

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال دهم، شماره چهل و هشتم، خرداد و تیر ۱۴۰۳

شماره شاپا: ۵۸۸۸-۲۵۸۸



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

اثربخشی استفاده از نظریه APOS-ACE بر درک دانشجویان از مفهوم مشتق در محیط یادگیری گسسته

امین بادیه پیمای جهرمی^۱، امیرعلی طباطبایی^۲، مجید حق وردی^۳

^(۱و۲) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، واحد تهران مرکزی، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

^(۳) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، واحد اراک، دانشگاه آزاد اسلامی، مرکزی، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۱/۰۱/۲۷ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۹/۰۹

چکیده

این مطالعه با هدف بررسی اثربخشی نظریه APOS-ACE بر درک دانشجویان از مفهوم مشتق در محیط یادگیری گسسته معرفی شده توسط ویگانند (۲۰۱۴) انجام شد. در این رویکرد روشی گام به گام از تفاضل دنباله‌ای برای توابع تعریف شده بر Z و Q مطرح می‌شود. بدین منظور برای انجام این پژوهش از طرح نیمه آزمایشی پیش‌آزمون-پس‌آزمون با گروه کنترل استفاده شده است. در پژوهش حاضر ۴۲ دانشجوی مهندسی در دو گروه از یکی از دانشگاه‌های استان فارس شرکت کردند. در ابتدا با استفاده از آزمون محقق ساخته یک پیش‌آزمون از هر دو گروه به عمل آمد. سپس چرخه تدریس ACE با کمک نرم افزار جئوجبرا طراحی شد و در گروه آزمایش مفهوم مشتق گسسته با استفاده از این چرخه تدریس شد. برای تحلیل داده‌های بدست از کوواریانس استفاده شد. یافته‌های این مطالعه نشان داد استفاده از چرخه ACE بر درک دانشجویان از مفهوم رویکرد گسسته مشتق موثر بوده است و به تدریج به درک بهتر آهنگ تغییر و آهنگ لحظه‌ای به کمک دنباله‌ها سوق داده می‌شود.

واژه‌های کلیدی: تدریس و یادگیری، دنباله تفاضلی، مشتق، نظریه APOS، چرخه ACE

۱- مقدمه

مشتق یکی از مفاهیم اساسی مهم در حساب دیفرانسیل و انتگرال است. اهمیت یادگیری مفهوم مشتق از این نظر که در یادگیری مفاهیمی از جمله پادمشتق و انتگرال مورد نیاز است، نیز مورد توجه ویژه ای قرار می گیرد. ژیرالدو و همکاران [۱] بیان می کنند که بین توضیح یک مفهوم که برخی از ویژگی های آن را مشخص می کند و تعریف رسمی مفهوم تفاوت وجود دارد. به طور ویژه آنها به توصیف رایج مشتق تابع در نقطه a در دامنه تابع (در صورت وجود) که عبارت است شیب خط مماس بر نمودار تابع در نقطه $(a, f(a))$ اشاره کردند. توصیف رایج دیگر مشتق آهنگ لحظه ای تغییر تابع می باشد در حالی که معنای فیزیکی مشتق به سرعت و شتاب شی متحرک در یک لحظه از زمان اشاره دارد. در مقابل تعریف رسمی مشتق تابع $f(x)$ در نقطه $x=a$ برابر است با

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

درک مفهوم مشتق بخصوص بر اساس مفهوم حد و شیب منحنی و مفهوم آهنگ تغییر در کتاب های ریاضیات است. برای اکثر دانشجویان درک تعاریف رسمی حد، مشتق دشوار است، بصورتی که توانایی به کارگیری دقیق تعاریفها را در موقعیت مختلف ندارند و از درک عمیق تر مفاهیم برخوردار نمی باشند. تحقیقات نشان داده که مفهوم مشتق به علت پیچیدگی در تعریف یکی از مفاهیم مشکل در حسابان می باشد [۲]. برخی دانش آموزان و دانشجویان حتی پس از گذراندن دوره های حساب دیفرانسیل و انتگرال درک مفهومی مناسبی از مشتق به دست نمی آورند [۳]. همچنین پژوهش های قبلی در مورد مفهوم مشتق نشان داده است که اگرچه دانش رویه ای دانشجویان در مورد مشتق گیری کافی است، اما اکثر آن ها دانش مفهومی یا شهودی کمی از مشتق دارند [۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ و ۹ و ۱۰ و ۱۱]. با توجه به پژوهش های اشاره شده بالا در مورد مشکلات درک مفهومی مشتق، ویگاند [۱۲] رویکردی جدیدی را برای درک مفهوم مشتق معرفی می کند. ویگاند رویکرد گسسته گام به گامی را برای درک بهتر مفهوم مشتق بوسیله تعامل با دنباله و تفاضل دنباله ای توابع تعریف شده روی دامنه های گسسته Z و Q سپس با تعمیم به دامنه R ارائه می دهد. مزیت این روش عدم ارائه مفهوم حد در آغاز کار است و مفهوم آهنگ تغییر با استفاده از نمونه های گسسته بیان می شود و به تدریج ذهن فراگیران به سوی درک بهتر آهنگ تغییر و آهنگ لحظه ای سوق داده می شود [۱۳]. بنابراین در رویکرد گسسته دنباله شیب های قاطع توابع Z_n گسسته برای تفسیر مشتق تابع f در نقطه ای خاص از نمودار f و در نتیجه محاسبه آهنگ لحظه ای تغییر ارائه می شود.

نظریه APOS (عمل^۲، فرایند^۳، شی^۴، طرحواره^۵) [۱۴] به بررسی درک فراگیران از مفاهیم ریاضی می پردازد. برطبق نظریه ی APOS مفاهیم ریاضی به طور مستقیم یادگرفته نمی شوند بلکه بهتر است ساختارهای مناسب به تدریج در ذهن فراگیران ساخته شود. بر اساس این نظریه یادگیرنده باید یک ساختار ذهنی مرتبط با عمل، فرایند، شی و طرحواره داشته باشد تا بتواند به درک یک مفهوم ریاضی برسد و اگر چنین ساختار ذهنی وجود نداشته باشد، یادگیری آن مفهوم نیز تقریباً غیرممکن می باشد [۱۵]. راهبردهای پداگوژیکی (آموزشی) نظریه APOS برای

^۲. Action

^۳. Processes

^۴. Objects

^۵. Schemas

تدریس مفاهیم ریاضی چرخه تدریس ACE (فعالیت^۶، گفت‌وگو کلاسی^۷، تمرینات^۸) با کمک رایانه می‌باشد. بنابراین هدف ما در این مطالعه این است که اثر بخشی استفاده از چرخه تدریس ACE را در تدریس و یادگیری مفهوم مشتق در محیط یادگیری گسسته را بررسی نماییم.

۲- پیشینه تحقیق

برجی و مارتینز پانل [۱۶] نظریه APOS-ACE را برای بررسی درک دانشجویان از تابع ضمنی و مشتق آن بکار بردند. برای درک تابع ضمنی و مشتق آن ابتدا یک تجزیه ژنتیکی پیشنهاد شد و سپس با استفاده از تجزیه ژنتیکی پیشنهادی چرخه ACE برای کمک به دانشجویان در انجام ساخت های ذهنی که فاقد آن بودند، طراحی و اجرا شد. نتایج نشان داد که استفاده از چرخه تدریس ACE در درک دانشجویان از تابع ضمنی و مشتق آن موثر است. برجی و همکاران [۱۷] از نظریه APOS-ACE برای بهبود درک گرافیکی دانشجویان از مشتق تابع استفاده کردند. برای این منظور، یک چرخه ACE با کمک نرم افزار Maple طراحی شده و بر روی گروهی از دانشجویان (گروه آزمایش) پیاده سازی شد. نتایج این اجرا با مقایسه عملکرد گروه آزمایش با عملکرد یک گروه دانشجویی دیگر (گروه کنترل) ارزیابی شد، که همان موضوع را به روش سنتی و مبتنی بر سخنرانی دریافت کردند. یافته های این تحقیق نشان داد که دانشجویانی که در گروه آزمایش بودند، درک بهتری از مفهوم مشتق در مقایسه با گروه کنترل داشتند. سیتن [۱۸] در پژوهشی درک دانشجویان از مفهوم حد را به کمک نظریه APOS بررسی کرد. هدف اصلی این مطالعه بررسی درک دانشجویان سال اول از مفهوم رسمی حد و تغییر در درک آنها پس از اجرای دستورالعمل طراحی شده توسط محقق و براساس نظریه APOS بود. دانشجویان طی ۵ هفته و هر هفته ۲ ساعت در یک آزمایشگاه رایانه با هم کار می کردند و سپس در ۴ ساعت کلاس درس شرکت می کردند. دانشجویان قبل از اینکه تعریف رسمی حد را در کلاس دریافت کنند در آزمایشگاه رایانه، بر روی فعالیت های برنامه نویسی به منظور تامل درباره مفهوم حد کار می کردند. برای تعیین تغییرات در درک دانشجویان از این مفهوم، پرسشنامه حد به عنوان پیش آزمون و پس آزمون اجرا شد. در پایان این دستورالعمل، یک مصاحبه نیمه ساختاری تهیه شده توسط محقق برای بررسی عمیق تر درک دانشجویان از مفهوم حد انجام شد. پاسخ دانشجویان در این پرسشنامه از نظر کمی و کیفی مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت. نتایج مصاحبه با استفاده از نظریه APOS مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفت. نتایج مطالعه نشان داد که دانشجویان آنچه را که از طریق تجزیه ژنتیکی اولیه پیش بینی شده بود، منعکس می کردند و همچنین مشخص شد که این دستورالعمل نقش مثبتی در تسهیل درک دانش آموزان از مفهوم حد تابع دارد. مارتینز پانل و همکاران [۱۹] از تئوری APOS (عمل، فرایند، شی، طر حواره) به عنوان ابزاری برای تحلیل درک و فهم دانشجویان از مشتق جهتی توابع دو متغیره استفاده کردند. به منظور درک دانشجویان از مشتق جهتی (سوئی) یک تجزیه ژنتیکی از این مفهوم ارائه شد و مصاحبه های نیمه ساختار یافته با ۲۶ دانشجو برای آزمایش این تجزیه ژنتیکی پیشنهادی انجام شد. نتایج این مطالعه نشان داد که فقط ۴ دانشجو از ۲۶ دانشجو شواهدی از ساختن تمام یا بیشتر ساخت های ذهنی مورد نیاز در تجزیه ژنتیکی ارائه دادند که نشان دهنده این است که ایده مشتق جهتی برای اکثر دانشجویان دشوار است و آنها حتی در ابتدایی ترین مفاهیم مرتبط با این ایده به کمک بیشتری نیاز دارند. بسیاری از دانشجویان مفهوم فرآیند از مشتق تابع یک متغیره را برای استفاده در ساختارهای ذهنی پیشنهادی از

^۶. Activities

^۷. Classroom discussion

^۸. Exercises

مشتق جهت دار نشان ندادند. همچنین بسیاری از دانشجویان به فرمول‌ها تکیه می‌کردند و در نتیجه در پاسخ به سؤالاتی که نیاز به درک عمیق‌تر مفهومی داشتند، مشکلاتی را نشان می‌دادند و بیشتر دانشجویان فاقد درک هندسی از مؤلفه‌های اساسی در تعریف مشتق جهتی بودند.

ماهارج [۲۰] درک دانشجویان را از مفهوم مشتق تابع با استفاده از نظریه APOS مورد تجزیه و تحلیل قرار داد. یافته‌های این پژوهش نشان داد که دانشجویان در به‌کارگیری قواعد مشتق‌ها با مشکل مواجه بوده‌اند و این احتمالاً نتیجه عدم ساختار ذهنی مناسب بسیاری از دانشجویان در سطوح فرآیند، شی و طرحواره نظریه APOS بوده است.

بادیلو و همکاران [۲۱] میزان درک رابطه بین $f'(a)$ (مشتق در یک نقطه) و $f'(x)$ (مشتق به عنوان یک تابع) در بین ۵ نفر از معلمان ریاضی در کلمبیا به کمک نظریه APOS را بررسی کردند. معلمان در مورد درک خود از $f'(a)$ و $f'(x)$ به یک پرسشنامه پاسخ دادند و در ادامه مصاحبه‌هایی با آنها انجام شد. نتایج مطالعه نشان داد که چگونه درک $f'(a)$ و $f'(x)$ می‌تواند با هر دو طرحواره گرافیکی و جبری مشتق در ارتباط باشد.

سیپو [۲۲] از نظریه APOS به عنوان ابزاری برای تجزیه و تحلیل خطاهای دانشجویان در یادگیری مشتق توابع نمایی، لگاریتمی و مثلثات استفاده کرد. شرکت‌کنندگان در این مطالعه گروهی متشکل از بیست دانشجو بودند که در یک برنامه درسی توسعه یافته در دانشگاه فنی در آفریقای جنوبی ثبت نام کرده بودند. او از روش مطالعه موردی استفاده کرد و داده‌ها را از کارهای نوشتاری دانشجویان جمع‌آوری کرد. نتیجه‌گیری او این بود که درک اکثر دانشجویان از مفهوم مشتق این توابع در سطح عمل یا بین سطوح عمل و فرآیند نظریه APOS قرار دارد. همچنین توصیه کرد که یک چرخه تدریس ACE باید به منظور کمک به دانشجویان در توسعه طرحواره مورد نیاز اجرا شود.

آسیلا، کانتریل، و همکاران [۲۳] از نظریه APOS برای تحلیل درک گرافیکی دانشجویان از مفهوم مشتق استفاده کردند. آنها مصاحبه‌هایی روی مشتق با ۴۱ دانشجوی مهندسی، علوم و ریاضیات انجام دادند که حداقل دو ترم حسابان را به پایان رسانده بودند. در این پژوهش از استراتژی آموزشی نظریه APOS به نام چرخه تدریس ACE استفاده شد. نتایج این پژوهش نشان داد که استفاده از چرخه تدریس ACE با فعالیتهای کامپیوتری که با دقت طراحی شده بودند به طور معقول در کمک به دانشجویان در توسعه یک درک فرآیندی نسبتاً قوی از تابع و درک گرافیکی از مشتق مؤثر بوده است. دانشجویانی که از طریق چرخه تدریس ACE آموزش دیده بودند، درک فرایند قوی را در فهم نماد $f(x)$ و همچنین در تفسیر رابطه بین مشتق، نمودار آن و نمودار تابع نشان دادند.

۳- چارچوب نظری

در این بخش چارچوب نظری مورد استفاده در تحقیق، رویکرد گسسته مشتق و نظریه APOS شرح داده می‌شود.

رویکرد گسسته مشتق :

ویگاندر رویکردی از دسترسی گسسته به حسابان را ارائه داد که مفهوم آهنگ متوسط تغییر براساس دنباله‌های مختلف با نگاهی بر توابع گسسته مطرح می‌شود. ویگاندر اظهار داشت که دنباله‌های گسسته و دنباله‌های تفاضلی آنها می‌توانند از توسعه ایده‌های اساسی برای مفاهیم آهنگ تغییر، مشتق و تابع مشتق حمایت کنند. ویگاندر مورد رویکرد گسسته بیان می‌کند که "در حال توسعه اولین سطوح این مفهوم، مفهوم حد فقط به معنای شهودی استفاده می‌شود. تمام محاسبات را می‌توان در یک سطح جبری گسسته انجام داد. این مفهوم رویکرد گسسته به مفهوم مشتق آماده سازی برای درک مشتقات توابع حقیقی است. این درک بهتری از معنای آهنگ تغییر یا کسر

تفاضلی ایجاد می کند ، با کار صریح با دنباله ها (یا توابع گسسته) حدها یا فرایند تقریبی را عملی می کند ، و از این نظر از درک کردن حد شهودی فراتر می رود." ویگاند پنج سطح برای به کارگیری رویکرد گسسته به منظور درک مفهوم مشتق معرفی می کند.

سطح اول: دنباله های تفاضلی

هدف این سطح ، معرفی مفهوم تفاضل دنباله ای $(n \in \mathbb{N})$ و $\Delta a_n = a_{n+1} + a_n$ است. چنانچه $\Delta n = 1$ فرض شود، Δa_n می تواند بعنوان آهنگ تغییر در نظر گرفته شود، که در مسائل واقعی زندگی به کار برده می شود. مانند متوسط دمای هوا در هر سال که ممکن است بصورت جدول یا نمودار نشان داده شود.

سطح دوم: مفهوم توابع درجه دوم Z

قبلاً دنباله با دامنه N تعریف شد. اکنون مفهوم دنباله برای توابع تعریف شده روی Z بسط داده می شود. تابع $f: Z \rightarrow R$ را تابع Z می نامیم. توابع $y = f(z)$ دنباله های توسعه یافته ای هستند که روی اعداد $z \in Z$ تعریف شده اند.

مثال ۱:

برای تابع $f(z) = z^2 - 2z + 3$ تابع Z تفاضلی بصورت $D_f(z) = f(z+1) - f(z) = 2z + 1 - 2$ می باشد. مثال ۲: برای $f(z) = az^2 + bz + c$ می توان به $D_f(z) = 2az + a + b$ رسید و دریافت که $D_f(z)$ به پارامتر c بستگی ندارد.

سطح سوم: توابع Z چند جمله ای

این مفهوم را می توان به توابع چند جمله ای از درجه بالاتر نیز ارتقا داد.

مثال ۳: برای $f(z) = az^3 + bz^2 + cz + d$ داریم:

$$D_f(z) = 3az^2 + (3a + 2b)z + a + b + c$$

D_f تابعی درجه دوم است که به پارامتر d بستگی ندارد.

سطح چهارم: تابع نمایی

مثال ۴: برای توابع نمایی $E(z) = a^z (a \in R^+, z \in Z)$ تابع تفاضلی آن عبارت است از:

$$D_E(z) = E(z+1) - E(z) = a^{z+1} - a^z = a^z(a-1) = E(z)(a-1)$$

برای دستیابی به $D_E(z)$ کافی است $E(z)$ را در عامل $(a-1)$ ضرب کنیم.

سطح پنجم: انتقال ایده از Z به Q و R

در این بخش دامنه Z از توابع $f(z)$ با در نظر گرفتن مقادیر $z_1 \in Z_1$ که $z \in Z$ بسط داده می شود. این بدان معنی است که :

$$z_1 \in Z_1 = \left\{ \dots, -\frac{2}{10}, -\frac{1}{10}, 0, \frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \dots \right\}$$

و تابع f بصورت $f_{\cdot}: Z_{\cdot} \rightarrow R$ تعریف می‌شود. برای رسیدن به آهنگ تغییر مقادیر متوالی، این بار فواصل را به جای ۱ واحد به $\frac{1}{\cdot}$ محدود می‌کنیم و تابع کسر تفاضلی $Z_{\cdot}$ بدست می‌آید:

$$D_f(z_{\cdot}) = \frac{f\left(z_{\cdot} + \frac{1}{\cdot}\right) - f(z_{\cdot})}{\frac{1}{\cdot}}, z_{\cdot} \in Z_{\cdot} = \left\{ \dots, -\frac{2}{\cdot}, -\frac{1}{\cdot}, \frac{1}{\cdot}, \frac{2}{\cdot}, \dots \right\}$$

این مسئله در فواصل طولی $\frac{1}{n}$ ، $n \in N$ کلی سازی شده و تابع z_n کسر تفاضلی D_{f_n} به صورت زیر است:

$$D_{f_n}(z_n) = \frac{f\left(z_n + \frac{1}{n}\right) - f(z_n)}{\frac{1}{n}} \quad (z_n \in Z_n) = \left\{ \dots, -\frac{1}{n}, -\frac{2}{n}, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots \right\}$$

مثال ۵: برای تابع درجه دوم Z

$$D_{f_n}(z_n) = az_n^2 + bz_n + c$$

داریم:

$$D_f(z_n) = 2az_n + b + \frac{a}{n}$$

حال اگر $n \rightarrow +\infty$ داریم:

$$D_f(z_n) = 2az + b$$

که همان مشتق تابع خواهد بود. این ایده برای تابع Z نمایی $E(z_{\cdot}) = a^{z_{\cdot}}$ مشابه است و تابع کسر تفاضلی آن عبارت است از:

$$D_E(z_{\cdot}) = \frac{E\left(z_{\cdot} + \frac{1}{\cdot}\right) - E(z_{\cdot})}{\frac{1}{\cdot}} = \frac{a^{z_{\cdot} + \frac{1}{\cdot}} - a^{z_{\cdot}}}{\frac{1}{\cdot}} = a^{z_{\cdot}} \frac{a^{\frac{1}{\cdot}} - 1}{\frac{1}{\cdot}}$$

چنانچه $\frac{a^{\frac{1}{\cdot}} - 1}{\frac{1}{\cdot}} = 1$ و یا $a = 2/5937$ فرض شود، تابع $E(z_{\cdot})$ با $D_E(z_{\cdot})$ برابر خواهد بود. با در نظر گرفتن

تابع نمایی $E(z_n) = a^{z_n}$ داریم:

$$D_E(z_n) = \frac{E\left(z_n + \frac{1}{n}\right) - E(z_n)}{\frac{1}{n}} = \frac{a^{z_n + \frac{1}{n}} - a^{z_n}}{\frac{1}{n}} = a^{z_n} \frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}}$$

اما وقتی $n \rightarrow \infty$ داریم:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = 1$$

و این بدین معنی است که $D_E(z_n)$ همان مشتق تابع نمایی است. در ادامه آهنگ لحظه ای تغییر برای $x \in D \subseteq R$ انجام می شود. دنباله کسر تفاضلی را برای تفاضل حقیقی f تشکیل می دهیم.

$$D_n(x) = \frac{f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}} \quad (n \in N)$$

مثال ۶:

برای تابع $f(x) = ax^r + bx + c$ در نقطه $(x, f(x))$ داریم:

$$D_n(x) = \frac{f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}} = \frac{a\left(x + \frac{1}{n}\right)^r + b\left(x + \frac{1}{n}\right) + c - ax^r - bx - c}{\frac{1}{n}} = rax^{r-1} + b + \frac{a}{n}$$

بنابراین دنباله $D_n(x)$ با توجه به نمودار f دنباله شیب قاطع در یک نقطه تفسیر می شود.

نظریه APOS:

نظریه APOS (عمل، فرایند، شیء، طرحواره) نظریه ای در مورد چگونگی یادگیری مفاهیم ریاضی است. نظریه APOS توصیف می کند که آموزش و یادگیری ریاضیات باید مبتنی بر کمک به یادگیرنده در استفاده از ساختارهای ذهنی موجود و ایجاد ساختارهای جدید و قدرتمندتر برای درک بهتر مفاهیم ریاضیات است. اصول اساسی نظریه APOS که یک نظریه سازنده گرایی است، این است که درک یادگیرنده از یک موضوع ریاضی با تأمل در مورد مسائل و راه حل های آنها در یک بستر اجتماعی و ساخت یا بازسازی ساختارهای ذهنی خاص و سازماندهی آنها در طرحواره ها برای استفاده در مواجهه با موقعیت های مسئله توسعه می یابد. کولی، تریگوئروس و بیکر [۲۴] معتقدند که اساس یادگیری ریاضی مبتنی بر توسعه و تلفیق ساختارهای ذهنی مفاهیم ریاضی است. مراحل اصلی مفهوم زیر در تئوری APOS استفاده می شود:

۱. مفهوم عمل:

یک عمل تبدیل یک شیء ریاضی است که قبلاً ساخته شده است و فرد آن را به عنوان مولفه خارجی درک می کند. این عمل خارجی است به این معنا که هر مرحله از تبدیل باید صریحاً انجام شود و با دستورالعمل های خارجی هدایت شود. بعلاوه، هر مرحله، مرحله بعدی را ایجاد می کند، یعنی مراحل عمل هنوز نمی توانند تصور شوند و هیچکدام را نمی توان رد کرد.

مرحله عمل برای مفهوم مشتق :

پایه ای ترین درک از مشتق ، مفهوم آن به عنوان عمل است که برخی پژوهشگران، آن را یک تکرار پذیری ذهنی یا دست ورزی فیزیکی از اشیا نامیده اند. در این مرحله از یادگیری، دانش آموزان تشخیص می دهند که مشتق چیست؟ آن ها مشتق را به عنوان یک قانون می بینند. لذا فردی که در سطح عمل قرار دارد، به جز محاسبه ی ضابطه مشتق (در نقاطی خاص) و دست ورزی با قوانین، قادر به انجام کارهای بیشتری نمی باشد. اما درک مفهوم مشتق از توابع درجه دو از محدوده ی یک درک عملی از مشتق توابع، فراتر نمی رود. همه ی موارد ذکر شده، نیازمند ادراک های فرآیندی یا شی و یا هر دو با هم می باشند. در واقع می توان گفت یادگیرندهای که قادر به انجام رویه ها می باشد، مشتق را به شکل عمل، درک کرده است. مثلاً می تواند با داشتن ضابطه $f(x) = x^2 - 3x$ مقدار $f'(2)$ را محاسبه کند. لذا یادگیرندهای که دارای درک عملی از مشتق تابع می باشند، برای اندیشیدن درباره ی مفهوم مشتق یک تابع، نیازمند یک بیان ریاضی شفاف مثل $f'(x)$ است و هنگامی که محاسبه مشتق تابعی مثل $f(x) = x^3$ از او خواسته شود، تنها قادر به نوشتن $f'(x) = 3x^2$ خواهد بود.

۲. مفهوم فرآیند :

هنگامی که عملی تکرار می شود و یادگیرنده بر آن بازتاب می کند، این عمل به صورت یک فرآیند، درونی سازی می شود. در این زمان یادگیرنده دارای ساختار درونی برای اجرای همان عمل می شود. بدین معنا که ساختاری درونی که همان عمل را انجام می دهد، بنا می شود ولی این بار لزوماً به وسیله ی محرک بیرونی، هدایت نمی شود و کنترل در دست خود یادگیرنده است. این ارتباطات معناداری با دانش ریاضی دیگر خواهد داشت که به فرد امکان می دهد فرایند را تصور کند و نتایج را بدون نیاز به اجرای صریح آن پیش بینی کند. ارتباطات معنی دار در یک مفهوم فرآیند به فرد امکان می دهد تا بازنمایی های مختلفی را به هم پیوند دهد و فرایندها را توجیه کند. فرایندهای مختلف ممکن است برای تشکیل فرایندهای جدید هماهنگ شوند. ممکن است یک فرآیند با داخلی سازی چندین عمل مختلف و هماهنگی فرایندهای حاصل ساخته شود.

فرآیند در مفهوم مشتق:

سطح بعدی درک مفهوم مشتق، فرایند است. این مفهوم درک عمیق تری از مفهوم مشتق، به عنوان چیزی که یک شی را می گیرد، آن را تبدیل می نماید و یک شی کاملاً جدید تولید می کند، به دست می دهد و شامل یک فرمول یا قانون صریح است. در این سطح از یادگیری دانش آموزان مایلند توابعی را قبول کنند که شامل تبدیلات مبهمی هستند.

۳. مفهوم شی:

اگر یاد گیرنده بتواند بر اعمالی که بر فرایندی خاص اعمال شده است تامل کند و دریابد که هر فرایند را می توان به عنوان کلیتی دانست که می توان بر روی آن تغییراتی (اعمال و یا فرآیندهایی) اعمال کرد و در صورتی که واقعاً بتواند این تغییرات را هم انجام دهد، میگویند یادگیرنده فرآیند را در قالب شی درک کرده است. در این مرحله می گوئیم فرآیند به صورت یک شی، جمع بندی شده است. در ضمن، برای اجرای یک عمل یا یک فرآیند روی یک شی، اغلب لازم است آن شی به فرآیندی که از آن به دست آمده است، شکافته شود.

شیء برای مفهوم مشتق:

جمع بندی فرایندها به صورت اشیاء و شکافتن اشیاء به صورت فرایندهای تشکیل دهنده ی آنها را میتوان در دست ورزی های با مشتق توابع ثابت و رادیکالی و... دید. مثلاً اگر یادگیرنده ای بتواند مشتق مجموع چند تابع را به صورت حاصل جمع مشتق چند تابع بنویسد گوییم که او مشتق تابع را به عنوان شیء درک کرده است. در واقع درک تعریف رسمی مفاهیم ریاضی، مثل تابع، حد و مشتق و... در این سطح قرار دارد.

۴. طرحواره :

اعمال ، فرایندها ، اشیاء و سایر ساختارهای ذهنی که قبلاً ساخته شده اند و با یک مفهوم ریاضی خاص برخورد می کنند ، ممکن است در یک ساختار منسجم به نام طرحواره سازمان یافته باشند. طرحواره از این نظر منسجم است که مولفه های مختلف به گونه ای با یکدیگر در ارتباط هستند که به شخص اجازه می دهد تا تعیین کند که کدام یک از مسائل مربوط به طرحواره هستند. همچنین شخص می تواند بر طرحواره ها بازتاب کرده و روی آن ها عمل کند که این کار منجر به تبدیل شدن طرحواره به شیء جدیدی می شود. بنابراین اشیاء به دو صورت ساخته می شوند هم از فرایندها و هم از طرحواره ها. در واقع طرحواره های سطوح پایین تر می توانند به عنوان اشیاء برای طرحواره های سطوح بالاتر به حساب بیایند. آسیلا و همکاران [۱۴] بیان می کنند که طرحواره یک شخص ، کل دانش است که از نظر وی آگاهانه یا ناخودآگاه به یک موضوع ریاضی خاص متصل است ، به عنوان مثال ممکن است یک فرد دارای یک طرحواره تابع یا یک طرحواره مشتق باشد. نظریه APOS عمل ها ، فرایندها ، اشیاء و طرحواره ها را به عنوان ساختارهای ذهنی پی در پی فرد در یادگیری یک موضوع ریاضی و درونی سازی ، فشرده سازی به عنوان تنها مکانیسم ذهنی مورد نیاز برای ساخت آن ساختارهای ذهنی در نظر می گیرد.

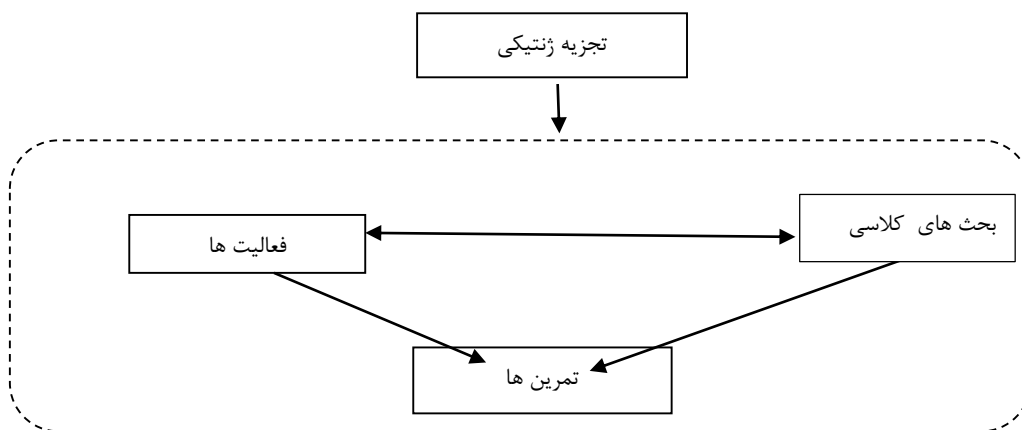
اجرای نظریه APOS به عنوان چارچوبی برای آموزش و یادگیری ریاضیات شامل تجزیه و تحلیل نظری مفاهیم مورد مطالعه است که تجزیه ژنتیکی نامیده می شود. به گفته آرنون و همکاران [۱۵]، تجزیه ژنتیکی یک مدل فرضی است که ساختارها و سازوکارهای ذهنی فراگیران را برای یادگیری یک مفهوم ریاضی خاص نیاز دارند، می تواند توصیف کند. تجزیه ژنتیکی از نظر ساختارهای ذهنی (عمل ، فرآیند ، شیء ، طرحواره) و سازوکارها (درونی سازی، فشرده سازی ، هماهنگی و...) توصیف می شود. تجزیه ژنتیکی یک مفهوم منحصر به فرد نیست. تجزیه ژنتیکی های مختلف ممکن است برای یک مفهوم ارائه شود.

چرخه ACE :

چرخه تدریس ACE یک راهبرد پداگوژی است که معمولاً در نظریه APOS استفاده می شود. این چرخه شامل سه مرحله است: فعالیتهای یادگیری مشارکتی (A) مبتنی بر تجزیه ژنتیکی و اغلب شامل استفاده دانشجویان از رایانه است. بحث های کلاسی برای تأمل در فعالیت ها و نهادینه سازی ریاضیات آموخته شده (C) و تمرینات (E) است. در رابطه با فعالیت ها که اولین مرحله از چرخه را تشکیل می دهند ، دانشجویان به طور مشترک در گروه ها تکالیفی را طراحی می کنند که به آنها کمک می کند تا ساخت های ذهنی پیشنهاد شده توسط تجزیه ژنتیکی را انجام دهند. تمرکز این کارها ارتقا انتزاع انعکاسی است تا بدست آوردن پاسخ های صحیح. این امر اغلب توسط دانشجویان با نوشتن برنامه های کوتاه کامپیوتری با استفاده از زبان برنامه نویسی ریاضی ، حاصل می شود. بحث های کلاسی ، بخش دوم چرخه ، شامل بحث گروهی گروه کوچک و هدایت شده توسط مربیان است ، زیرا دانشجویان روی کاغذ و مداد کار می کنند که بر اساس فعالیت های آزمایشگاهی انجام شده در مرحله فعالیت ها و محاسبات تعیین شده توسط مربی است. بحث های کلاسی و کارهای داخل کلاس به دانشجویان این فرصت را می دهد تا در

کار خود، به ویژه فعالیت‌های انجام شده در آزمایشگاه، تأمل کنند. همانطور که مربی بحث را راهنمایی می‌کند، ممکن است تعاریفی و توضیحاتی ارائه دهد و یا یک نمای کلی ارائه دهد تا آنچه دانشجویان درباره آن فکر کرده‌اند و روی آن کار کرده‌اند را بهم پیوند دهد [۲۵ و ۲۶].

تمرین‌های تکالیف درسی، قسمت سوم چرخه، شامل مسائل کاملاً استاندارد است که برای تقویت فعالیت‌های رایانه‌ای و بحث‌های کلاسی طراحی شده است. این تمرینات به حمایت از توسعه مداوم ساختارهای ذهنی پیشنهاد شده توسط تجزیه ژنتیکی کمک می‌کند [۲۷]. چرخه ACE و رابطه آن با تجزیه ژنتیکی در شکل ۱ نشان داده شده است.



شکل ۱. ارتباط بین چرخه آموزش ACE و تجزیه ژنتیکی

پیکان از تجزیه ژنتیکی به جعبه نقطه چین این واقعیت را نشان می‌دهد که تجزیه ژنتیکی بر روی هر یک از اجزای چرخه آموزش ACE تأثیر می‌گذارد.

۴- روش پژوهش

پژوهش حاضر با توجه به ماهیت و اهداف آن از نوع شبه آزمایشی (نیمه آزمایشی) است. با توجه به هدف کلی پژوهش که عبارت است از تعیین میزان اثر بخشی نظریه APOS-ACE بر درک دانشجویان از مفهوم مشتق در محیط یادگیری گسسته و وجود دو گروه آزمایش و کنترل همراه با مداخله متغیر مستقل ACE برای گروه آزمایش و اجرای پیش‌آزمون و پس‌آزمون جهت مقایسه نتایج، در این پژوهش از طرح پیش‌آزمون-پس‌آزمون با گروه کنترل استفاده شده است. جامعه آماری پژوهش حاضر شامل کلیه دانشجویان ترم اول مهندسی مکانیک دوره کارشناسی دانشگاه جهرم بود که در سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۳۹۹ مشغول به تحصیل بودند که ۴۲ نفر از آنها به روش نمونه‌گیری در دسترس انتخاب شدند و در دو گروه ۲۱ نفری آزمایش و کنترل قرار گرفتند. همه دانشجویان داوطلبانه در این مطالعه شرکت کردند.

روش اجرای پژوهش بدین شکل انجام گرفت که ابتدا در آغاز ترم دانشجویان بر اساس نمره ریاضی دبیرستان در دو گروه به طور همگن تقسیم شدند. علاوه بر این، برای بررسی همگنی گروه‌ها، در اوایل ترم یک پیش‌آزمون انجام شد که نتایج آن تأیید کرد که هر دو گروه همگن و معادل هستند. سوالات پیش‌آزمون در مورد دامنه و حد توابع بود و سپس یک تجزیه ژنتیکی را برای آموزش و یادگیری مفهوم مشتق با رویکرد گسسته ایجاد کردیم (جدول ۱) دوم، ابتدا همه دانشجویان گروه آزمایش به مدت شش ساعت (۱،۵ ساعت در هفته، به مدت چهار هفته) در یک

کلاس آزمایشگاه نرم افزار جئوجبرا شرکت کردند ، بر اساس تجزیه ژنتیکی ارائه شده در گام نخست، طی ۴ جلسه چرخه ACE که با استفاده از این نرم افزار برای مفهوم مشتق با رویکرد گسسته طراحی شده بود (جدول ۲)، در گروه آزمایش تدریس شد و در این مدت روند تدریس در گروه کنترل مبتنی بر سخنرانی بود و دانشجویان فقط از روی وایت برد یادداشت برداری می کردند. سوم ، پس از اتمام دوره آموزشی، پس آزمون در مورد هر دو گروه اجرا شد و نتایج حاصل به وسیله آزمون تحلیل کواریانس مورد بررسی قرار گرفت.

جدول ۱. تجزیه ژنتیکی مفهوم مشتق با رویکرد گسسته

ردیف	تجزیه ژنتیکی
۱	طرحواره هایی که ما در نظر می گیریم تا دانشجویان بتوانند مفهوم مشتق در محیط یادگیری گسسته را درک کنند عبارتند از: الف) مفهومی از دنباله و دنباله تفاضلی به عنوان اشیاء ب) توابع تعریف شده روی Z و دامنه های Q و همچنین R به عنوان اشیاء ج) تابع Z و بدست آوردن تابع تفاضلی آن به عنوان فرایند، عملیات با توابع و هماهنگی بازنمایی تحلیلی و هندسی از تابع Z و تابع تفاضلی آن. د) بدست آوردن تابع کسره های تفاضلی به عنوان فرایند، عملیات با توابع و هماهنگی بازنمایی تحلیلی و هندسی از تابع $f(z_n)$ و $D_{fn}(z_n)$ ه) آهنگ لحظه ای تغییر
۲	برای بدست آوردن و نمایش تابع کسر تفاضلی، باید دنباله و دنباله تفاضلی آن و تابع Z و تابع تفاضلی آن هماهنگ شوند، از طریق عمل بدست آوردن دنباله تفاضلی Δa_n از یک دنباله و عمل های بازنمایی حاصل از دنباله و دنباله تفاضلی بصورت نموداری و همچنین عمل بدست آوردن تابع تفاضلی $D_f(z)$ از توابع Z (درجه دوم)، توابع Z چند جمله ای، توابع نمایی و عمل های بازنمایی حاصل از توابع Z و تابع تفاضلی هر یک از توابع فوق بصورت نموداری که تابع تفاضلی $D_f(z)$ با دامنه Z می تواند بعنوان شیب تابع بین نقاط $(z, f(z))$، $(z+1, f(z+1))$ در نظر گرفته شود. این اقدامات به فرایندی تبدیل می شود که این ایده را از تابع Z به توابع تعریف شده در زیر مجموعه Q یا R انتقال می دهیم تا فرایندی را بسازند که وقتی با بازنمایی های تحلیلی و هندسی مربوطه هماهنگ می شوند ، می تواند بصورت تابع کسر تفاضلی $D_{fn}(z_n) = \frac{f\left(z_n + \frac{1}{n}\right) - f(z_n)}{\frac{1}{n}}, (z_n \in Z_n) = \left\{ \dots, -\frac{1}{n}, -\frac{2}{n}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots \right\}$ موضوع بندی شود.
۳	مقدار ثابت $z \in Z_n$ یا مقدار کلی $x \in D \subseteq R$ را انتخاب می کنیم و دنباله کسر تفاضلی را برای تابع حقیقی f با توجه به مقدار x برای $n = \{1, 2, 3, \dots\}$ در نظر می گیریم. $n \rightarrow D_n(x) = \frac{f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)}{\frac{1}{n}}$ و فرایند تبدیل مورد نیاز برای ارتباط بازنمایی های مختلف آن درونی می شود. هنگامی که این فرایند برای در نظر گرفتن هر تابع حقیقی f از تابع کسر تفاضلی $D_n(x)$ تعمیم داده می شود، مفهوم آهنگ لحظه ای تغییر به عنوان یک شیء ساخته می شود، زیرا رابطه خاصی بین تابع $f(z_n)$ و $D_{fn}(z_n)$ فشرده شده است. وقتی اعمال ، فرآیندها و اشیاء فوق در یک طرحواره منسجم سازماندهی شوند ، دانشجویان می توانند هر گونه مسئله در مورد مشتق در محیط یادگیری گسسته حل نمایند.

جدول ۲. طراحی چرخه تدریس ACE

ردیف	چرخه تدریس ACE
۱	فعالیت‌هایی براساس رایانه مرحله فعالیت‌ها شامل تکمیل مجموعه مشارکتی است که توسط تجزیه ژنتیکی اعلام شده است. این مهم اغلب با نوشتن دانشجویان با استفاده از زبان برنامه نویسی ریاضی، برنامه‌های کوتاه کامپیوتری حاصل می‌شود. این واقعیت مبتنی بر این است که فعالیت‌های مربوط به استفاده از زبان برنامه نویسی ریاضی ممکن است در کمک به دانشجویان در یادگیری یک مفهوم ریاضی با استفاده از ساختارهای ذهنی که توسط تجزیه ژنتیکی مفهوم مورد نیاز است، کمک کند. اولین فعالیت متمرکز بر فرایند بدست آوردن تابع تفاضلی و رسم نمودار تابع تفاضلی توابع Z (درجه دوم)، توابع Z چند جمله‌ای، توابع نمایی با دامنه Z بود. تابع تفاضلی $D_f(Z)$ با دامنه Z می‌تواند بعنوان شیب تابع بین نقاط $(z, f(z)), (z+1, f(z+1))$ در نظر گرفته شود. در دومین فعالیت دانشجویان روشی را در جثوجبرا نوشتند که نمودار تابع کسر تفاضلی توابع Z (درجه دوم)، توابع Z چند جمله‌ای، توابع نمایی با دامنه Z $z_1 = \frac{z}{1} (z \in Z)$ ترسیم کردند. در واقع در این مرحله ایده را از تابع Z به توابع تعریف شده در زیر مجموعه Q انتقال دادند که تابع کسر تفاضلی را تشکیل دهند. فعالیت سوم، فعالیت دوم را به روشی گسترش می‌دهد که دنباله کسر تفاضلی برای تابع حقیقی مقدار واقعی f با توجه به مقدار x برای $n = \{1, 2, 3, \dots\}$ بدست می‌آوریم که دنباله $D_n(x)$ با توجه به نمودار f دنباله شیب قاطع در یک نقطه تفسیر می‌شود که اگر $n \rightarrow \infty$ مشتق تابع بدست می‌آید.
۲	بحث‌های کلاس قسمت دوم این چرخه، بحث‌های کلاسی، شامل گروه‌های کوچک و بحث‌های کلاس تحت هدایت مربیان است. همانطور که دانشجویان با کاغذ و مداد بر روی تکالیف که براساس فعالیت‌های آزمایشگاهی در مرحله فعالیت‌ها انجام شده کار می‌کنند و محاسبات توسط مربی تعیین شده است. به دنبال هر یک از سه فعالیت رایانه‌ای، بحث‌های کلاسی برگزار شد، جایی که دانشجویان فرصت داشتند ایده‌ها، افکار و درک خود را از آن فعالیت‌ها بیان کنند. مربی از آنها خواسته است که بدون استفاده از جثوجبرا، هر فعالیتی را روی کاغذ خود انجام دهند. این تکلیف به دانشجویان داده شد تا فرصتی برای درک خود از فعالیت‌های رایانه‌ای روی کاغذ داشته باشند.
۳	تمرینات تمرینات تکالیف درسی، شامل مسائل کاملاً استاندارد است که برای تقویت فعالیت‌های رایانه‌ای و بحث‌های کلاسی طراحی شده است. این تمرینات به حمایت از توسعه مداوم ساختارهای ذهنی پیشنهاد شده توسط تجزیه ژنتیکی کمک می‌کند. به طور خاص، دانشجویان با کار کردن با توابع Z، تابع Z تفاضلی، تابع کسر تفاضلی با ترسیم نمودارهای آن‌ها، به ساخت و گسترش طرحواره رویکرد گسسته مشتق می‌پردازند. این تمرینات به عنوان مشق شب برای دانشجویان طراحی شده و شامل موقعیت‌های مختلف ریاضیات بود. دانشجویان با حل تمرین‌ها، دانش خود را در فعالیت‌های رایانه‌ای و بحث‌های کلاسی تقویت می‌کنند.

۵- نتایج

روش تجزیه و تحلیل داده‌ها در پژوهش حاضر به دو شیوه توصیفی و استنباطی است. در بخش توصیفی، استفاده از جداول فراوانی، میانگین و انحراف معیار و در بخش استنباطی روش تحلیل کوواریانس با استفاده از نرم افزار SPSS مورد استفاده قرار می‌گیرد.

جدول ۳. آماره های توصیفی در گروه های آزمایش و کنترل

گروه	تعداد	میانگین	انحراف معیار
آزمایش	۲۱	۱۷/۵۷۱۴	۱/۵۰۲۳۸
کنترل	۲۱	۱۴/۸۰۹۵	۲/۵۰۲۳۸

جدول ۴. آزمون t نمونه های مستقل در دو گروه آزمایش و کنترل

آزمون t برای برابری میانگین ها						آزمون لونز برای برابری واریانس ها			
۹۵٪ فاصله اطمینان		تفاوت انحراف	تفاوت میانگین	سطح معناداری	درجه آزادی	آماره T	سطح معناداری		آماره F
حد بالا	حد پایین								
-۱/۴۷۴۶۴	-۴/۰۴۹۱۷	۰/۶۳۶۲۹	-۰/۷۶۱۹۰	۰/۰۰۰	۴۰	-۴/۳۳۶	۰/۰۱۶		۶/۳۴۶
-۰/۴۷۵۷۲	-۴/۰۵۸۰۹	۰/۶۳۶۲۹	-۰/۷۶۱۹۰	۰/۰۰۰	۳۲/۷۶۰	-۴/۳۳۶		نابرابری واریانس	

جدول ۳، بیانگر معیارهای توصیفی مربوط به داده ها در دو گروه کنترل و آزمایش است. میانگین ۱۴/۸۰ از نمرات دانشجویان در تدریس رویکرد گسسته مشتق در گروه کنترل به شیوه سنتی و سخنرانی و میانگین ۱۷/۵۷ از نمرات دانشجویان در تدریس رویکرد گسسته مشتق به کمک چرخه ACE بدست آمده است و با مقایسه ی این دو میانگین می توان اثربخشی چرخه ACE بر درک بهتر مفهوم مشتق را متوجه شد. با این حال برای تایید بیشتر این سخن از نتایج جدول t مستقل استفاده می شود. در انجام آزمون t مستقل ابتدا فرض برابری واریانس دو گروه بررسی می شود. جهت بررسی این فرضیه در جدول شماره ۴ به قسمت آزمون لونز توجه می کنیم. مقدار سطح معنی داری (sig) این آزمون برابر ۰/۰۱۶ است که از ۰/۰۵ کوچکتر است، بنابراین فرض برابری واریانس ها رد می شود و جهت بررسی برابری میانگین نمرات دو گروه آزمایش و کنترل از سطر دوم جدول ۴ استفاده می نماییم. مقدار سطح معنی داری (sig) در آزمون t در سطر دوم جدول ۴ برابر صفر است که این مقدار از ۰/۰۵ کمتر است، بنابراین نتیجه می گیریم که تفاوت معنی داری بین میانگین نمرات تدریس رویکرد گسسته مشتق به کمک چرخه تدریس ACE در گروه آزمایش و تدریس رویکرد گسسته مشتق به روش سنتی در گروه کنترل وجود دارد. با توجه به اینکه فاصله اطمینان بدست آمده هر دو هم علامت است، پس می توان نتیجه گرفت که تفاوت معنی داری بین نمرات در گروه آزمایش و کنترل وجود دارد. بنابراین فراتر از ۹۰ درصد اطمینان می توان گفت که تدریس مشتق به کمک چرخه ACE منجر به درک عمیق تر مفهوم مشتق در مقایسه با گروه کنترل شده است.

۶- بحث و نتیجه گیری

هدف این پژوهش بررسی اثربخشی نظریه APOS-ACE بر درک دانشجویان از مفهوم مشتق در محیط یادگیری گسسته بود. نتایج بدست آمده از این پژوهش نشان داد که تفاوت معناداری در نمرات دانشجویان گروه آزمایش نسبت به دانشجویان گروه کنترل در پس آزمون وجود دارد که نشانگر تأثیر مثبت چرخه تدریس ACE در درک مفهومی رویکرد گسسته مشتق است. نتیجه بدست آمده با پژوهش های کوتریل و همکاران [۱۰] و آسیالا و همکاران [۲۳]، برجی و همکاران [۱۶ و ۱۷] که موفقیت ساخت ذهنی دانشجویان را به استفاده از فناوری رایانه نسبت می دهند، مطابقت دارد.

دانشجویان گروه آزمایش عملکرد بهتری نسبت به گروه کنترل داشتند زیرا نوشتن برنامه های رایانه ای با کمک نرم افزار جئوجبرا به دانشجویان گروه آزمایش کمک کرد تا ساختارهای ذهنی خود را از تابع Z و تابع Z تفاضلی که منجر به فهمیدن رابطه میان تابع و تابع مشتق می شود را توسعه دهند. در گروه آزمایشی، دانشجویان در گروه ها با همکلاسی های خود کار می کردند و این به آنها کمک می کرد تا از یکدیگر یاد بگیرند. دانشجویان می توانند در مقایسه با استاد خود راحت تر با همسالان خود در مورد مسائل صحبت کنند. این فرصت در کلاس برای گروه کنترل که بیشتر اوقات کلاس برای صحبت و نوشتن معلم روی تخته وایت برد اختصاص داشت، امکان پذیر نبود و دانشجویان فقط از تخته وایت برد یادداشت می بردند. به همین ترتیب، در گروه کنترل دانشجویان نقش فعالی در فرآیندهای آموزش و یادگیری ندارند.

چرخه ACE به بسیاری از دانشجویان گروه آزمایشی کمک کرد که مهارت های حل مسئله ریاضی خود را بهبود بخشند. برخی از دانشجویان گروه آزمایشی که پاسخ های نادرستی به سوالات پس آزمون داده بودند، در گروه های کلاسی خود فعال نبودند و در بحث های کلاسی شرکت نمی کردند. این ممکن است به دلیل شخصیت این دانشجویان باشد که آنها به دلیل خجالتی بودن در حضور معلم و همکلاسی هایشان صحبت نکنند. بنابراین وظیفه استادان در چنین وضعیتی این است که باید این دانشجویان را شناسایی کنند و به آنها ایجاد انگیزه دهند تا در بحث ها و فعالیت های کلاس مشارکتی فعال نمایند. دانشجویان از طریق یادگیری مشارکتی و ارزیابی رفتارهای ارتباطی، می توانند بر رفتارهای حل مسئله خود بازتاب داشته باشند. بنابراین ایجاد محیط صمیمانه و مشارکتی در کلاس درس به طوری که همه باید به نظرات و دیدگاههای هم احترام بگذارند، ممکن است انگیزه همه دانشجویان را برای شرکت در بحث ها و فعالیت های کلاس بیشتر نماید.

براساس نتایج به دست آمده، ما معتقدیم که راهبرد پداگوژی ACE می تواند توسط معلمان و استادانی که در آموزش این موضوع مشارکت دارند، استفاده شود. با این حال، تحقیقات بیشتر برای طراحی فعالیتهای آموزشی مناسب با استفاده از چارچوب APOS-ACE با کمک فن آوری برای بهبود درک دانشجویان از سایر مفاهیم ریاضی لازم است.

از مهمترین مزایای استفاده از نرم افزار های آموزشی ریاضی، می توان به تجسم و بازنمایی های چندگانه و بازخورد های ارائه شده توسط این نرم افزارها اشاره کرد. بنابراین معلمان و استادان ریاضی باید با برنامه ها و نرم افزار های ریاضی آشنایی داشته باشند تا بتوانند فعالیت های آموزشی را به گونه ای طراحی نمایند که درک دانشجویان را از مفاهیم ریاضی بهبود بخشند و همچنین دانشجویان را تشویق به استفاده از این فن آوری برای افزایش یادگیری خود کنند. علاوه بر این، شورای ملی معلمان ریاضیات [۲۸] به معلمان توصیه می کند که از فناوری برای طراحی فعالیتهای جدید آموزشی استفاده کنند. بنابراین، استفاده از چرخه ی تدریس ACE می تواند در تدریس حسابان، به ویژه مفهوم مشتق، در جهت توسعه ی درک مفهومی دانشجویان کمک نماید.

فهرست منابع

- [۱] Giraldo, V., Carvalho, L. M., & Tall, D. (2003). Descriptions and Definitions in the Teaching of Elementary Calculus. *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 445- 452.
- [۲] Zandieh, M. (2000). A Theoretical Framework for Analyzing student Understanding of the Concept of Derivative, In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld & J. Kaput, *Research in Collegiate Mathematics Education (Vol IV, pp.103–127)*. Providence, RI: American Mathematical Society.
- [۳] Eisenberg, T. (1992). On the development of a sense for functions. In G. Harel & Ed. Dubinsky (Eds.), *the concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*, MAA notes 25, pp.153-174. Mathematical Association of America, Washington.
- [۴] Orton, A. (1983). Students' Understanding of Differentiation, *Educational Studies in Mathematics*, 14(3), 235-250.
- [۵] Tall, D. (1993). Students' Difficulties in Calculus, Plenary Address, *Proceedings of ICME-7*, 13–28, Québec, Canada.
- [۶] Thompson, P. W. (1994). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mathematics*, 26(2), 229-274.
- [۷] Ferrini-Mundy, J., & Graham, K. (1994). Research in calculus learning: Understanding limits, derivatives, and integrals, in E. Dubinsky & J. Kaput (Eds.), *Research issues in undergraduate mathematics learning* (pp. 19-26), Mathematical Association of America.
- [۸] Clark J. M., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D. J., St. John, D., Tolias T., & Vidakovic, D. (1997). Constructing a schema: The case of the chain rule. *Journal of Mathematical Behavior*, 16(4), 345-364.
- [۹] Zandieh, M. (2000). A Theoretical Framework for Analyzing student Understanding of the Concept of Derivative, In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld & J. Kaput, *Research in Collegiate Mathematics Education (Vol IV, pp.103–127)*. Providence, RI: American Mathematical Society.
- [۱۰] Cottrill, J., Dubinsky, E., Nicholas, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior*, 15(2), 167–192.
- [۱۱] Dominguez, A., Barniol, P., & Zavala, G. (2017). Test of Understanding Graphs in Calculus: Test of Students' Interpretation of Calculus Graphs. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*. 13(10), 6507-6531.
- [۱۲] Weigand, H.-D. (2014). A discrete approach to the concept of derivative. *ZDM Mathematics Education*, 46:603–619.

[۱۳] چاهکی، عصمت و حق وردی، مجید (۱۳۹۶). رویکردی نوین به درک مفهوم مشتق برای دانش آموزان متوسطه، مجله رشد آموزش ریاضی، دوره سی و چهارم، شماره ۳.

- [۱۴] Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A framework for research and development in undergraduate mathematics education. *Research in collegiate mathematics education*, 6(2), 1-32.
- [۱۵] Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Fuentes, S. R., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. New York, Heidelberg, Dordrecht, London: Springer.
- [۱۶] Borji, V., Martínez-Planell, R. (2019). What does 'y is defined as an implicit function of x' mean?: An application of APOS-ACE. *Journal of Mathematical Behavior* 56 (2019) 100739.
- [۱۷] Borji, V., Alamolhodaie, H., Radmehr, F. (2018), Application of the APOS-ACE theory to Improve Students' Graphical Understanding of Derivative. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*. 14(7), 2947-2967.
- [۱۸] Cetin, I. (2009). Students' understanding of limit concept: An APOS perspective. Doctoral Thesis, Middle East Technical University, Turkey.
- [۱۹] Martínez-Planell, R., Trigueros, M., McGee, D. (2015). Student Understanding of Directional Derivatives of Functions of Two Variables. *Proceedings of the 37th annual meeting of the North american chapter of the international group for the psychology of mathematics education*. East Lansing, MI: Michigan State University.
- [۲۰] Maharaj, A. (2013). An Apos Analysis of natural science Student' Understanding of derivatives. *South African Journal of Education*. 33(1). 1-19.
- [۲۱] Badillo, E., Azcárate, C., & Font, V. (2011). Analysis of Mathematics teachers' level of understanding of the objects $f'(a)$ and $f'(x)$. *Enseñanza de las ciencias*, 29(2), 191-206.
- [۲۲] Siyepu, S. W. (2013). An exploration of students' errors in derivatives in a university of technology. *Journal of Mathematical Behavior*, 32(3), 577–592.
- [۲۳] Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., & Schwingendorf, K. E. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. *Journal of Mathematical Behavior*, 16(4), 399-430.
- [۲۴] Cooley, L., Trigueros, M., & Baker, B. (2007). Schema thematization: A framework and an example. *Journal for Research in Mathematics Education*, 2, 370–392.
- [۲۵] Weller, K., Arnon, I., & Dubinsky, E. (2011). Pre-service teachers' understanding of the relation between a fraction or integer and its decimal expansion: Strength and stability of belief. *Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education*, 11(2), 129-159.
- [۲۶] Weller, K., Arnon, I., & Dubinsky, E. (2009). Pre-service teachers' understanding of the relation between a fraction or integer and its decimal expansion. *Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education*, 9(1), 5-28.

[۲۷] Dubinsky, E., Weller, K., & Arnon, I. (2013). Pre-service teachers' understanding of the relation between a fraction or integer and its decimal expansion: The Case of 0.999...and 1. *Canadian Journal of Science, Mathematics, and Technology Education*, 13(3), 5-28.

[۲۸] National Council of Teachers and Mathematics. (2000). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. National Council of Teachers and Mathematics, Reston, VA.