

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال دهم، شماره چهل و هشتم، خرداد و تیر ۱۴۰۳

شماره شاپا: ۵۸۸۸-۲۵۸۸



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

رهیافتی بر محاسبه توابع موجک با استفاده از معادله شرودینگر برای نوسانگر هماهنگ

سجاد پارسامهر*

گروه فیزیک، واحد کرمانشاه، دانشگاه آزاد اسلامی، کرمانشاه، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۱/۰۷/۱۶ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۱۲/۲۳

چکیده

همواره در فیزیک کوانتومی مفهوم احتمال و عدم قطعیت یک اصل بنیادی به حساب آمده است. یکی از مهمترین نتایج این اصل خواص ذره‌ای تابش و خواص موجی ماده می‌باشد. در فیزیک کوانتومی می‌توان تابع موج ذره را با استفاده از فرمالیسم ریاضی تبدیل فوریه توضیح داد. بر اساس مشاهدات کیفی که در بحث موج پیش می‌آید، رابطه وارونی پهنای مکان و تکانه همواره برقرار است. چنین خاصیتی ویژگی کلیه توابعی است که تبدیل فوریه یکدیگرند. یکی از مشکلات این است که تبدیل فوریه تعیین می‌کند که یک فرکانس خاص در موج وجود دارد یا نه و در مورد اینکه این فرکانس در کجای موج واقع شده، اطلاعاتی به دست نمی‌دهد. مشکلات پیش روی تبدیل فوریه باعث به وجود آمدن تبدیل فوریه زمان کوتاه گردید که آن هم با توجه به اصل عدم قطعیت هایزنبرگ با مشکلاتی مواجه است. در مقابل تبدیل فوریه زمان کوتاه دسته دیگری از تبدیلات وجود دارند که معروف به تبدیل موجک می‌باشند. استفاده از تبدیل موجک این مزیت را نسبت به تبدیل فوریه دارد که عدم قطعیت را در اندازه گیری‌ها به مقدار کمتری کاهش می‌دهد. در این مقاله با استفاده از جواب‌های معادله شرودینگر برای نوسانگر کوانتومی، عملگر انتقال و چند جمله‌ای‌های هرمیت روشی برای به دست آوردن نوعی از موجک‌ها ارائه شده است.

واژه‌های کلیدی: تبدیل فوریه، حالت‌های همدوس، تبدیل موجک، عدم قطعیت، تبدیل فوریه زمان کوتاه

۱- مقدمه

در فیزیک کلاسیک با استفاده از قانون نیوتون می‌توان مشخصات مربوط به حرکت یک ذره را به طور کامل به دست آورد. اما در فیزیک کوانتومی معادله شرودینگر جایگزین قانون نیوتون شده و جواب این معادله که همان تابع موج ذره می‌باشد، حالت ذره را در مکان و زمان خاصی مشخص می‌کند. در واقع ماهیت دوگانگی موجی ذره‌ای در دل مفهوم تابع موج نهفته است. همواره استفاده از روابط ریاضی برای توضیح واقعیت فیزیکی موجود در طبیعت برای انسان شگفت انگیز بوده است. نیلز بوهر با استفاده از روابط به دست آمده توسط دو بروی و پلانک و نیز معادله موج تخت نامتناهی غیرموضعی و تبدیل فوری، روابط عدم قطعیت هایزنبرگ را به دست آورد. یعنی نیلز بوهر یک چارچوب ریاضی را برای توصیف جنبه‌های موجی و ذره‌ای موجودات کوانتومی ارائه کرد [۱، ۲].

یک بسته موج جایگزیده از امواجی با فرکانس‌های مختلف تشکیل شده است. یکی از مهمترین نتایجی که در بحث موج پیش می‌آید، رابطه وارونی پهنای مکان و تکانه بود که ویژگی توابعی است که تبدیل فوری یکدیگرند. لازم به ذکر است که در تبدیل فوری اطلاعات فرکانس و زمان به طور همزمان وجود ندارد. به بیان دیگر می‌توان گفت که تبدیل فوری تعیین می‌کند که یک فرکانس خاص در موج وجود دارد یا نه و در مورد اینکه این فرکانس در کجای موج واقع شده، اطلاعاتی به دست نمی‌دهد [۳]. بنابراین تبدیل فوری زمان کوتاه را جایگزین تبدیل فوری کرده‌اند. در تبدیل فوری زمان کوتاه^۱ موج ناپیستا به قطعاتی به قدر کافی کوچک تقسیم می‌شود که در این قطعات موج ایستا باشد و ابزار این کار نیز تابعی موسوم به تابع پنجره‌ای است که گستره تاثیر این تابع برابر با طول قطعه‌ای می‌باشد که در آن موج ایستا فرض شده است. اکنون یک بیان مناسب زمانی و فرکانسی در مورد موج پیدا شده که علاوه بر فرکانس‌هایی موجود در موج، زمان وقوع هر یک نیز کشف شده است [۴].

مشکل اصلی تبدیل فوری زمان کوتاه به اصل عدم قطعیت هایزنبرگ مربوط است. این اصل که در واقع برای اندازه حرکت و مکان ذرات در حال حرکت بیان شده است (نمی‌توان هم موقعیت و هم سرعت یک ذره را به طور دقیق اندازه گرفت)، دانستن فرکانس دقیق و زمان دقیق وقوع این فرکانس در موج غیرممکن است. یعنی نمی‌توان مشخص کرد کدام جزء طیفی در کدام لحظه خاص وجود دارد و تنها می‌توان باندهای فرکانسی موجود در یک فاصله زمانی را مشخص کرد. هر چه پهنای پنجره باریکتر باشد، وضوح زمانی بهتر است و فرض ثبات موج هم بهتر برقرار می‌شود، اما وضوح فرکانسی بدتر خواهد شد. برعکس، پنجره پهن وضوح فرکانسی خوب و وضوح زمانی ضعیف بدست می‌دهد [۵]. علاوه بر آن، پنجره‌های پهن ممکن است با شرط ثبات موج متناقض باشند. به طور خلاصه می‌توان گفت که مشکل فوری زمان کوتاه انتخاب تابع پنجره است.

برای مرتفع کردن مشکل فوق به معرفی تبدیل موجک^۲ می‌پردازیم [۶، ۷، ۸]. امروزه بسیاری از دانشمندان در حوزه علوم مختلف به استفاده از این فرمالیزم ریاضی جهت اندازه‌گیری‌های دقیق مشغول شده‌اند. در تبدیل موجک بر خلاف تبدیل فوری، که یک موج را بر روی توابع سینوسی و کسینوسی و هارمونیک‌های آنها تجزیه می‌کرد، سیگنال بر روی یک دسته از توابع که موجک (حالت‌های همدوس) نامیده می‌شوند، تجزیه می‌گردد. در مکانیک کوانتومی حالت همدوس نوع خاصی از حالت کوانتومی می‌باشد، که دارای کمترین مقدار عدم قطعیت می‌باشند. با آمدن نظریه موجک ها تجزیه و تحلیل امواج و یا سیگنال‌ها متحول شد. تنوع روش‌ها و توابع مورد استفاده در این نظریه، مورد قبول و استقبال پژوهشگران علوم مختلف گردید [۹، ۱۰، ۱۱، ۱۲]. در این مقاله سعی بر این است که پس از معرفی فرمالیزم تبدیل فوری، تبدیل فوری زمان کوتاه و تبدیل موجک، به ارائه روشی برای محاسبه توابع موجک با استفاده از جواب‌های معادله شرودینگر برای نوسانگر کوانتومی، عملگر انتقال و چند جمله‌ای‌های هرمیت پرداخته شود و همچنین با مقایسه این توابع موجک با یکدیگر نتایجی را جهت بهره در کارهای آینده برای پژوهشگران ارائه گردیده است.

¹ Short-time Fourier transform² Wavelet Transform

۲- فرمالیزم فوریه و موجک

می‌دانیم که تبدیل‌های فوریه برای نمایش مؤلفه‌های فرکانس موجود در امواج به کاربرده می‌شوند. با وجود اینکه به نظر می‌رسد که تبدیل فوریه یک مفهوم ریاضی است ولی در دنیای واقعی هم می‌توان آثار آن را مشاهده کرد. به عنوان مثال پس از عبور نور از یک منشور، نور به اجزا تشکیل دهنده خود با فرکانس‌های خاص تجزیه می‌شود. این پدیده مشابه تبدیل فوریه می‌باشد. معادله ریاضی تبدیل فوریه به شکل زیر می‌باشد:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad (۱)$$

که در آن t و ω به ترتیب زمان و فرکانس می‌باشند. با فرض اینکه f یک تابع انتگرال پذیر روی $\mathbb{R}$ باشد، با توجه به اینکه $\exp(-i\omega t)$ پیوسته و کراندار می‌باشد، لذا برای هر $\omega \in \mathbb{R}$ $\exp(-i\omega t)f(t)$ انتگرال پذیر موضعی است و نیز برای هر ω و t حقیقی $|\exp(-i\omega t)| \leq 1$ است. واضح است که:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-i\omega t)f(t) dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty \quad (۲)$$

بنابراین می‌توان گفت که انتگرال فوریه برای هر $\omega \in \mathbb{R}$ موجود است. تعریف ارائه شده در معادله فوق برخی از نقایص تبدیل فوریه را نمایان می‌سازد. به طور خلاصه اگر چه تبدیل فوریه در بررسی امواج ایستا بسیار موثر است، اما برای توصیف توابع غیر پیوسته و یا امواجی که دائماً در حال تغییراند مناسب نمی‌باشد. باید توجه داشت که نظریه فوریه بر فرض ایستا بودن (مشخصات فرکانسی موج با زمان تغییر نمی‌کند) موج استوار است. در صورت برآورد نشدن این فرض، ابزار فوریه کارایی خود را از دست خواهد داد. چرا که در این تبدیل اطلاعات فرکانس و زمان به طور همزمان وجود ندارد. اشکال دیگر این است که تبدیل فوریه تعیین می‌کند که یک فرکانس خاص در موج وجود دارد یا نه و در مورد اینکه این فرکانس در کجای موج واقع شده، اطلاعاتی به دست نمی‌دهد. مشکلات پیش روی تحلیل فوریه با عث به وجود آمدن تحلیل فوریه پنجره کوتاه گردید، که این روش هم با یک سری نقایص روبه‌رو شد. فرم ریاضی این تبدیل به شکل زیر می‌باشد:

$$F(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) w(t - \tau) e^{-i\omega t} dt \quad (۳)$$

در این تبدیل با استفاده از تابع پنجره w موج به قطعات کوچکی تقسیم شده طوری که در طول هریک از قطعات موج ایستا باشد. می‌توان گفت که مشکل تبدیل فوریه زمان کوتاه انتخاب تابع پنجره است که این هم به اصل عدم قطعیت هایزنبرگ بر می‌گردد. تبدیل موجک برای حل مشکل فوق‌الذکر معرفی شده است. در تجزیه و تحلیل یک موج با استفاده از موجک‌ها توابع مختلف نمایی با طول نامحدود را که توابع پایه تبدیل فوریه را تشکیل می‌دهند با توابع دیگری که در حوزه زمان بیشتر متمرکز هستند (و در حوزه فرکانس کمتر) جایگزین می‌کنیم. جهت کسب اطلاعات حوزه زمان، این توابع باید بر روی محور زمان بلغزند به طوری که تمام محور زمان را بپوشانند. از طرف دیگر این توابع باید دارای حالت نوسانی باشند تا بتوانند اطلاعات حوزه فرکانس را استخراج کنند. در نگاه اول $\psi_{a,b}(t)$ در تبدیل موجک پیوسته شبیه به $\exp(-i\omega t)$ در تبدیل فوریه است، اما بر خلاف تبدیل فوریه تبدیل

موجک پیوسته تبدیل یکتا نمی‌باشد. البته باید ذکر کرد که تبدیل موجک نیز مانند تبدیل فوری پیوسته خطی است. تبدیل موجک پیوسته^۳ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$T(a, b) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad (۴)$$

a و b نمایگر پارامتر مقیاس و انتقال می‌باشند. در یک تبدیل انتگرالی ویژگی‌های تبدیل وابسته به هسته تبدیل می‌باشد. در مورد تبدیل فوری، $\exp(-i\omega t)$ هسته تبدیل می‌باشد، در این تبدیل عامل مقیاس گذار همراه با $\exp(-it)$ دسته‌ای از توابع مقیاس کننده خواهد ساخت، که نقش آنها نمایش سیگنال در مقیاس‌های مختلف می‌باشد. در مورد تبدیل موجک پیوسته که شبیه به تبدیل فوری است منتها در تبدیل موجک بر پایه تابع ψ مقیاس‌گذاری می‌شود، اما بر خلاف تبدیل فوری این تابع انتقال داده می‌شود. لذا دسته‌ای از توابع دو پارامتری $\psi_{a,b}$ در نظر گرفته شده است، یعنی:

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right); a, b \in \mathbb{R} \quad (۵)$$

برای اینکه تابع ψ در $L^2(\mathbb{R})$ یک موجک باشد باید شرط زیر را برآورده کند:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (۶)$$

$\hat{\psi}$ تبدیل فوری ψ است. به طور متفاوتی با تبدیل فوری زمان کوتاه، موجک‌ها استفاده شده در تبدیل موجک‌ها از انقباض و انبساط یک تابع $\psi(t)$ که آن را موجک مادر نامیده‌اند، به دست می‌آیند. تفاوت دیگر آن با تبدیل فوری زمان کوتاه در این است که گستردگی موجک‌ها با پارامتر مقیاس a تغییر می‌کند. لازم به ذکر است که هر تابعی را نمی‌توان به عنوان موجک به کار برد. در آنالیز تابعی موجک مادر باید دو شرط زیر را برآورده کند. شرط نخست پذیرفتاری^۴ می‌باشد. طوری که اگر $\psi \in L^1(\mathbb{R})$ ، آنگاه تبدیل فوری آن، $\hat{\psi}$ ، پیوسته خواهد بود. بنابراین داریم:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0 \quad (۷)$$

شرط دوم خوش موضعی^۵ بودن موجک‌ها می‌باشد. به این صورت که ψ در هر دو حوزه زمان و بسامد خوش موضع است و یا اینکه ψ و مشتق‌هایش بسیار سریع میرا می‌شوند. همچنین شرط پذیرفتگی به طور ضمنی لازم می‌دارد که موجک‌ها حداقل با سرعت $\frac{1}{|t|}$ میرا باشند. یعنی موجک تابعی است که نوسان می‌کند ولی مدت استمرار آن کوتاه است. لازم به ذکر است که پهنای باند موجک‌های مختلف با گستردگی آنها در حوزه زمان رابطه معکوس دارد.

³ Continuous Wavelet Transform

⁴ Admissibility

⁵ well-localized

۳- روش محاسبه توابع موجک

معادله شرودینگر برای نوسانگر هماهنگ ساده کوانتومی به شکل زیر می‌باشد [۱۳، ۱۴]:

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + (\lambda - x^2)\Psi(x) = 0 \quad (۸)$$

که در آن $\lambda = \frac{2E}{\hbar\omega}$ ، E انرژی، ω بسامد زاویه‌ای و $\hbar = 1.054572 \times 10^{(-34)} J.S$ می‌باشد. جواب‌های این معادله به صورت:

$$\Psi_n(x) = 2^{(-n/2)} \pi^{-\frac{1}{4}} (n!)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x) \quad (۹)$$

که در آن $H_n(x)$ چند جمله‌ای‌های هرمیت می‌باشند. در فیزیک کوانتومی به دنبال ساختن ترکیبی از جواب‌های معادله شرودینگر برای نوسانگر کوانتومی یا همان ویژه حالت‌های نوسانگر کوانتومی هستند طوری که بیشترین شباهت را به نوسانگر کلاسیک داشته باشد. لذا می‌توان با اثر دادن عملگر انتقال روی تابع حالت پایه نوسانگر کوانتومی:

$$T(a)\Psi(x) = \Psi(x+a) \quad (۱۰)$$

تابعی را ساخت که دارای شرایط مورد نظر باشد. اگر به جای $\Psi(x)$ تابع حالت پایه نوسانگر کوانتومی را قرار دهیم:

$$\Psi_0(x) = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (۱۱)$$

آنگاه می‌توان نوشت:

$$(1+x\frac{\partial}{\partial x})\Psi_0(x) = (1-x^2)\pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2}} = \Psi_1(x) \quad (۱۲)$$

عبارت سمت راست معادله فوق در شرط پذیرفتگی که قبلاً ذکر شده صدق می‌کند، بنابراین می‌توان آن را به عنوان موجک (کلاه مکزیکی) در نظر گرفت. همچنین با توجه به تعریف چند جمله‌ای‌های هرمیت می‌توان معادله فوق را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\Psi_1(x) = (H_0 - \frac{H_2}{4})\pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (۱۳)$$

به روشی مشابه و با توجه به ظاهر شدن اندیس‌های زوج چند جمله‌ای‌های هرمیت و نیز شرط مهم پذیرفتگی می‌توان دو تابع موجک دیگر یعنی توابع Ψ_2 و Ψ_3 را به صورت زیر به دست آورد:

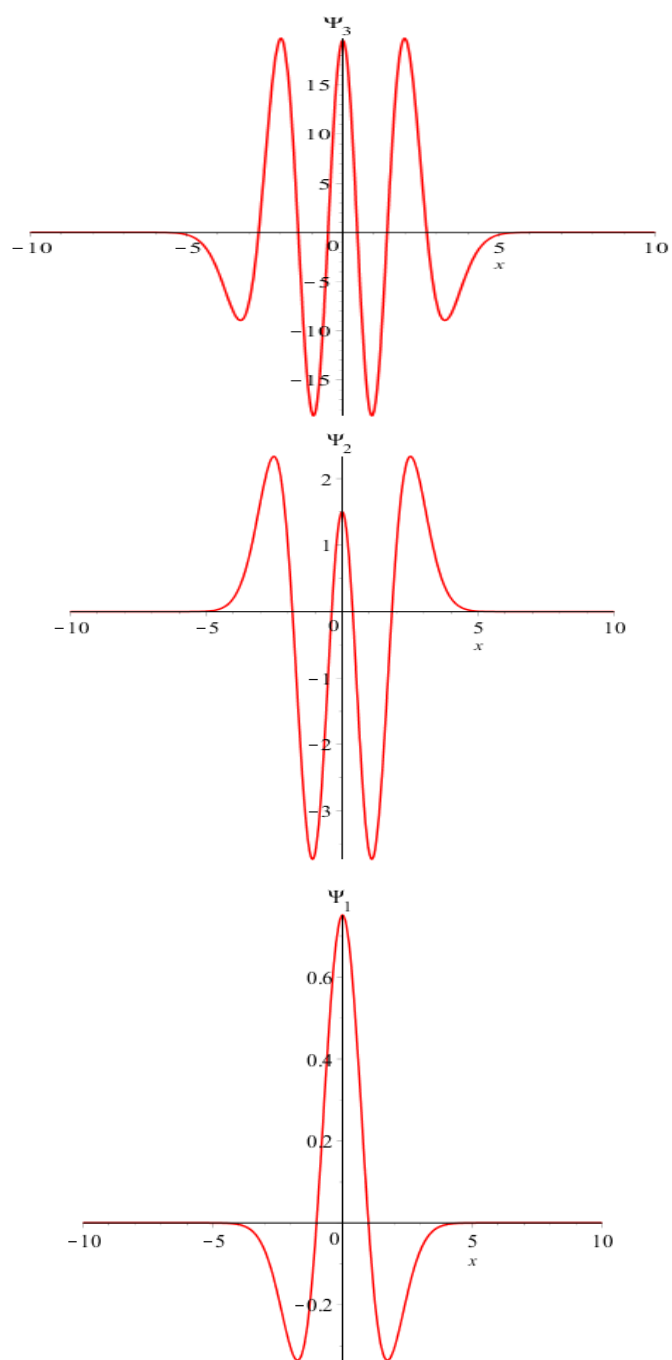
$$\Psi_2(x) = (-H_0 - \frac{H_2}{4} + \frac{H_4}{8})\pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (۱۴)$$

$$\Psi_3(x) = (-H_0 - H_2 + H_4 - \frac{H_6}{8})\pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (۱۵)$$

بنابراین می‌توان رابطه کلی زیر را برای محاسبه توابع همدوس یا همان موجک‌ها به کار برد:

$$\Psi_n(x) = \pi^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{x^2}{2}} \sum_{i=1}^n A_i H_{2i} \quad (۱۶)$$

حال به بررسی این سه تابع می‌پردازیم. نمودارهای این سه تابع موجک در شکل ۱ نشان داده شده‌اند.



شکل ۱. نمودارهای توابع موجک Ψ_1 و Ψ_2 و Ψ_3

با مقایسه نمودارهای توابع موجک به دست آمده مشاهده می‌شود که توابعی که دارای قله‌های متوالی می‌باشند این امکان را دارند که دارای فرصت بیشتری برای شناسایی اطلاعات فرکانسی موج دارند، لذا حساسیت بیشتری در تشخیص فرکانس مورد نظر در موج دارند و برای بررسی اطلاعات موج مناسب‌تر می‌باشند.

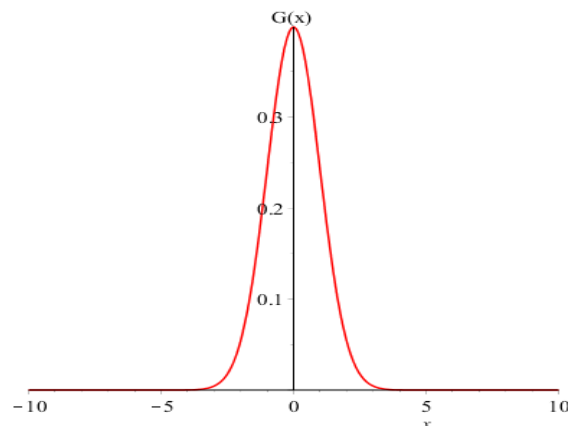
مساله دیگری که در اینجا برای ما اهمیت دارد مربوط به اصل عدم قطعیت می‌باشد. توابع موجک یا همان توابع همدوس کوانتومی می‌بایست دارای کمترین میزان عدم قطعیت باشند. با توجه به رابطه کلی عدم قطعیت برای یک مشاهده پذیر مانند A در فیزیک کوانتومی:

$$\langle \Delta A^2 \rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 \quad (۱۷)$$

و نیز رابطه $\langle A \rangle = \int dx \Psi(x) A \Psi^*(x)$ برای مکان x و تکانه $P = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$ مقادیر عدم قطعیت مطابق داده‌های جدول محاسبه شده‌اند. اعداد به دست آمده در این جدول نشان دهنده سازگاری روابط مربوط به عدم قطعیت این توابع با رابطه عدم قطعیت استاندارد فیزیک کوانتومی می‌باشد.

جدول (۱): مقایسه نتایج عدم قطعیت سه تابع موجک

موجک ها	Δx	Δp
Ψ_1	0.93541	$1.36930 \hbar$
Ψ_2	9.74679	$11.61895 \hbar$
Ψ_3	61.19231	$95.45941 \hbar$



شکل ۲. نمودار تابع گاوسی

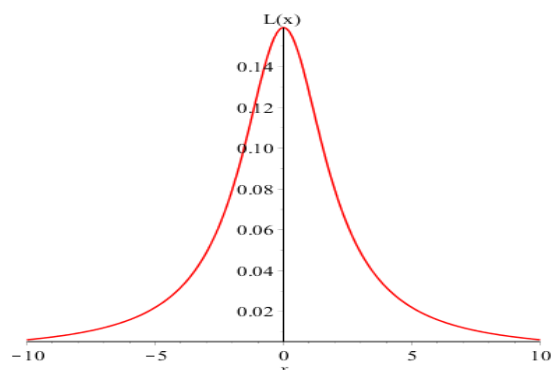
حال به مقایسه توابع موجک به دست آمده با دو تابع دیگر یعنی تابع گاوسی و تابع لورنتز می‌پردازیم. ابتدا برای تابع گاوسی:

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (۱۸)$$

مقادیر $\Delta x = 0.37561$ و $\Delta p = 0.37561\hbar$ را محاسبه کرده سپس همین مقادیر را برای تابع لورنتز:

$$L(x) = \frac{1}{\pi} \frac{2}{x^2 + 4} \quad (۱۹)$$

پیدا می‌کنیم، $\Delta x = 0.56433$ و $\Delta p = 0.09974\hbar$. مشاهده می‌شود که با مقایسه شکل این توابع و همچنین مقادیر به دست آمده برای Δx و Δp در می‌یابیم که توابع موجک محاسبه شده دارای مزیت و برتری لازم نسبت به دو تابع اخیر جهت استفاده در تجزیه و تحلیل امواج می‌باشند، همچنین لازم به ذکر است که دو تابع فوق‌الذکر در شرط پذیرفتگی صدق نمی‌کنند.



شکل ۳. نمودار تابع لورنتز

برخلاف فیزیک کوانتومی معمولی اگر از یک موج تعدیل یافته محدود مانند موجک برای توصیف امواج کوانتومی استفاده شود، عدم قطعیت در اندازه‌گیری مکان و تکانه خطی به میزان قابل توجهی کاهش می‌یابد. این امر سبب امیدوار شدن بسیاری از پژوهشگران در حوزه فیزیک کوانتومی شده، تا حدی که شاید بتوان گفت که به یک اندازه‌گیری کوانتومی ایده‌ال با خطای صفر نزدیک شده‌اند [۱۵]. راه حل کلی برای انتخاب موجک مادر از این قرار است که شباهت بین سیگنال و موجک مادر را معیار قرار دهیم. هرچه تشابه بین موجک مادر و یک سیگنال بیشتر باشد آنالیز سیگنال با استفاده از موجک بهتر انجام می‌گیرد. روش‌های مختلفی برای شناسایی شباهت بین سیگنال و موجک مادر بر اساس دو دیدگاه کیفی و کمی وجود دارد. در رویکرد کیفی برخی ویژگی‌ها مانند تقارن و تناوب به عنوان ملاک در نظر گرفته می‌شوند، و در روش کمی بر اساس تکنیک‌های دقیقی ریاضی مانند ارزیابی مقدار مینیمم طول توصیف^۶ عمل می‌شود [۱۶]. در مجموع می‌توان گفت که در هر مطالعه بسته به نوع سیگنال ورودی و شباهت آن سیگنال با انواع موجک‌های مادر، انتخاب مناسب در نظر گرفته می‌شود.

^۶Minimum description length

۴- نتیجه‌گیری

از اهداف کلی معرفی توابع موجک ارائه روشی برای تجزیه و تحلیل امواج و سیگنال‌ها در زمینه‌های مختلف علمی و کاربردی می‌باشد. با به کار بردن مفاهیم فیزیک کوانتومی نظیر اصل عدم قطعیت، نوسانگر کوانتومی، حالت‌های همدوس کوانتومی و نیز استفاده از چند جمله‌ای‌های هرمیت، می‌توان توابع موجک جدید را ساخت که در شرایط لازم صدق کنند و از آنها جهت آنالیز هر چه بهتر امواج و سیگنال‌ها نظیر سیگنال‌های حیاتی، مهندسی و علوم بهره برد و در جهت کاربردهای تشخیصی و پیشگیرانه از آنها استفاده کرد.

فهرست منابع

- [1] C.C.Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, Quantum Mechanics, Volume 1: Basic Concepts, Tools, and Applications, Wiley, (2019).
- [2] D.A.Greiner, Quantum Mechanics: An Introduction, Springer Berlin Heidelberg, (2000)
- [3] Do Tan Si, The Fourier Transform and Principles of Quantum Mechanics, Applied Mathematics, 09(04):347-354, (2018).
- [4] K.Gröchenig, The Short-Time Fourier Transform. In: Foundations of Time-Frequency Analysis. Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhäuser, (2001)
- [5] L. Cohen, Uncertainty principles of the short-time Fourier transform. Advanced Signal-Processing Algorithms. Proc. SPIE. 2563, 80-90 (1995).
- [6] A. Mertins, Signal Analysis: Wavelets, Filter Banks, Time-Frequency Transforms and Applications, John Wiley & Sons Ltd. , (1999).
- [7] S. A. Twareque, J.P Antoine, J.P. Gazeau, Coherent States, Wavelets and Their Generalizations, Springer, (2013).
- [8] M. Misiti , Y. Misiti , G. Oppenheim , J.M. Poggi, Wavelets and their Applications, Wiley, (2007).
- [9] P. S. Addison, Wavelet transforms and the ECG: a review, Physiological Measurement, 26 R155–R199, (2005).
- [10] A.K.Piątkowska, and A.Dobrzycki. "Application of Wavelet Transform to Damage Identification in the Steel Structure Elements" Applied Sciences, 10, no. 22: 8198. (2020).
- [11] Q.Ma, M. Solís, P.Galvín, Wavelet analysis of static deflections for multiple damage identification in beams. Mechanical Systems and Signal Processing. 147. 107103. (2021).
- [12] Z.He, M.Shaowei, W.Liguan, and Pingan Peng. "A Novel Wavelet Selection Method for Seismic Signal Intelligent Processing" Applied Sciences 12, no. 13: 6470. (2022).
- [12] W.M Zhang, D. H. Feng, R. Gilmore, Coherent States: Theory and Some Applications, Rev.Mod.Phys. , 62 867-927. (1990).
- [13] J.P. Gazeau, Coherent States in Quantum Physics , Wiley, (2009).
- [14] G.B. Arfken, H.J. Weber, F. E. Harris, Academic Press, Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide, (2012).
- [15] P. Castro J. R. Croca M. Gatta R. Moreira, generalized uncertainty relations in quantum mechanics and the principle of completeness in physics, Physical Science International Journal , 16 (4), 1-9. (2017).
- [16] N.Salto, Simultaneous noise suppression and signal compression using a library of orthonormal bases and the minimum description length criterion, (2nd ed.), (1994).

