دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره سی و پنجم، فروردین و اردیبهشت ۱۴۰۱
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

ماتریس‌های J-هاوس هولدر و فرم‌های فشرده

مجتبی قاسمی کمالوند*

گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه لرستان، خرم آباد، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۹/۰۶/۲۹ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۳/۰۱

چکیده

همانطور که می‌دانیم تحویل یک ماتریس به شکل فشرده یکی از مهمترین مباحث مطالعه ماتریس‌ها به حساب می‌آید. از این دست فرم‌های فشرده می‌توان به فرم بالا هسنبرگ و فرم‌های سه قطری برای ماتریس‌های متقارن اشاره کرد، در این راستا برای رسیدن به این فرم‌های فشرده یکی از بهترین ابزارها ماتریس هاوس هولدر است. دیده می‌شود که بوسیله ماتریس‌های هاوس هولدر می‌توان یک ماتریس متقارن را به شکل سه قطری متقارن تحویل کرد. اینک با استفاده از ماتریس‌های J- هاوس هولدر این کار را برای ماتریس‌های J-متقارن انجام می‌دهیم.

در این مقاله هدف اصلی توجه به ماتریس‌های J- هاوس هولدر و کاربردهایی از آن است، از دستاوردهای این کار تجزیه RQ برای یک ماتریس مربعی است، که در آن Q یک ماتریس J-متعامد و R یک ماتریس بالا مثلثی است. سپس تحویل ماتریس‌ها به فرم هسنبرگ بررسی می‌شود و بعد از آن نشان داده می‌شود که چگونه یک ماتریس J-متقارن را می‌توان به فرم سه قطری تحویل کرد.

واژه‌های کلیدی: ضرب داخلی نا معین، ماتریس J -هاوس هولدر، ماتریس J-متعامد، ماتریس‌های J-متقارن، تجزیه RQ.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: ghasemi.m@lu,ac.ir

۱. مقدمه

موضوع تحویل ماتریس‌ها به فرم‌های مثلثی، هسنبرگ و سه قطری از موضوعات مهم جبرخطی عددی می‌باشد. به عنوان مثال از این دست کارها را می‌توان در [۱]، [۲]، [۳] و [۴]، [۵] و [۶] مشاهده کرد. در [۶] از تشابه J-یکانی برای رسیدن به فرم فشرده استفاده شده است. در این مقاله ما از تبدیلات J -هاوس هولدر برای یافتن فرم‌های فشرده ماتریس‌ها استفاده می‌کنیم. ما با تغییر ماتریس‌های تبدیل از هاوس هولدر به J -هاوس هولدر دامنه عمل این تبدیلات را از متقارن به J-متقارن تغییر می‌دهیم. منبع تعاریف و مفاهیم بکار برده شده در این مقاله منابع [۷] و [۸] می‌باشد.

۲. تبدیلات J -هاوس هولدر

فرض کنید ^{n} فضای همه n-بردارهای ستونی با درایه‌های $x_i\ ,\ i = 1, 2, 3, \dots$ باشد. ضرب داخلی استاندارد در ^{n} را با نماد (. ، .) نمایش می‌دهیم. بدین ترتیب

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \bar{y}_{i,}$$

که در آن

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) \quad \text{و} \quad y = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n),$$

و علامت بار به معنی مزدوج مختلط است. تابع

$$[.,.]:\ {}^{n} \times {}^{n} \rightarrow$$

یک ضرب داخلی نامعین نامیده می‌شود (می‌توانید [۹] را ببینید)، هرگاه شرایط زیر برقرار باشد.

الف. خطی بودن نسبت به مولفه اول:

$$[\alpha x_1 + \beta x_2, y] = \alpha[x_1, y] + \beta[x_2, y],\ \ \forall\, x_1, x_2, y \in {}^{n}, \forall\, \alpha, \beta \in$$

ب. پادتقارنی:

$$[x, y] = \overline{[y, x]},\ \forall\, x, y \in {}^{n},$$

ج. ناتبهگونی:

$$\text{اگر}\ [x, y] = 0,\ \forall y \in {}^{n} \qquad x = o.$$

مثال (۲-۱). قرار می‌دهیم $J = diag\ (\pm 1)$، اگر r تعداد ۱+ و n-r تعداد ۱- در ماتریس J باشد تعریف می‌کنیم

$$[x, y] = (Jx, y) = y\ Jx = \sum_{i=1}^{r} x_{\sigma(i)} \bar{y}_{\sigma(i)} \quad \sum_{i=r+1}^{n} x_{\sigma(i)} \bar{y}_{\sigma(i)}$$

که در آن σ یک جایگشت است بطوری که

$$\sigma(i) = j_i \quad , \quad j_i \in \{1,2,3, \dots, n\},$$

علامت * به معنی ترانهاده مزدوج مختلط است. بسادگی دیده می‌شود که $[.,.]$ یک ضرب داخلی نامعین است.

تعریف (۲-۱).

الف- اگر $H^{[T]} = \mathrm{H}$ که در آن $H^{[T]} = \mathrm{J}\mathrm{H}^{T}\mathrm{J}$، H را ماتریسی J–متقارن گوییم.

ب- اگر $H^{[T]}H = \mathrm{I}$، H را ماتریسی J–متعامد گوییم.

تعریف (۲-۲). یک ماتریس بشکل

$$H = I \quad 2[U, U]UU^{T}J, J = diag\ (\pm 1),$$

که در آن $U \in {}^{n}$ و $\sqrt{|[U, U]|} = 1$، را یک ماتریس J-هاوس هولدر می‌نامیم.

گزاره (۲-۱). با تعریف بالا نتایج زیر بدست می‌آید

الف- $H^{[T]} = \mathrm{H}$ که $H^{[T]} = \mathrm{J}\mathrm{H}^{T}\mathrm{J}$ یعنی H ماتریسی J–متقارن است.

ب- $H^{[T]}H = \mathrm{I}$ یعنی H، J–متعامد است. ([۱۰] را ببینید)

ج- $H^2 = \mathrm{I}$.

اثبات(الف).

$$H^{[T]} = \mathrm{J}\mathrm{H}^T\mathrm{J} =$$
$$\mathrm{J}(I \quad 2[U,U]UU^TJ)^T\mathrm{J} =$$
$$\mathrm{J}(I \quad 2[U,U]JUU^T)\mathrm{J} =$$
$$I \quad 2[U,U]UU^TJ = H$$

اثبات(ب).

$$\mathrm{H}^T\mathrm{J}H = (I \quad 2[U,U]UU^TJ)^T\mathrm{J}(I \quad 2[U,U]UU^TJ) =$$
$$(I \quad 2[U,U]JUU^T)(J \quad 2[U,U]JUU^TJ) =$$
$$J \quad 2[U,U]JUU^TJ \quad 2[U,U]JUU^TJ + 4[\mathrm{U},\mathrm{U}]^2JUU^TJUU^TJ = J$$

بنابراین

$$\mathrm{H}^T\mathrm{J}H = J \qquad \mathrm{J}\mathrm{H}^T\mathrm{J}H = I \qquad H^{[T]}H = \mathrm{I}.$$

اثبات(ج).

با استفاده از قسمت های الف و ب بدیهی است.

لم (۲-۱). فرض کنید $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^T$ برداری غیر صفر باشد به‌طوری که

$$[x,x] \neq J(1,1){x_1}^2 \ , \quad [x,x] \neq 0$$

و $J(1,1)$ و $[x,x]$ هم علامت باشند، آنگاه یک ماتریس J -هاوس هولدر H موجود است بطوریکه Hx مضربی حقیقی از e_1 است.

اثبات. بایستی ماتریس J -هاوس هولدر $H = I \quad 2[U,U]UU^TJ$ طوری پیدا شود که $Hx = \alpha e_1$، بطوریکه $\alpha \in$ یعنی

$$(I \quad 2[U,U]UU^TJ)\mathrm{x} = \alpha e_1$$

لذا

$$x \quad 2[U,U]UU^TJ\mathrm{x} = \alpha e_1 \qquad \mathrm{x} \quad \alpha e_1 = 2[U,U]UU^TJ\mathrm{x}.$$

تعریف می‌کنیم

$$U = \frac{\mathrm{x}-\alpha e_1}{\sqrt{|[\mathrm{x}-\alpha e_1, \mathrm{x}-\alpha e_1]|}},$$

سپس

$$2[U,U]UU^TJx = \sqrt{|[x \quad \alpha e_1, x \quad \alpha e_1]|}\,U$$
$$2[U,U](x \quad \alpha e_1)^TJx = |[x \quad \alpha e_1, x \quad \alpha e_1]|.$$

چون $[U,U]$ و $[x \quad \alpha e_1, x \quad \alpha e_1]$ همعلامت هستند، لذا

$$2(x \quad \alpha e_1)^TJx = [x \quad \alpha e_1, x \quad \alpha e_1]$$
$$2x^TJx \quad 2\alpha {e_1}^TJx = (x \quad \alpha e_1)^TJ(x \quad \alpha e_1)$$
$$2x^TJx \quad 2\alpha {e_1}^TJx = (x^T \quad \alpha {e_1}^T)(Jx \quad \alpha Je_1)$$
$$2x^TJx \quad 2\alpha {e_1}^TJx = x^TJx \quad \alpha x^TJe_1 \quad \alpha {e_1}^TJx + \alpha^2 {e_1}^TJe_1$$
$$x^TJx = \alpha^2 {e_1}^TJe_1 \qquad \alpha^2 = \frac{[x,x]}{J(1,1)},$$

بنابراین $Hx = (\alpha, 0,0, \dots, 0)^T$.

الگوریتم (۲-۱). فرض کنید $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)^T$ برداری غیر صفر باشد که

$$[x,x] \neq J(1,1){x_1}^2 \ , \quad [x,x] \neq 0$$

و $J(1,1)$ و $[x,x]$ هم علامت باشند، الگوریتم زیر یک بردار U، یک اسکالر α و یک ماتریس H را محاسبه می‌کند، بطوریکه

$$\mathrm{Hx} = (I \quad 2[U,U]UU^TJ)\mathrm{x} = (\alpha, 0,0, \dots, 0)^T,$$

1) $\alpha = \sqrt{\frac{[x,x]}{J(1,1)}}$

2) $U = \frac{x-\alpha e_1}{\sqrt{|[x-\alpha e_1, x-\alpha e_1]|}}$

3) $H = I \quad 2[U,U]UU^TJ$

مثال (۲-۲). با قرار دادن $J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \ \ 1 \end{pmatrix}$ و $x = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ داریم

$$[x,x] = x^TJx = (5 \quad 3)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \ \ 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} = 16,$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{[x,x]}{J(1,1)}} = 4,$$

و

$$U = \frac{x-\alpha e_1}{\sqrt{|[x-\alpha e_1, x-\alpha e_1]|}} = \frac{1}{\sqrt{8}}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

$$[U,U] = \frac{1}{8}\,(1 \quad 3)\begin{pmatrix} \ \ 1 \\ \ \ 3 \end{pmatrix} = \quad 1,$$

$$H = I \quad 2[U,U]UU^TJ = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \times \frac{1}{8}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}(1 \quad 3)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \ \ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/4 & 3/4 \\ 3/4 & 5/4 \end{pmatrix}.$$

حال بسادگی دیده می‌شود که $Hx = (4 \quad 0)^T$.

۳. ماتریس های J -هاوس هولدر و تجزیه QR

در این بخش تجزیه QR ماتریس $A = (a_{ij})_{n\times n}$ را با استفاده از ماتریس‌های J -هاوس هولدر بدست می‌آوریم. الگوریتم شامل n-1 گام است.

الگوریتم (۳-۱). برای $k = 1,2,3,\dots,n \quad 1$ گام‌های زیر را انجام دهید.

۱. برای $k = 1$, قرار دهید $\hat{J}_k = J$ در غیر اینصورت $J = \begin{pmatrix} J_k & 0 \\ 0 & \hat{J}_k \end{pmatrix}$، (سایز $\hat{J}_k$ برابر است با $n \quad k+1$)

۲. $x = (a_{kk},\dots,a_{nk})^T$ اگر $[x,x] = 0$، $[x,x] = J(1,1)x_1{}^2$ یا $J(1,1)$ و $[x,x]$ هم علامت نباشند، متوقف شوید، در غیر اینصورت $\alpha = \sqrt{\frac{[x,x]}{J(1,1)}}$ و $U = \frac{x-\alpha e_1}{\sqrt{|[x-\alpha e_1, x-\alpha e_1]|}}$.

۳. $\hat{H}_k = I \quad 2[U,U]UU^T\hat{J}_k$، (سایز $\hat{H}_k$ برابر است با $n \quad k+1$ و $[U,U] = U^T\hat{J}_kU$)

۴. اگر $k = 1$, قرار دهید $H_k = \hat{H}_k$ در غیر اینصورت تعریف کنید $H_k = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & \hat{H}_k \end{pmatrix}$، محاسبه کنید $A^{(k)} = H_kA^{(k-1)}$، ($A^{(0)} = A$)

۵. پایان

ماتریس $A^{(k)}$ دارای درایه‌های صفر در ستون k ام زیر درایه‌ی (k,k) می‌باشد و با اعمال انجام شده صفرهای ستون‌های قبلی تغییر نمی‌کنند. برای $k = n \quad 1$، ماتریس حاصل شده $A^{(n-1)}$ یک ماتریس بالا مثلثی است که آنرا R می‌نامیم.

دیدیم که

$$A^{(k)} = H_kA^{(k-1)},\ k = n \quad 1,\dots,2,$$

داریم

$$R = A^{(n-1)} = H_{n-1}A^{(n-2)} = \quad = H_{n-1}H_{n-2}\dots H_2H_1A$$

ولی

$$H_{n-1}H_{n-2}\dots H_2H_1 = JH_{n-1}{}^TJJH_{n-2}{}^TJ\dots JH_2{}^TJJH_1{}^TJ = JH_{n-1}{}^TH_{n-2}{}^T\dots H_2{}^TH_1{}^TJ = J(H_1H_2\dots H_{n-2}H_{n-1})^TJ$$

قرار می‌دهیم $Q = H_1H_2\dots H_{n-2}H_{n-1}$، لذا $H_{n-1}H_{n-2}\dots H_2H_1 = JQ^TJ = Q^{[T]}$.

بنابراین $R = Q^{[T]}A$، اما

$$Q^{[T]}Q = JH_{n-1}{}^TJJH_{n-2}{}^TJ\dots JH_2{}^TJ\overbrace{JH_1{}^TJH_1} \times H_2\dots H_{n-2}H_{n-1},$$

(توجه داشته باشید که $JH_1{}^TJH_1 = I$ و ...)

بنابراین $A = QR$.

توجه شود که در الگوریتم بالا برای هر k، وقتیکه $H_k = \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & \widehat{H}_k \end{pmatrix}$، چون ${H_k}^{[T]}$ یک ماتریس $\hat{J}_k$-هاوس هولدر است لذا ${H_k}^{[T]}H_k = I$، که $J = \begin{pmatrix} J_k & 0 \\ 0 & \hat{J}_k \end{pmatrix}$، بنابراین

$$
{H_k}^{[T]}H_k = J\begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & \widehat{H}_k \end{pmatrix}^T JH_k =
$$
$$
\begin{pmatrix} J_k & 0 \\ 0 & \hat{J}_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & {\widehat{H}_k}^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} J_k & 0 \\ 0 & \hat{J}_k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & \widehat{H}_k \end{pmatrix}
$$
$$
= \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & \hat{J}_k{\widehat{H}_k}^T\hat{J}_k\widehat{H}_k \end{pmatrix} =
$$
$$
\begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & I_{n-k+1} \end{pmatrix} = I.
$$

آنچه اثبات کردیم بصورت قضیه زیر بیان می‌کنیم.

قضیه (۳-۱). فرض کنید ماتریس $A_{n\times n}$ داده شده باشد، اگر الگوریتم بالا قبل از گام $n \quad 1$ متوقف نشود، ماتریس های J –متعامد Q و بالا مثلثی R موجودند بطوریکه $A = QR$.
ماتریس Q می‌تواند بشکل زیر نوشته شود،

$$
Q = H_1H_2 \dots H_{n-2}H_{n-1},
$$
$$
H_k = \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 \\ 0 & \widehat{H}_k \end{pmatrix},
$$

که در آن هر $(k = 1,2,3,\dots,n \quad 1)$ H_k، یک ماتریس $\hat{J}_k$-هاوس هولدراست. ($J = \begin{pmatrix} J_k & 0 \\ 0 & \hat{J}_k \end{pmatrix}$ و سایزهای $\hat{J}_k$ و $\widehat{H}_k$ برابر $k+1 \quad n$ می‌باشند)

۴. ماتریس‌های J -هاوس هولدر و تحویل به فرم هسنبرگ

در این بخش نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان یک ماتریس $A = (a_{ij})_{n\times n}$ را بوسیله ماتریس‌های J –متعامد به یک ماتریس هسنبرک تحویل کرد.

الگوریتم (۴-۱). برای $k = 1,2,3,\dots,n \quad 2$ گام‌های زیر را انجام دهید.

۱. قرار دهید $J = \begin{pmatrix} J_k & 0 \\ 0 & \hat{J}_k \end{pmatrix}$، (سایز $\hat{J}_k$ برابر $k \quad n$ است با)
۲. $x = (\mathrm{a}_{k+1,k}, \dots, \mathrm{a}_{nk})^T$
۳. اگر $[\mathrm{x},\mathrm{x}] = 0$، $[x,x] = J(1,1){x_1}^2$ یا $J(1,1)$ و $[x,x]$ هم علامت نباشند، متوقف شوید، در غیر اینصورت $\alpha = \sqrt{\frac{[x,x]}{J(1,1)}}$،
۴. $U = \frac{\mathrm{x}-\alpha e_1}{\sqrt{|[\mathrm{x}-\alpha e_1,\mathrm{x}-\alpha e_1]|}}$،
۵. $\widehat{P}_k = I \quad 2[U,U]UU^T\hat{J}_k$، (سایز $\widehat{P}_k$ برابر است با $k \quad n$ و $[U,U] = U^T\hat{J}_kU$)
۶. تعریف کنید $P_k = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & \widehat{P}_k \end{pmatrix}$،
۷. محاسبه کنید ${A^{(k)} = P_kA^{(k-1)}P_k}^{[T]}$ ،
۸. پایان

در گام $n \quad 2$ ماتریس $A^{(n-2)}$ یک ماتریس بالا هسنبرگ است که آنرا H_u می‌نامیم، که در آن H_u بطور J –متعامد با A متشابه است. این مطلب را می‌توان در زیر مشاهده نمود.

$$
H_u = A^{(n-2)} = P_{n-2}A^{(n-3)}{P_{n-2}}^{[T]}
$$
$$
= P_{n-2}\big(P_{n-3}A^{(n-4)}{P_{n-3}}^{[T]}\big){P_{n-2}}^{[T]} =
$$
$$
= (P_{n-1}P_{n-2}\dots P_1)A({P_1}^{[T]}{P_2}^{[T]}\dots {P_{n-2}}^{[T]})
$$

قرار می‌دهیم $\mathrm{P} = P_{n-1}P_{n-2}\dots P_1$، لذا $P^{[P]} = {P_1}^{[T]}{P_2}^{[T]}\dots {P_{n-2}}^{[T]}$ و $P^{[P]}P = I$، سپس $H_u = PAP^{[T]}$، بنابراین ما قضیه زیر را اثبات نموده‌ایم.

قضیه (۴-۱). فرض کنید ماتریس $A_{n\times n}$ داده شده باشد، اگر الگوریتم بالا قبل از گام $n \quad 2$ متوقف نشود، بوسیله تشابه J –متعامد ماتریس $A_{n\times n}$ به ماتریس بالا هسنبرگ H_u تحویل می‌گردد، یعنی $H_u = PAP^{[T]}$، که در آن P یک ماتریس J –متعامد است.

۵. تحویل به فرم سه قطری

اگر $A_{n\times n}$ یک ماتریس J –متقارن باشد (یعنی $A^{[T]} = A$)، سپس از $PAP^{[T]} = H_u$ نتیجه می‌شود که ماتریس بالا هسنبرگ H_u یک ماتریس J –متقارن است، زیرا

$$H_u{}^{[T]} = (PAP^{[T]})^{[T]} = PA^{[T]}P^{[T]} = PAP^{[T]} = H_u,$$

آنچه گفته شد سه قطری بودن H_u را نیز نشان می‌دهد. حال اگر الگوریتم (۴-۱) را برای ماتریس J –متقارن بکار ببریم خروجی آن یک ماتریس سه قطری J –متقارن خواهد بود. بنابراین قضیه زیر را داریم.

قضیه (۵-۱). فرض کنید $A_{n\times n}$ یک ماتریس J – متقارن باشد، اگر الگوریتم (۴-۱) قبل از گام $n \quad 2$ متوقف نشود، بوسیله تشابه J –متعامد ماتریس $A_{n\times n}$ به ماتریس سه قطری J –متقارن T تحویل می‌گردد، یعنی $T = PAP^{[T]}$، که در آن P یک ماتریس J –متعامد است. اگر

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & 0 & 0 \\ \gamma_2 & & & 0 \\ 0 & & & \beta_n \\ 0 & 0 & \gamma_n & \alpha_n \end{pmatrix},$$

سپس $T^{[T]} = T$، یعنی $JA^TJ = A$ لذا داریم

$$J(i \quad 1, i \quad 1)J(i,i)\beta_i = \gamma_i,$$
$$\forall i,\ 2 \le i \le n,$$

بنابراین $\beta_i = \gamma_i$ یا $\beta_i = \quad \gamma_i$.

مثال (۵-۱). فرض کنید

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

و

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

چون

$$JA^TJ = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = A,$$

A یک ماتریس J –متقارن است، $n = 3$، لذا الگوریتم تنها شامل یک گام است. همانطور که در مثال قبل دیده شد

$$\hat{P}_1 = {}^1\!/_4\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix},$$

قرار می‌دهیم

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} & \frac{-3}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{-5}{4} \end{pmatrix},$$

سپس

$$P_1AP_1{}^{[T]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} & \frac{-3}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{-5}{4} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{4} & \frac{-3}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{-5}{4} \end{pmatrix}^{[T]} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & \frac{-53}{16} & \frac{83}{16} \\ 0 & \frac{-83}{16} & \frac{101}{16} \end{pmatrix},$$

که یک ماتریس سه قطری J –متقارن است.

مثال(۵-۲). فرض کنید

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix},$$
$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} I_6 & 0 \\ 0 & I_2 \end{pmatrix},$$

که در آن I_6 و I_2 بترتیب ماتریسهای همانی ۶×۶ و ۲×۲ می‌باشند و A_{11} یک ماتریس متقارن ۶×۶، A_{22} یک ماتریس متقارن ۲×۲ و A_{21} یک ماتریس

۶×۲ با درایه‌های تصادفی بین ۰ و ۱ هستند و

$A_{12} = \ A_{21}{}^{T}$,

با شرایط تعریف شده در بالا A یک ماتریس J-متقارن است. حال الگوریتم را اجرا می‌کنیم، ماتریس J-متقارن سه قطری حاصل در یکی از اجراهای کدهای نوشته شده برای الگوریتم با نرم افزار متلب به شکل ماتریس (۵-۱) است.

مثال (۵-۳). در در مثال بالا I_6 و I_2 بترتیب ماتریس‌های همانی ۶×۶ و ۳×۳ می‌باشند و A_{11} یک ماتریس متقارن ۶×۶ با درایه‌های تصادفی بین ۰ و ۱۰۰، A_{22} یک ماتریس متقارن ۳×۳ با درایه‌های تصادفی بین ۰ و ۱۰ و A_{21} یک ماتریس ۶×۳ با درایه‌های تصادفی بین ۰ و ۱ هستند و

$A_{12} = \ A_{21}{}^{T}$,

با شرایط تعریف شده در بالا A یک ماتریس J-متقارن است. حال الگوریتم را اجرا می‌کنیم، ماتریس J-متقارن سه قطری حاصل در یکی از اجراهای کدهای نوشته شده برای الگوریتم با نرم افزار متلب به شکل ماتریس (۵-۲) است.

۶. نتیجه‌گیری

می‌دانیم که یک ماتریس متقارن را می‌توان بوسیله ماتریس‌های هاوس هولدر به یک ماتریس سه قطری تحویل کرد. آنچه در این مقاله انجام شد، بدست آوردن نتیجه‌ای مشابه برای ماتریس‌های J –متقارن بود، که بنابر آنچه دیده شد با استفاده از ماتریس‌های J – هاوس هولدر این کار به نتیجه رسید.

ماتریس(۵-۱)

62.2475	086.7962	00.0000	000.0000	000.0000	00.0000	000.0000	0.0000
86.7962	148.3417	98.9959	000.0000	000.0000	00.0000	000.0000	0.0000
00.0000	098.9959	60.2919	032.8706	000.0000	00.0000	000.0000	0.0000
00.0000	000.0000	32.8706	34.1728	040.5104	00.0000	000.0000	0.0000
00.0000	000.0000	00.0000	040.5104	57.2662	35.2400	000.0000	0.0000
00.0000	000.0000	00.0000	000.0000	035.2400	18.7999	01.8168	0.0000
00.0000	000.0000	00.0000	000.0000	000.0000	01.8168	001.0284	0.6994
00.0000	000.0000	00.0000	000.0000	000.0000	00.0000	000.6994	0.4432

ماتریس(۵-۲)

051.78	180.80	000.00	00.00	00.00	0.00	00.00	00.00	00.00
180.80	256.63	085.59	00.00	00.00	0.00	00.00	00.00	00.00
000.00	085.59	15.23	46.73	00.00	0.00	00.00	00.00	00.00
000.00	000.00	046.73	50.75	24.86	0.00	00.00	00.00	00.00
000.00	000.00	000.00	24.86	05.94	2.47	00.00	00.00	00.00
000.00	000.00	000.00	00.00	02.47	7.24	1.31	00.00	00.00
000.00	000.00	000.00	00.00	00.00	1.31	00.29	03.17	00.00
000.00	000.00	000.00	00.00	00.00	0.00	03.17	08.98	1.28
000.00	000.00	000.00	00.00	00.00	0.00	00.00	1.28	01.39

فهرست منابع

[۱] حسین موسائی، سعید کتابچی، محمد تقی فولادی، روش لاگرانژ بهبود یافته برای حل دستگاه معادلات قدرمطلق و کاربرد آن در مسایل مقدار مرزی دو نقطهای، پژوهش های نوین در ریاضی، ۵ (۲۰)(۱۳۹۸)

[۲] محمود پریپو، اسمعیل بابلیان، لیلا اسدبیگی، یک مدل جدید ABS سهگامی برای حل دستگاه‌های معادلات خطی تمام رتبه سطری، پژوهش‌های نوین در ریاضی، ۶ (۲۶)(۱۳۹۹)

[3] **M. Dana, A. G. Zykov, Kh.D. Ikramov**, *A minimal residual method for a special class of the linear systems with normal coefficient matrices.*-Comput. Math. Math. Phys., 45 (2005) 1854-1863.

[4] **M. Ghasemi Kamalvand, Kh. D. Ikramov**, *A Method of Congruent Type for Linear Systems with Conjugate-Normal Coefficient Matrices.*-Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2009, Vol. 49, No. 2, pp.203-216.

[5] **K. Niazi Asil, M. Ghasemi Kamalvand**, *On reduction of K-almost normal and K-almost conjugate normal matrices to a block tridiagonal form.* - J. Korean Soc. Ind. Appl. Math. Vol.23, No.3, 267282, 2019.

[6] **K. Niazi asil, M. Ghasemi Kamalvand** , *Some Hyperbolic Iterative Method for Linear Systems* , Journal of Applied Mathematics Volume 2020, Article ID 9874162, 8 pages.

[7] **R.A. Horn and C.R. Johnson**, *Matrix Analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[8] Biswa Nath *Datta*, *Numerical linear algebra and applications.* Delhi: PHI Learning Private Limited, 1985.

[9] **I.Gohberg, P.Lancaster, L.Rodman**, *Indefinite linear algebra and applications.* Birkh- *a*user, 2005.

[10] N.J. Higham, J-orthogonal matrices: properties and generations. SIAM, Rev. 45(3):504-519, (2003).