشت مجموعه مقدار $T: C \to CB(C)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$T(x) = \begin{cases} ۰, & x \in [-۲, ۰], \\ \left[\dfrac{x}{\sqrt[۴]{۲}(۱-x)}, ۰\right], & x \in [-۳, -۲), \end{cases}$$

نشان می‌دهیم T نگاشت غیرپخشی برگمن با تابع $f(x) = x^{۴}$ است. حالات زیر را خواهیم داشت:

حالت ۱) اگر $x, y \in [-۲, ۰]$، آنگاه $BH(Tx,Ty) = ۰$.

حالت ۲) اگر $x \in [-۲, ۰]$ و $y \in [-۳, -۲)$، آنگاه $Tx = \{۰\}$ و $Ty = \left[\frac{y}{\sqrt[۴]{۲}(۱-y)}, ۰\right]$ در نتیجه

$$BH^{۲}(Tx,Ty) = sup_{b\in Ty} D_f(۰,b) = sup_{b\in Ty} ۳b^{۴} = \frac{۳}{۲}\left(\frac{y}{۱-y}\right)^{۴}.$$

از طرفی

$$Bdist^{۲}(Tx,y) = D_f(\cdot,y) = ۳y^{۴}.$$

بنابراین

$$BH^{۲}(Tx,Ty) \leq \frac{۳}{۲}y^{۴} \leq \frac{۱}{۲}\left(Bdist^{۲}(Tx,y) + Bdist^{۲}(x,Ty)\right).$$

به طور مشابه داریم

$$BH^{۲}(Ty,Tx) \leq \frac{۱}{۲}y^{۴} \leq \frac{۱}{۲}\left(Bdist^{۲}(Ty,x) + Bdist^{۲}(y,Tx)\right).$$

حالت۳) اگر $x,y \in [-۳,-۲)$ و $y \leq x$ ، آنگاه $Tx = \left[\frac{x}{\sqrt[۴]{۲}(۱-x)},\cdot\right]$ و $Ty = \left[\frac{y}{\sqrt[۴]{۲}(۱-y)},\cdot\right]$.

بنابراین

$$\begin{aligned} BH^{۲}(Tx,Ty) &= \max\{\sup_{a\in Tx}\inf_{b\in Ty}\{a^{۴}+۳b^{۴}-۴ab^{۳}\}, \\ &\qquad \sup_{b\in Ty}\inf_{a\in Tx}\{a^{۴}+۳b^{۴}-۴ab^{۳}\}\} \\ &= \sup_{b\in Ty}\inf_{a\in Tx}\{a^{۴}+۳b^{۴}-۴ab^{۳}\} \\ &= \frac{۱}{۲}\left(\frac{x}{۱-x}\right)^{۴} + \frac{۳}{۲}\left(\frac{y}{۱-y}\right)^{۴} - ۲\left(\frac{x}{۱-x}\right)\left(\frac{y}{۱-y}\right)^{۳}, \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} Bdist^{۲}(Tx,y) &= \frac{۱}{۲}\left(\frac{x}{۱-x}\right)^{۴} + ۳y^{۴} - \frac{۴y^{۳}}{\sqrt[۴]{۲}}\left(\frac{x}{۱-x}\right), \\ Bdist^{۲}(x,Ty) &= x^{۴} + \frac{۳}{۲}\left(\frac{y}{۱-y}\right)^{۴} - \frac{۴x}{\sqrt[۴]{۲}}\left(\frac{y}{۱-y}\right)^{۳}. \end{aligned}$$

بنابراین

$$BH^{۲}(Tx,Ty) \leq \frac{۱}{۲}\left(Bdist^{۲}(Tx,y) + Bdist^{۲}(x,Ty)\right).$$

به طریق مشابه داریم

$$BH^{۲}(Ty,Tx) \leq \frac{۱}{۲}\left(Bdist^{۲}(Ty,x) + Bdist^{۲}(y,Tx)\right).$$

حالت۴) اگر $x,y \in [-۳,-۲)$ و $x < y$. اثبات این قسمت مشابه حالت ۳ می‌باشد.

لم۳-۵: فرض کنید $A,B \in CB(C)$ ، $a \in A$ و $f: X \to \mathbb{R}$ نگاشت لژاندر باشد.

۱) برای هر $\varepsilon > ۰$ ، $b \in B$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$D_f(a,b) \leq BH^{۲}(A,B) + \varepsilon.$$

۲) اگر B فشرده و f مشتق‌پذیر فرشه یکنواخت و روی زیرمجموعه‌های کراندار X ، کراندار باشد، آنگاه $b \in B$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$D_f(a,b) \leq BH^{۲}(A,B).$$

اثبات: اثبات قسمت (۱) بدیهی است. به اثبات قسمت (۲) می‌پردازیم. فرض کنید $n \in \mathbb{N}$ و $\varepsilon = \frac{۱}{n}$. بنا به (۱)، $b_n \in B$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$D_f(a,b_n) \leq BH^{۲}(A,B) + \frac{۱}{n}.$$

چون B فشرده است پس زیر دنباله $\{b_{n_i}\}$ از $\{b_n\}$ وجود دارد به‌طوری‌که $b_{n_i} \to b \in B$. از رابطه بالا و تعریف فاصله برگمن داریم:

$$f(a)-f(b_{n_i})-\langle a-b_{n_i},\nabla f(b_{n_i})\rangle \le BH^{۲}(A,B)+\frac{۱}{n_i}.$$

با میل دادن $i\to\infty$ ، در رابطه بالا و استفاده از لم ۲-۲ نتیجه حاصل خواهد شد.

لم ۳-۶: فرض کنید $f: X\to\mathbb{R}$ نگاشت لژاندر، مشتق‌پذیر فرشه یکنواخت و روی زیرمجموعه‌های کراندار X ، کراندار و $T: C\to k(C)$ نگاشت k- غیرپخشی برگمن مجموعه مقدار باشد که در آن $k\in\left(۰,\frac{۱}{۲}\right]$. اگر $x,y\in C$ و $a\in Tx$ ، آنگاه $b_۱,b_۲\in Ty$ وجود دارند به‌طوری‌که

الف)

$$\begin{aligned}D_f(a,b_۱)&\le BH^{۲}(Tx,Ty)\\&\le \frac{k}{۱-k}\big(D_f(x,y)+\langle x-a,\nabla f(y)-\nabla f(b_۱)\rangle\big).\end{aligned}$$

ب)

$$\begin{aligned}D_f(b_۲,a)&\le BH^{۲}(Ty,Tx)\\&\le \frac{k}{۱-k}\big(D_f(y,x)+\langle y-b_۲,\nabla f(x)-\nabla f(a)\rangle\big).\end{aligned}$$

اثبات: الف) فرض کنید $x,y\in C$ و $a\in Tx$. از لم ۳-۵ ، $b_۱\in Ty$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$D_f(a,b_۱)\le BH^{۲}(Tx,Ty).$$

با بکار بردن مشخصه سه نقطه‌ای فاصله برگمن داریم:

$$\begin{aligned}\frac{۱}{k}BH^{۲}(Tx,Ty)&\le Bdist^{۲}(Tx,y)+Bdist^{۲}(x,Ty)\\&\le D_f(a,y)+D_f(x,b_۱)\\&=D_f(a,x)+\langle a-x,\nabla f(x)-\nabla f(y),\rangle+D_f(x,y)\\&\quad+D_f(x,a)+\langle x-a,\nabla f(a)-\nabla f(b_۱)\rangle+D_f(a,b_۱)\\&=\langle a-x,\nabla f(a)-\nabla f(x),\rangle+D_f(x,y)+D_f(a,b_۱)\\&\quad+\langle a-x,\nabla f(x)-\nabla f(y),\rangle+\langle x-a,\nabla f(a)-\nabla f(b_۱)\rangle\\&\le\langle x-a,\nabla f(y)-\nabla f(b_۱)\rangle+D_f(x,y)+BH^{۲}(Tx,Ty).\end{aligned}$$

که ایجاب می‌کند

$$\begin{aligned}D_f(a,b_۱)&\le BH^{۲}(Tx,Ty)\\&\le \frac{k}{۱-k}\big(D_f(x,y)+\langle x-a,\nabla f(y)-\nabla f(b_۱)\rangle\big).\end{aligned}$$

ب) مشابه حالت الف اثبات می‌شود.

تعریف ۳-۷: نگاشت $B: X\to X^*$ را پیوسته دنباله‌ای ضعیف گویند اگر برای هر دنباله $\{x_n\}\subset X$ که $x_n\rightharpoonup x$ ، داشته باشیم $Bx_n\rightharpoonup Bx$.

لم ۳-۸ : فرض کنید $f: X\to\mathbb{R}$ نگاشت لژاندر، $\{x_n\}$ دنباله ای در X و همگرای ضعیف به $x\in X$ باشد. اگر ∇f پیوسته دنباله‌ای ضعیف باشد، آنگاه

$$\limsup_{n\to\infty} D_f(x,x_n)=\limsup_{n\to\infty} D_f(y,x_n)-D_f(y,x),\quad \forall y\in X\,.$$

اثبات: با استفاده از مشخصه سه نقطه‌ای فاصله برگمن نتیجه حاصل می‌شود.

گزاره۳-۹: فرض کنید $f: X \to \mathbb{R}$ نگاشت لژاندر، مشتق‌پذیر فرشه و روی زیرمجموعه‌های کراندار، کراندار و $T: C \to k(C)$ نگاشت k- غیرپخشی برگمن مجموعه مقدار باشد به‌طوری‌که $k \in \left(۰, \frac{۱}{۲}\right]$. اگر $\{x_n\}$ دنباله‌ای در C باشد به‌طوری‌که $x_n \rightharpoonup p$ و $\lim_{n\to\infty}\|x_n - y_n\| = ۰$ که در آن $y_n \in Tx_n$، آنگاه $p \in Tp$.

اثبات: فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای در C باشد به‌طوری‌که $x_n \rightharpoonup p$ و $\lim_{n\to\infty}\|x_n - y_n\| = ۰$ که در آن $y_n \in Tx_n$. از لم ۳-۶، $z_n \in Tp$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$D_f(y_n, z_n) \leq \frac{k}{۱-k}\big(D_f(x_n, p) + \langle x_n - y_n, \nabla f(p) - \nabla f(z_n)\rangle\big).$$

چون Tp فشرده و $z_n \in Tp$، زیردنباله $\{z_{n_i}\}$ از $\{z_n\}$ وجود دارد به‌طوری‌که $z_{n_i} \to z \in Tp$. به ازای هر $x \in X$ تابع $g: X \to [۰, \infty)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(x) := \frac{k}{۱-k}\limsup_{i\to\infty} D_f\big(x_{n_i}, x\big).$$

با استفاده از مشخصه سه نقطه‌ای فاصله برگمن برای هر $x \in X$ داریم

$$g(x) = \frac{k}{۱-k}\Big(\limsup_{i\to\infty} D_f\big(x_{n_i}, p\big) + D_f(p, x)\Big),$$

که ایجاب می‌کند

$$g(z) = g(p) + \tfrac{k}{۱-k} D_f(p, z). \tag{۱}$$

با استفاده از مشخصه سه نقطه ای فاصله برگمن، پیوستگی یکنواخت نگاشت f روی زیرمجموعه‌های کراندار (به قضیه ۲-۱۸ [۲۶] مراجعه کنید) X، لم ۲-۲ و رابطه فوق داریم:

$$\begin{aligned}
g(z) &= \frac{k}{۱-k}\limsup_{i\to\infty} D_f\big(x_{n_i}, z\big) = \frac{k}{۱-k}\limsup_{i\to\infty} \\
&\quad \big(D_f\big(y_{n_i}, z\big) - D_f\big(y_{n_i}, x_{n_i}\big) + \langle y_{n_i} - x_{n_i}, \nabla_f(z)\rangle\big) - \nabla_f(x_{n_i}) \\
&= \frac{k}{۱-k}\limsup_{i\to\infty}\ \big(D_f(y_{n_i}, z_{n_i}) - D_f(z, z_{n_i}) + \langle y_{n_i} - z, \nabla_f(z_{n_i}) - \nabla_f(z)\rangle\big) \\
&= \frac{k}{۱-k}\limsup_{i\to\infty} D_f(y_{n_i}, z) \\
&= \tfrac{k}{۱-k}\limsup_{i\to\infty} D_f(y_{n_i}, z_{n_i}) \\
&\leq \frac{k}{۱-k}\limsup_{i\to\infty}\big(D_f\big(x_{n_i}, p\big) + \langle x_{n_i} - y_{n_i}, \nabla_f(p) - \nabla_f\big(z_{n_i}\big)\rangle\big) = g(p).
\end{aligned}$$

روابط فوق و رابطه (۱)، ایجاب می‌کند که $D_f(p, z) = ۰$. چون f لژاندر است پس $p = z$.

لم ۳-۱۰: فرض کنید $f: X \to \mathbb{R}$ نگاشت لژاندر و $T: C \to CB(C)$ نگاشت غیرپخشی برگمن مجموعه مقدار باشد. اگر به ازای هر $p \in F(T)$ داشته باشیم $Tp = \{p\}$، آنگاه $F(T)$ بسته و محدب است.

اثبات: فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای در $F(T)$ باشد به‌طوری‌که $x_n \to x$ و $a \in Tx$. با استفاده از توجه۳-۴ داریم

$$\begin{aligned}
D_f(x, a) &= \lim_{n\to\infty} D_f(x_n, a) = \lim_{n\to\infty} Bdist^{۲}(Tx_n, x) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} BH^{۲}(Tx_n, Tx) \leq \lim_{n\to\infty} D_f(x_n, x).
\end{aligned}$$

در نتیجه $a = x$ بنابراین $F(T)$ بسته است. اکنون نشان می دهیم که $F(T)$ محدب است. فرض کنید

$p = Tp_۱ + (۱ - t)p_۲$ که در آن $p_۱, p_۲ \in F(T)$ و $t \in (۰,۱)$. فرض کنید $z \in Tp$، از توجه ۳-۴ داریم

$$\begin{aligned} D_f(p,z) &= f(p) - f(z) - \langle p - z, \nabla f(z)\rangle \\ &= f(p) - f(z) - \langle tp_۱ + (۱ - t)p_۲ - z, \nabla f(z)\rangle \\ &= f(p) - f(z) - t\langle p_۱ - z, \nabla f(z)\rangle - (۱ - t)\langle p_۲ - z, \nabla f(z)\rangle \\ &= f(p) + tD_f(p_۱, z) + (۱ - t)D_f(p_۲, z) - tf(p_۱) - (۱ - t)f(p_۲) \\ &= f(p) + tBdist^۲(Tp_۱, z) + (۱ - t)\, Bdist^۲(Tp_۲, z) - tf(p_۱) \\ &\le f(p) + tBH^۲(Tp_۱, Tp) + (۱ - t)BH^۲(Tp_۲, Tp) - tf(p_۱) - (۱ - t)f(p_۲ \\ &\le f(p) + tD_f(p_۱, p) + (۱ - t)D_f(p_۲, p) - tf(p_۱) - (۱ - t)f(p_۲) \\ &= \langle p - tp_۱ - (۱ - t)p_۲, \nabla f(p)\rangle = ۰, \end{aligned}$$

بنابراین $z = p$، در نتیجه $F(T)$ محدب است.

لم ۳-۱۱: [۲۷] فرض کنید $g: C \to (-\infty, +\infty]$ نگاشت محدب، سره و نیم‌پیوسته پایین باشد و همچنین $g(x_n) \to \infty$ وقتی $\|x_n\| \to \infty$. در این صورت $x_. \in dom(g)$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$g(x_.) = inf\{g(x): x \in c\}.$$

فرض کنید l^∞ فضای باناخ دنباله‌های کراندار با نرم سوپریمم باشد و μ عضوی از $(l^\infty)^*$ باشد. مقدار μ در $f = (a_۱, a_۲, \dots)$ را با نماد $\mu(f)$ نشان می‌دهیم. مقدار $\mu(f)$ را اغلب با نماد $\mu_n(a_n)$ نیز نمایش می‌دهند. تابع خطی μ روی l^∞ حد باناخ نامیده می‌شود اگر $\|\mu\| = \mu(۱,۱, \dots) = ۱$ و $\mu_n(a_{n+۱}) = \mu_n(a_n)$.

لم۳-۱۲: فرض کنید C زیر مجموعه بسته، محدب و غیر تهی از فضای باناخ هموار و p- محدب یکنواخت X، $f_p(.) = \frac{۱}{p}\|.\|^p$ و$\{x_n\}$ دنباله ای کراندار در X باشند. همچنین فرض کنید که μ حد باناخ باشد. اگر $g: C \to \mathbb{R}$ به صورت

$$g(z) = \mu_n D_{f_p}(z, x_n), \qquad \forall z \in C,$$

تعریف شود، آنگاه $z_. \in C$ منحصر به فردی موجود است به طوری که

$$g(z_.) = inf\{g(x): x \in X\}.$$

اثبات: فرض کنید $z, y \in C$ و $\alpha \in [۰,۱]$. از قضایای ۲-۱۰، ۲-۱۱، لم ۲-۷ ، تعریف فاصله برگمن و $\nabla f_p = J_X^p$ برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$\begin{aligned} D_{f_p}(\alpha z + (۱ - \alpha)y, x_n) &= f_p(\alpha z + (۱ - \alpha)y) - f_p(x_n) - \langle \alpha z + (۱ - \alpha)y, J_X^p(x_n)\rangle \\ &\le \alpha f_p(z) + (۱ - \alpha)f_p(y) - \alpha(۱ - \alpha)\rho_r(\|z - y\|) - f(x_n) \\ &\quad - \langle \alpha z + (۱ - \alpha)y, J_X^p(x_n)\rangle \\ &= \alpha D_{f_p}(z, x_n) + (۱ - \alpha)D_{f_p}(y, x_n) - \alpha(۱ - \alpha)\rho_r(\|z - y\|). \end{aligned}$$

از طرفی چون μ حد باناخ است داریم

(۲)

$$g(\alpha z + (۱ - \alpha)y) \le \alpha g(z) + (۱ - \alpha)g(y) \ - \alpha(۱ - \alpha)\rho_r(\|z - y\|).$$

بنابراین g نگاشتی محدب است. فرض کنید $z \in C$ و $\{z_m\}$ دنباله‌ای در C باشد به‌طوری‌که $z_m \to z$. از مشخصه سه نقطه ای فاصله برگمن برای هر $m, n \in \mathbb{N}$ داریم:

(۳)

$$\begin{aligned} D_{f_p}(z_m, x_n) - D_{f_p}(z, x_n) &= \langle z - z_m, J_X^p(x_n) - J_X^p(z_m)\rangle - \ D_{f_p}(z, z_m) \\ &\le \|z - z_m\| \|J_X^p(x_n) - J_X^p(z_m)\| \end{aligned}$$

$$\le \|z - z_m\| M_۱,$$

که در آن $M_۱ = Sup\{\|J_X^p(x_n)\| + \|J_X^p(z_m)\|, m, n \in \mathbb{N}\}$. به طور مشابه داریم

$$D_{f_p}(z, x_n) - D_{f_p}(z_m, x_n) \le \|z - z_m\| M_۲, \qquad (۴)$$

که در آن $M_۲ = Sup\{\|J_X^p(x_n)\| + \|J_X^p(z)\|, n \in \mathbb{N}\}$. قرار می‌دهیم $M = Max\{M_۱, M_۲\}$. با استفاده از (۳) و (۴) داریم

$$|g(z_m) - g(z)| \le \|z - z_m\| M.$$

که پیوستگی g را ایجاب می‌کند. فرض کنید $\{z_m\}$ دنباله ای در C باشد به‌طوری‌که $\|z_m\| \to \infty$. داریم

$$\tau(\|z - z_m\|)^p \le D_{f_p}(z_m, z)$$
$$\le D_{f_p}(z_m, x_n) + \langle z_m - z, J_X^p(x_n) - J_X^p(z)\rangle$$
$$\le D_{f_p}(z_m, x_n) + \|z - z_m\| \|J_X^p(x_n) - J_X^p(z)\|$$
$$\le D_{f_p}(z_m, x_n) + (\|z_m\| + \|z\|)(M + \|J_X^p(z)\|),$$

که در آن $M = Sup\{\|J_X^p(x_n)\|, n \in \mathbb{N}\}$. داریم

$$\tau(\|z_m\| - \|z\|)^p - (\|z_m\| + \|z\|)(M + \|J_X^p(z)\|) \le D_{f_p}(z_m, x_n).$$

بنابراین

$$\tau(\|z_m\| - \|z\|)^p \left(۱ - \frac{(\|z_m\| + \|z\|)(M + \|J_X^p(z)\|)}{(\|z_m\| - \|z\|)^p}\right) \le D_{f_p}(z_m, x_n).$$

و در نتیجه

$$\tau(\|z_m\| - \|z\|)^p \left(۱ - \frac{(\|z_m\| + \|z\|)(M + \|J_X^p(z)\|)}{(\|z_m\| - \|z\|)^p}\right) \le \mu_n D_{f_p}(z_m, x_n).$$

در نتیجه $g(z_m) \to \infty$ وقتی که $\|z_m\| \to \infty$. بنابراین از لم ۳-۱۱ ، $z_. \in C$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$g(z_.) = inf\{g(x): x \in X\}.$$

از رابطه (۲) نتیجه می‌شود که g محدب اکید است و در نتیجه $z_.$ منحصر به فرد می‌باشد.

مشابه قضیه‌های ۱ و ۲ از [۳] می‌توانیم قضایای زیر را ثابت کنیم.

قضیه۳-۱۳: فرض کنید C زیر مجموعه بسته، محدب و ناتهی از فضای باناخ p- محدب یکنواخت X ، $f_p(.) = \frac{۱}{p}\|.\|^p$ و T نگاشت مجموعه مقدار از C به توی $CB(C)$ باشد. فرض کنید $z_. \in C$ و دنباله کراندار $\{z_n\}$ موجود باشند به‌طوری‌که برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $z_n \in Tz_{n-۱}$. اگر برای هر $y \in C$ ، $a \in Ty$ موجود باشد به‌طوری‌که

$$\mu_n D_{f_p}(a, z_n) \le \mu_n D_{f_p}(y, z_n),$$

آنگاه T در C دارای نقطه ثابت است.

قضیه زیر وجود نقطه ثابت برای نگاشت غیر پخشی برگمن را بیان می‌کند.

قضیه ۳-۱۴: فرض کنید C زیر مجموعه بسته، محدب و ناتهی از فضای باناخ p- محدب یکنواخت X ، $f_p(.) = \frac{۱}{p}\|.\|^p$ و $T: C \to C$ نگاشت غیر پخشی برگمن باشد. اگر $z_. \in C$ موجود باشد به طوری که $\{T^n z_.\}$ کراندار باشد، در این صورت T در C دارای نقطه ثابت است.

۴-نتیجه همگرایی

در این بخش، قضیه همگرایی ضعیف زیر را برای تقریب نقطه ثابت مشترک یک خانواده متناهی از نگاشت‌های غیرپخشی برگمن مجموعه مقدار در فضاهای باناخ ارایه خواهیم داد.

قضیه ۴-۱: فرض کنید C زیرمجموعه بسته، محدب و ناتهی از فضای باناخ انعکاسی X باشد و $f: X \to \mathbb{R}$ نگاشت لژاندر ابرافزاینده که روی زیرمجموعه‌های کراندار X، کراندار، مشتق‌پذیر فرشه یکنواخت و کلا محدب باشد. فرض کنید ∇f پیوسته ضعیف دنباله‌ای باشد. فرض کنید $T_i: \to K(C)(i = ۱, \dots, m)$ دسته‌ای متناهی از نگاشت‌های غیرپخشی برگمن مجموعه مقدار باشند به‌طوری‌که $\Omega = \bigcap_{i=1}^{m} F\,(T_i)$ ناتهی و برای هر $p \in \Omega$، $T_i(p) = \{p\}$. برای $x_۱ \in C$ دنباله $\{x_n\}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x_{n+۱} = \overleftarrow{Proj}_C^f \left[\nabla f^* \left(\alpha_{n,۰} \nabla f(x_n) + \sum_{i=۱}^{m} \alpha_{n,i} \nabla f(z_{n,i})\right)\right],$$

که در آن $z_{n,i} \in T_i(x_n)$ ، $\alpha_{n,i} \subset (۰,۱)$ ، $\sum_{i=۱}^{m} \alpha_{n,i} = ۱$ و $\liminf \alpha_{n,۰} \alpha_{n,i} > ۰$ به ازای هر $(i = ۱,۲, \dots, m)$ و $n \in \mathbb{N}$ ، در این صورت $\{x_n\}$ به عضوی از Ω همگرای ضعیف است.

اثبات: فرض کنید $p \in \Omega$. با استفاده از توجه ۳-۴ داریم:

$$\begin{aligned}
& D_f(p, x_{n+۱}) \\
&\le D_f\left(p, \nabla f^*\left(\alpha_{n,۰} \nabla f(x_n) + \sum_{i=۱}^{m} \alpha_{n,i} \nabla f\big(z_{n,i}\big)\right)\right) \\
&\le \alpha_{n,۰} D_f(p, x_n) + \sum_{i=۱}^{m} \alpha_{n,i} D_f(p, z_{n,i}) \\
&= \alpha_{n,۰} D_f(p, x_n) + \sum_{i=۱}^{m} \alpha_{n,i} Bdist^۲(T_{ip}, z_{n,i}) \\
&\le \alpha_{n,۰} D_f(p, x_n) + \sum_{i=۱}^{m} \alpha_{n,i} BH^۲\big(T_{ip}, T_i x_n\big) \\
&\le \alpha_{n,۰} D_f(p, x_n) + \sum_{i=۱}^{m} \alpha_{n,i} D_f(p, x_n) = D_f(p, x_n).
\end{aligned}$$

بنابراین $\lim_{n\to\infty} D_f(p, x_n)$ موجود است. فرض کنید $r = max_i\ sup_n\{\|\nabla f(x_n)\|, \|\nabla f(z_{n,i})\|\}$. چون $\{x_n\}$ و $\{z_{n,i}\}, (۱ \le i \le m)$ کراندار هستند و ∇f نیز روی زیرمجموعه‌های کراندار X، کراندار است، داریم $r < \infty$ (به گزاره ۱-۱-۱۱ [۸] مراجعه شود). با استفاده از لم ۲-۲، قضیه ۲-۸ و $dom\, f^* = X^*$، f^* ابرافزاینده و روی زیرمجموعه‌های کراندار X^* محدب یکنواخت است. فرض کنید $\rho_r^*: [۰, \infty) \to [۰, \infty]$ اندازه تحدب یکنواخت f^* باشد. با بکار بردن لم ۲-۷ برای هر $۱ \le i \le m$ داریم:

$$\begin{aligned}
&D_f(p, x_{n+1}) \\
&\leq D_f\left(p, \nabla f^*(\alpha_{n,0} \nabla f(x_n) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{n,i} \nabla f(z_{n,i}))\right) \\
&= V_f(p, \alpha_{n,\cdot} \nabla f(x_n) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{n,i} \nabla f(z_{n,i})) \\
&= f(p) + f^*(\alpha_{n,\cdot} \nabla f(x_n) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{n,i} \nabla f(z_{n,i})) \\
&- \langle p, \alpha_{n,0} \nabla f(x_n) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{n,i} \nabla f(z_{n,i}) \rangle \\
&\leq f(p) + \alpha_{n,\cdot} f^*(\nabla f(x_n) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{n,i} f^* \nabla f(z_{n,i})) \\
&- \langle p, \alpha_{n,0} \nabla f(x_n) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{n,i} \nabla f(z_{n,i}) \rangle \\
&- \alpha_{n,\cdot} \alpha_{n,j} \rho_r^* \left\| \nabla f(x_n) - \nabla f(z_{n,j}) \right\| \\
&= \alpha_{n,\cdot} D_f(p, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \alpha_{n,i} D_f(p, z_{n,i}) \\
&- \alpha_{n,\cdot} \alpha_{n,j} \rho_r^* \left\| \nabla f(x_n) - \nabla f(z_{n,j}) \right\| \\
&\leq D_f(p, x_n) - \alpha_{n,\cdot} \alpha_{n,j} \rho_r^* \left\| \nabla f(x_n) - \nabla f(z_{n,j}) \right\|.
\end{aligned}$$

بنابراین برای هر $1 \leq i \leq m$ داریم

$$\alpha_{n,\cdot} \alpha_{n,j} \rho_r^* \left(\left\| \nabla f(x_n) - \nabla f(z_{n,j}) \right\| \right) \leq D_f(p, x_n) - D_g(p, x_{n+1}). \qquad (۵)$$

چون $\liminf_{n\to\infty} \alpha_{n,\cdot} \alpha_{n,j} > 0$ داریم $\rho_r^* \left\| \nabla f(x_n) - \nabla f(z_{n,j}) \right\| \to 0$. اکنون برای هر $1 \leq j \leq m$ نشان می‌دهیم که

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \nabla f(x_n) - \nabla f(z_{n,j}) \right\| = 0.$$

اگر رابطه فوق برقرار نباشد، آنگاه $\varepsilon_\cdot > 0$ و زیر دنباله $\{n_k\}$ از $\{n\}$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$\left\| \nabla f(x_{n_k}) - \nabla f(z_{n_k,j}) \right\| \geq \varepsilon_\cdot.$$

چون ρ_r^* غیر نزولی است، پس برای هر $k \in \mathbb{N}$ داریم

$$\rho_r^*(\epsilon_\cdot) \leq \rho_r^*\left(\left\| \nabla f(x_{n_k}) - \nabla f(z_{n_k,j}) \right\| \right),$$

با میل دادن $k \to \infty$ در نامساوی فوق داریم $\rho_r^*(\varepsilon_\cdot) \leq 0$ که با محدب یکنواخت بودن f^* روی زیرمجموعه‌های کراندار X^* تناقض دارد. از رابطه (۵) و محدب یکنواخت بودن ∇f^* روی زیرمجموعه‌های کراندار X^*، برای هر $1 \leq i \leq m$ داریم

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x_n - z_{n,j} \right\| = 0. \qquad (۶)$$

چون $\{x_n\}$ کراندار است، پس زیر دنباله $\{x_{n_m}\}$ از $\{x_n\}$ وجود دارد به‌طوری‌که $x_{n_m} \rightharpoonup q$. بنابراین از گزاره ۳-۹ و (۶) نتیجه می شود که $q \in \Omega$. فرض کنید $\{x_{k_m}\}$ زیر دنباله دیگری از $\{x_n\}$ باشد به طوری که $x_{k_m} \rightharpoonup p$ و $p \neq q$. با استفاده از لم ۳-۸ داریم

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} D_f(p,x_n) &= \lim_{m\to\infty} D_f\left(p,x_{k_m}\right) < \lim_{m\to\infty} D_f\left(q,x_{k_m}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} D_f(q,x_n) = \lim_{m\to\infty} D_f\left(q,x_{n_m}\right) \\ &< \lim_{m\to\infty} D_f\left(p,x_{n_m}\right) = \lim_{n\to\infty} D_f(p,x_n), \end{aligned}$$

که تناقض است و این اثبات را کامل می‌کند.

نتیجه ۴-۲: فرض کنید C زیرمجموعه بسته، محدب و ناتهی از فضای هیلبرت H و $T_i: C \to k(C)$ دسته‌ای متناهی از نگاشت‌های غیرپخشی مجموعه مقدار باشند به‌طوری‌که $\Omega = \bigcap_{i=1}^{m} F\left(T_i\right)$ ناتهی و برای هر $p \in \Omega$ داشته باشیم $T_i(p) = \{p\}$. دنباله $\{x_n\}$ را برای هر $x_۱ \in C$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x_{n+۱} = P_C\left(\alpha_{n,۰} x_n + \sum_{i=۱}^{m} \alpha_{n,i}\, z_{n,i}\right),$$

که در آن $z_{n,i} \in T_i(x_n)$ ، $\alpha_{n,i} \subset (۰,۱)$ ، $\sum_{i=۱}^{m} \alpha_{n,i} = ۱$ و $\liminf \alpha_{n,۰}\alpha_{n,i} > ۰$ ، به ازای هر $(i = ۱,۲,\dots,m)$ و $n \in \mathbb{N}$ ، در این صورت $\{x_n\}$ به عضوی از Ω همگرای ضعیف است.

فهرست منابع

[۱] F. Kohsaka, and W. Takahashi, “Proximal point algorithm with Bregman functions in Banach spaces”, J. Nonlinear Convex Anal. ٦, pp. ٥٠٥-٥٢٣, ٢٠٠٥.

[۲] S. Iemoto, and W. Takahashi, “Approximating common fixed points of nonexpansive mappings and nonspreading mappings in a Hilbert space”, Nonlinear Anal. ٧١, pp. ٢٠٨٠-٢٠٨٩, ٢٠٠٩.

[۳] W. Cholamjiaky, S. Suantai, and Y.J. Cho, “Fixed points for nonspreading-type multi-valued mappings: existence and convergence results”, Ann. Acad. Rom. Sci. Ser. Math. Appl. Vol.١٠, No. ٢, ٢٠١٨.

[٤] S. Suantai, P. Cholamjiak, Y. J. Cho, and W. Cholamjiak, “On solving split equilibrium problems and fixed point problems of nonspreading multi-valued mappings in Hilbert spaces”, Fixed Point TheoryAppl. ٢٠١٦.

[٥] L. M. Bregman, “A relaxation method for finding the common point of convex sets and its application to the solution of problems in convex programming, USSR Comput”, Math. Math. Phys. ٧, pp. ٢٠٠-٢١٧, ١٩٦٧.

[٦] H. H. Bauschke, J. M. Borwein, and P. L. Combettes, “Essential smoothness, essential strict convexity, and Legendre functions in Banach spaces”, Commun. Contemp. Math. ٣, ٦١٥-٦٤٧, ٢٠٠١.

[٧] H. H, Bauschke, J. M. Borwein, and P. L. Combettes, “Bregman monotone optimization algorithms”, SIAM J. Control Optim. ٤٢, pp. ٥٩٦-٦٣٦, ٢٠٠٣.

[٨] D. Butnariu, and A. N. Iusem, “Totally Convex Functions for Fixed Points Computation and Infinite Dimensional Optimization”, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, ٢٠٠٠.

[٩] D. Butnariu, A. N. Iusem, and C. Zalinescu, “On uniform convexity, total convexity and convergence of the proximal point and outer Bregman projection algorithms in Banach spaces”, J. Convex Anal. ١٠, pp. ٣٥-٦١, ٢٠٠٣.

[١٠] D, Butnariu, and A. N. Iusem, “Bregman distances, totally convex functions and a methodfor solving operator equations in Banach spaces”, Abstr. Appl. Anal. Pp. ١-٣٩, ٢٠٠٦, Art.

[١١] G. Z. Eskandani, M. Raeisi, and Th. M. Rassias, “A hybrid extragradient method for solving pseudomonotone equilibrium problems using Bregman distance”, J. Fixed Point Theory Appl, pp. ٢٠:١٣٢, ٢٠١٨.

[١٢] M. Raeisi, G. Z. Eskandani, and M. Eslamian, “A general algorithm for multiple-sets split feasibility problem involving resolvents and Bregman mappings”, Optimization. ٦٨. Pp. ٣٠٩-٣٢٧, ٢٠١٨.

[١٣] S. Reich, and S. Sabach, “A strong convergence theorem for a proximal-type algorithm in reflexive Banach spaces”, J. Nonlinear Convex Anal. ١٠, pp.٤٧١-٤٨٥, ٢٠٠٩.

[١٤] S. Reich, and S. Sabach, “Two strong convergence theorems for a proximal method in reflexive Banach spaces”, Numer. Funct. Anal. Optim. ٣١, pp.٢٢-٤٤, ٢٠١٠.

[۱۵] S. Reich, and S. Sabach, “Two strong convergence theorems for Bregman strongly nonexpansive operators in reflexive Banach spaces”, Nonlinear Anal. ۷۳, pp.۱۲۲-۱۳۵, ۲۰۱۰.

[۱٦] S. Reich, and S. Sabach, “Existence and approximation of fixed points of Bregman firmly nonexpansive operators in reflexive Banach spaces. In: Fixed-point algorithms for inverse problems in science and engineering”, optimization and its applications. NewYork (NY): Springer; pp. ۳۰۱-۳۱٦, ۲۰۱۱.

[۱۷] J. F, Bonnans, and A. Shapiro, “Perturbation Analysis of Optimization Problems”, Springer Verlag, New York, ۲۰۰۰.

[۱۸] S. Sabach, “Products of finitely many resolvents of maximal monotone mappings in reflexive Banach spaces”, SIAM J. Optim. ۲۱, pp.۱۲۸۹-۱۳۰۸, ۲۰۱۱.

[۱۹] Y. I. Alber, “Metric and generalized projection operators in Banach spaces: Properties and applications. in: Kartsatos A.G., Theory and Applications of Nonlinear Operator of Accretive and Monotone Type”, Marcel Dekker, New York, pp.۱۵-۵۰, ۱۹۹٦.

[۲۰] Y. Censor, and A. Lent, “An iterative row-action method for interval convex programming”, J. Optim. Theory Appl. ۳٤, pp.۳۲۱-۳۵۳, ۱۹۸۱.

[۲۱] R. P. Phelps, “Convex Functions, Monotone Operators, and Differentiability, second ed.in: Lecture Notes in Mathematics”, vol. ۱۳٦٤, Springer Verlag, Berlin, ۱۹۹۳.

[۲۲] E. Naraghirad, and J. C. Yao, “Bregman weak relatively nonexpansive mappings in Banach spaces”, Fixed Point Theory Appl. doi: ۱۰,۱۱۸٦/۱٦۸۷-۱۸۱۲-۲۰۱۳-۱٤۱, ۲۰۱۳.

[۲۳] C. Zalinescu, “Convex analysis in general vector spaces”, World Scientific Publishing, Singapore, ۲۰۰۲.

[۲٤] F. Schopfer, T. Schuster, and A. K. Louis, “An iterative regularization method for the solution of the split feasibility problem in Banach spaces”, Inverse Problems ۲٤, ۲۰۰۸.

[۲۵] D, Butnariu, A. N. Iusem, and E. Resmerita, “Total convexity for powers of the norm in uniformly convex Banach spaces”, J. Convex Anal. ۷, pp.۳۱۹-۳۳٤, ۲۰۰۰.

[۲٦] A. Ambrosetti, and G. Prodi, “A Primer of Nonlinear Analysis”, Cambridge University Press, Cambridge, ۱۹۹۳.

[۲۷] W. Takahashi, “Nonlinear Functional Analysis, Fixed Point Theory and its Applications”, Yokohama Publishers, Yokohama, ۲۰۰۰ (in Japanese).