دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره سی و پنجم، فروردین و اردیبهشت ۱۴۰۱
شماره شاپا: ۵۸۸-۲۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

برهان دیگری برای یک مشخص‌سازی از فضاهای ضرب داخلی

مهدی دهقانی*

استادیار، گروه ریاضی محض (آنالیز)، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۹/۰۲/۰۷ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۸/۲۳

چکیده

در این مقاله با استفاده از مفهوم تعامد کارلسون از نوع اِرمیت-آدامار در فضاهای نرمدار، یک مشخص‌سازی برای فضاهای ضرب داخلی به‌دست می‌آوریم. برای این منظور، ابتدا نتایج بیشتری در مورد ویژگی وجودی این تعامد ارائه می‌کنیم. سپس، با استفاده از این نتایج ثابت می‌کنیم که تعامد کارلسون از نوع اِرمیت-آدامار در فضای نرمدار X جمعی است اگر و تنها اگر X فضای ضرب داخلی باشد.

واژه‌های کلیدی: فضای ضرب داخلی، تعامد، تعامد برکف-جیمز، تعامد کارلسون از نوع اِرمیت-آدامار.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: m.dehghani@kashanu.ac.ir

۱- مقدمه

همانطور که می‌دانیم در فضای ضرب داخلی $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ تنها یک رابطهٔ تعامد وجود دارد که از ضرب داخلی حاصل می‌شود. به عبارت دقیق‌تر، بردارهای $x,y\in X$ عمود هستند اگر $\langle x,y\rangle=0$ (در این صورت می‌نویسیم $x\perp y$). برخی ویژگی‌های اساسی تعامد در فضاهای ضرب داخلی عبارتند از:

الف) ناتباهیدگی: $x\perp x$ اگر و تنها اگر $x=0$؛

ب) همگنی: اگر $x\perp y$، آن‌گاه برای هر $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$، $\alpha x\perp\beta y$؛

پ) تقارن: اگر $x\perp y$، آن‌گاه $y\perp x$؛

ت) پیوستگی: فرض کنیم دنباله‌های $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ در X چنان باشند که $x_n\to x$ و $y_n\to y$. در این صورت اگر برای هر $n\in\mathbb{N}$، $x_n\perp y_n$، آن‌گاه $x\perp y$؛

ث) جمعی بودن: اگر $x\perp y$ و $x\perp z$، آن‌گاه $x\perp(y+z)$؛

ج) ویژگی وجودی: برای هر دو بردار ناصفر و مستقل خطی $x,y\in X$، عدد $\alpha\in\mathbb{R}$ وجود دارد به‌طوری که $x\perp(\alpha x+y)$. این ویژگی تضمین می‌کند که در هر زیرفضای حداقل دوبعدی از X، دو بردار ناصفر عمود بر هم وجود دارد.

فرض کنیم $(X,\|\cdot\|)$ یک فضای نرمدار روی میدان اعداد حقیقیِ $\mathbb{R}$ باشد. زمانی‌که نرم X از یک ضرب داخلی القا نمی‌شود، مفهوم تعامد روی X یکتا نیست. در طول قرن بیستم مفاهیم تعامد گوناگونی در فضاهای نرمدار تعریف و مورد مطالعه قرار گرفته است. به‌ویژه، در سال ۱۹۳۵ بِرکُف [۱] اشاره‌ای به یک مفهوم جدید از تعامد در فضاهای نرمدار داشت. پس از آن جیمز [۲] با الهام از ایده‌های برکف، این مفهوم جدید از تعامد در فضاهای نرمدار را گسترش داده و ویژگی‌های بیشتر و دقیق‌تری از آن ارائه کرد. او بسیاری از ویژگی‌های هندسی فضاهای نرمدار را به‌وسیلهٔ این تعامد توصیف کرد. این تعامد به افتخار برکف و جیمز تعامد برکف-جیمز نامیده شده است.

بردار $x\in X$ بر بردار $y\in X$ متعامد برکف-جیمز است اگر

$$\|x+\lambda y\|\geq\|x\|\quad(\forall\lambda\in\mathbb{R}).$$

در این صورت می‌نویسیم $x\perp_B y$.

جیمز در [۳] با الهام از ویژگی‌های هندسی تعامد در فضاهای اقلیدسی، تعامدهای فیثاغورسی و متساوی‌الساقین را به صورت زیر معرفی کرد:

۱. بردار $x\in X$ بر بردار $y\in X$ متعامد متساوی الساقین است، اگر

$$\|x-y\|=\|x+y\|$$

در این صورت می‌نویسیم $x\perp_I y$.

۲. بردار $x\in X$ بر بردار $y\in X$ متعامد فیثاغورسی است، اگر

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$$

در این صورت می‌نویسیم $x\perp_P y$.

فرض کنیم $(X,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ فضای ضرب داخلی باشد و $m\in\mathbb{N}$. اگر α_i، β_i و γ_i ($i=1,\ldots,m$) اعداد حقیقی باشند که در شرط

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\beta_i^2=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\gamma_i^2=0,\quad\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\beta_i\gamma_i=1\qquad(۱)$$

صدق کنند، آن‌گاه با به کارگیری ویژگی‌های ضرب داخلی و انجام محاسبات مستقیم، ثابت می‌شود که برای هر $x,y\in X$ داریم

$$2\langle x,y\rangle=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\|\beta_i x+\gamma_i y\|^2.$$

باتوجه به این واقعیت، کارلسون [۴] مفهوم تعامد کارلسون را به عنوان تعمیمی از تعامدهای

فیثاغورسی و متساوی‌الساقین معرفی کرد. در فضای نرمدار $(X,\|\cdot\|)$ بردارهای $x,y\in X$ به مفهوم کارلسون بر هم عمود هستند اگر

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i \|\beta_i x+\gamma_i y\|^2=0$$

که در آن $m\in \mathbb{N}$ و اعداد α_i، β_i و γ_i در شرط (۱) صدق می‌کنند. به سادگی مشاهده می‌شود که تعامد متساوی‌الساقین با انتخاب $m=2$، $\alpha_1=\frac{1}{2}$، $\alpha_2=-\frac{1}{2}$، $\beta_1=\beta_2=1$، $\gamma_1=1$ و $\gamma_2=-1$ به‌دست می‌آید. همچنین، تعامد فیثاغورسی با انتخاب $m=3$، $\alpha_1=-1$، $\alpha_2=\alpha_3=1$، $\beta_1,\beta_2=1$، $\beta_3=0$، $\gamma_1=\gamma_3=1$ و $\gamma_2=0$ به‌دست می‌آید.

برای به‌دست آوردن اطلاعات بیشتر از تعامدهای ذکر شده و آشنایی با دیگر مفاهیم تعامد در فضاهای نرمدار، مطالعهٔ مراجع [۵، ۶، ۷، ۸، ۹و ۱۰] به خواننده پیشنهاد می‌شود.

فرض کنیم $(X,\|\cdot\|)$ فضای نرمدار باشد و $1\le p<\infty$. در [۱۱] نویسندگان با استفاده از نامساوی

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^p\le \left(\int_0^1\|(1-t)x+ty\|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}} \le \frac{\|x\|^p+\|y\|^p}{2}$$

که در واقع نامساوی اِرمیت-آدامار برای تابع محدّب $f(x)=\|x\|^p$ است، ثابت کرده‌اند که

$$\|(x,y)\|_{p-HH}:=\left(\int_0^1\|(1-t)x+ty\|^p\,dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

یک نرم روی $X\times X$ است. آن‌ها این نرم را $HH-p$-نرم نامیده‌اند و با به کارگیری مفهوم $HH-2$-نرم و الهام از تعامد کارلسون، تعامد جدیدی از نوع اِرمیت-آدامار (تعامد $HH-C$) را در [۱۲] و [۱۳] به صورت زیر تعریف کرده‌اند:

تعریف ۱-*[۱۳] فرض کنیم $(X,\|\cdot\|)$ فضای نرمدار باشد. بردار $x\in X$ را به مفهوم اِرمیت-آدامار از نوع کارلسون بر بردار $y\in X$ عمود گوییم اگر*

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\int_0^1\|(1-t)\beta_i x+t\gamma_i y\|^2\,dt=0$$

که در آن $m\in\mathbb{N}$ و α_i، β_i و γ_i $(1\le i\le m)$ در شرط (۱) صدق می‌کنند. در این صورت می‌نویسیم $x\perp_{HH-C}y$.

در طول قرن بیستم مشخص‌سازی‌های بسیاری از فضاهای نرمداری که نرم آن‌ها از یک ضرب داخلی القا می‌شود به‌دست آمده است. اولین و مشهورترین آن‌ها در سال ۱۹۳۵ توسط جُردَن و فون نویمان به‌دست آمد. آن‌ها در [۱۴] ثابت کردند که شرط لازم و کافی برای این‌که نرم یک فضای نرمدار توسط یک ضرب داخلی القا شود، برقرای تساوی متوازی‌الاضلاع است. روش‌های بسیاری برای مشخص‌سازی فضاهای ضرب داخلی وجود دارد. یکی از مشهورترینِ این روش‌ها استفاده از مفهوم تعامد است. واضح است که همهٔ تعامدهای ذکرشده در فضاهای ضرب داخلی با هم معادل هستند. توجه به این نکته ضروری است که این تعامدها ویژگی‌های ناتباهیدگی، پیوستگی و وجودی بودن را دارند امّا ممکن است برخی از ویژگی‌های تعامد حاصل از یک ضرب داخلی را نداشته باشند. تعامدهای فیثاغورسی و متساوی‌الساقین متقارن هستند. امّا تعامد برکف-جیمز متقارن نیست. در حالی‌که تعامد برکف-جیمز همگن است و تعامدهای فیثاغورسی و متساوی‌الساقین و در حالت کلی‌تر تعامد کارلسون همگن نیستند. با توجه به این واقعیت‌ها، دی [۱۵] و جیمز [۲، ۳و۱۶] بر اساس تعامدهای فیثاغورسی، متساوی‌الساقین و برکف-جیمز توصیف‌هایی از فضاهای ضرب داخلی به‌دست آورده‌اند. به‌ویژه، آن‌ها ثابت کردند که فضای نرمدار

X ، فضای ضرب داخلی است اگر و فقط اگر تعامد فیثاغورسی (متساوی‌الساقین) در X همگن باشد. در حالت کلی‌تر کارلسون [۴] ثابت کرد تعامد کارلسون در فضای نرمدار X همگن است اگر و تنها اگر X فضای ضرب داخلی باشد. برای مشاهدهٔ مشخص‌سازی‌های بیشتری از فضاهای ضرب داخلی که بر اساس تعامدهای مختلف در فضاهای نرمدار به‌دست آمده‌اند، مطالعهٔ [۱۷و۱۸] و مراجع آن پیشنهاد می‌شود.

ویژگی‌های تعامد $HH-C$ در [۱۲و۱۳] مورد مطالعه قرار گرفته است. به‌ویژه، در [۱۳] ثابت شده است که تعامد $HH-C$ ناتباهیده و پیوسته است. همچنین، نویسندگان این مقاله ثابت کرده‌اند که تعامد $HH-C$ ویژگی وجودی دارد. به‌علاوه، آن‌ها به این نکته اشاره کرده‌اند که تعامد $HH-C$ همگن و جمعی نیست و ثابت کرده‌اند که تعامد $HH-C$ در فضای نرمدار X همگن (جمعی) است اگر و تنها اگر X فضای ضرب داخلی باشد. لازم به ذکر است که آن‌ها برای اثبات این مطلب از ایده‌های کارلسون در [۴] الهام گرفته‌اند و با به کارگیری ویژگی ضعیف‌تری نسبت به همگن و جمعی بودن این تعامد در فضاهای نرمدار، توانسته‌اند این واقعیت را اثبات نمایند. مشخص‌سازی‌های بیشتری از فضای ضرب داخلی براساس رابطهٔ بین تعامد $HH-C$ و تعامد برکف-جیمز در [۱۹] به‌دست آمده است. نویسندگان این مقاله ثابت کرده‌اند که تعامد $HH-C$ و تعامد برکف-جیمز در فضای نرمدار X مقایسه‌پذیر هستند اگر و تنها اگر نرم X از یک ضرب داخلی القا شود.

در این مقاله قصد داریم ابتدا نتایج بیشتری در مورد ویژگی وجودی تعامد $HH-C$ به‌دست آوریم. سپس، با استفاده از آن‌ها برهان دیگری برای مشخص‌سازی‌های ارائه شده در [۱۳] از فضاهای ضرب داخلی پیشنهاد می‌کنیم. در واقع، ثابت می‌کنیم تعامد $HH-C$ در فضای نرمدار X جمعی است اگر و تنها اگر X فضای ضرب داخلی باشد. لازم است بر این نکته تأکید کنیم که برهان ارائه شده برای این حقیقت در مقالهٔ پیش رو مبتنی بر ویژگی وجودی تعامد $HH-C$ است و روند کاملاً متفاوتی را پیشنهاد می‌کند.

۲- مشخص‌سازی فضاهای ضرب داخلی به‌وسیلهٔ تعامد $HH-C$

در سراسر این بخش فرض می‌کنیم که فضاهای نرمدار حقیقی هستند و حداقل دوبعدی. ابتدا ضمن یادآوری ویژگی وجودی تعامد $HH-C$، در لم زیر نابرابری را به‌دست می‌آوریم که در اثبات نتایج اصلی به‌کار گرفته خواهد شد.

لم ۲- *فرض کنیم $(X,\|\cdot\|)$ فضای نرمدار باشد، $x,y\in X$ و $x\neq 0$. در این‌صورت عدد $\lambda\in\mathbb{R}$ وجود دارد به‌طوری که $x\perp_{HH-C}(\lambda x+y)$.*
به‌علاوه، همواره داریم

$$\frac{1}{6}|\lambda|\|x\|\le\|y\|\Big(\sum_{i=1}^{m}\int_0^1|(1-t)\alpha_i\beta_i\gamma_i+t\alpha_i\gamma_i^2\lambda|\,dt\Big).$$

برهان: فرض کنیم $x,y\in X$ و $x\neq 0$. در قضیهٔ ۵. ۲ از [۱۳] ثابت شده است، $\lambda\in\mathbb{R}$ وجود دارد به‌طوری که $x\perp_{HH-C}(\lambda x+y)$. بنا به تعریف تعامد $HH-C$ داریم

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\int_0^1\|(1-t)\beta_i x+t\gamma_i(\lambda x+y)\|^2\,dt=0.$$

این نتیجه می‌دهد که

$$-\sum_{\alpha_i<0}\alpha_i\int_0^1\|[(1-t)\beta_i+t\gamma_i\lambda]x+t\gamma_i y\|^2\,dt$$
$$=\sum_{\alpha_i>0}\alpha_i\int_0^1\|[(1-t)\beta_i+t\gamma_i\lambda]x+t\gamma_i y\|^2\,dt$$

به‌علاوه، برای هر $1\le i\le m$ و هر $t\in[0,1]$ داریم

$$\begin{aligned}&\big|\|[(1-t)\beta_i+t\gamma_i\lambda]x\|-\|t\gamma_i y\|\big|\\ &\quad\le\|[(1-t)\beta_i+t\gamma_i\lambda]x+t\gamma_i y\|.\end{aligned}\tag{۲}$$

و لذا

$$\begin{aligned}&(|(1-t)\beta_i+t\gamma_i\lambda|\|x\|-t|\gamma_i|\|y\|)^2\\ &\quad\le\|[(1-t)\beta_i+t\gamma_i\lambda]x+t\gamma_i y\|^2 .\end{aligned}$$

پس برای هر $\alpha_i>0$ $(1\le i\le m)$ و هر $t\in[0,1]$ داریم

$$\begin{aligned}&((1-t)^2\alpha_i\beta_i^2+t^2\alpha_i\gamma_i^2\lambda^2\\ &+2t(1-t)\lambda\alpha_i\beta_i\gamma_i)\|x\|^2+t^2\alpha_i\gamma_i^2\|y\|^2\\ &-2t\alpha_i|\gamma_i||(1-t)\beta_i+t\gamma_i\lambda|\|x\|\|y\|\\ &\le\alpha_i\|[(1-t)\beta_i+t\gamma_i\lambda]x+t\gamma_i y\|^2 .\end{aligned}$$

با انتگرال‌گیری از نامساوی بالا روی بازهٔ $[0,1]$ برای هر $\alpha_i>0$ $(1\le i\le m)$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3}(\alpha_i\beta_i^2+\alpha_i\gamma_i^2\lambda^2+\alpha_i\beta_i\gamma_i\lambda)\|x\|^2\\ &+\frac{1}{3}\alpha_i\gamma_i^2\|y\|^2\\ &-2\alpha_i|\gamma_i|\|x\|\|y\|\int_0^1 t|(1-t)\beta_i+t\gamma_i\lambda|\,dt\\ &\le\int_0^1\alpha_i\|[(1-t)\beta_i+t\gamma_i\lambda]x+t\gamma_i y\|^2\,dt.\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3}(\sum_{\alpha_i>0}\alpha_i\beta_i^2+\lambda^2\sum_{\alpha_i>0}\alpha_i\gamma_i^2+\lambda\sum_{\alpha_i>0}\alpha_i\beta_i\gamma_i)\|x\|^2\\ &+\frac{1}{3}\|y\|^2\sum_{\alpha_i>0}\alpha_i\gamma_i^2\\ &-2\|x\|\|y\|\sum_{\alpha_i>0}\alpha_i|\gamma_i|\int_0^1 t|(1-t)\beta_i+t\gamma_i\lambda|\,dt\\ &\le\sum_{\alpha_i>0}\alpha_i\int_0^1\|[(1-t)\beta_i+t\gamma_i\lambda]x+t\gamma_i y\|^2\,dt.\end{aligned}\tag{۳}$$

از سوی دیگر، برای هر $1\le i\le m$ و هر $t\in[0,1]$ داریم

$$\begin{aligned}&\|[(1-t)\beta_i+t\gamma_i\lambda]x+t\gamma_i y\|^2\\ &\le(|(1-t)\beta_i+t\gamma_i\lambda|\|x\|+t|\gamma_i|\|y\|)^2.\end{aligned}\tag{۴}$$

پس برای هر $\alpha_i<0$ $(1\le i\le m)$ و هر $t\in[0,1]$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned}&((1-t)^2\alpha_i\beta_i^2+t^2\alpha_i\gamma_i^2\lambda^2\\ &+2t(1-t)\lambda\alpha_i\beta_i\gamma_i)\|x\|^2+t^2\alpha_i\gamma_i^2\|y\|^2\\ &+2t\alpha_i|\gamma_i||(1-t)\beta_i+t\gamma_i\lambda|\|x\|\|y\|\\ &\le\alpha_i\|[(1-t)\beta_i+t\gamma_i\lambda]x+t\gamma_i y\|^2 .\end{aligned}$$

انتگرال‌گیری از نامساوی بالا روی بازه $[0,1]$ نتیجه می‌دهد که برای هر $\alpha_i<0$ $(1\le i\le m)$ داریم

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3}(\alpha_i\beta_i^2+\alpha_i\gamma_i^2\lambda^2+\alpha_i\beta_i\gamma_i\lambda)\|x\|^2\\ &+\frac{1}{3}\alpha_i\gamma_i^2\|y\|^2\\ &+2\alpha_i|\gamma_i|\|x\|\|y\|\int_0^1 t|(1-t)\beta_i+t\gamma_i\lambda|\,dt\\ &\le\int_0^1\alpha_i\|[(1-t)\beta_i+t\gamma_i\lambda]x+t\gamma_i y\|^2\,dt.\end{aligned}$$

از این‌رو

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3}(\sum_{\alpha_i<0}\alpha_i\beta_i^2+\lambda^2\sum_{\alpha_i<0}\alpha_i\gamma_i^2\\ &+\lambda\sum_{\alpha_i<0}\alpha_i\beta_i\gamma_i)\|x\|^2+\frac{1}{3}\|y\|^2\sum_{\alpha_i<0}\alpha_i\gamma_i^2\\ &+2\|x\|\|y\|\sum_{\alpha_i<0}\alpha_i|\gamma_i|\int_0^1 t|(1-t)\beta_i+t\gamma_i\lambda|\,dt\\ &\le\sum_{\alpha_i<0}\alpha_i\int_0^1\|[(1-t)\beta_i+t\gamma_i\lambda]x+t\gamma_i y\|^2\,dt\\ &=-\sum_{\alpha_i>0}\alpha_i\int_0^1\|[(1-t)\beta_i+t\gamma_i\lambda]x+t\gamma_i y\|^2\,dt.\end{aligned}\tag{۵}$$

از (۳) و (۵) نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3}\lambda\|x\|^2-2\|x\|\|y\|\\ &(\sum_{\alpha_i>0}\alpha_i\int_0^1 t|(1-t)\beta_i\gamma_i+t\alpha_i\gamma_i^2\lambda|\,dt\\ &-\sum_{\alpha_i<0}\alpha_i\int_0^1 t|(1-t)\beta_i\gamma_i+t\alpha_i\gamma_i^2\lambda|\,dt)\le 0.\end{aligned}$$

از طرفی چون

$$\sum_{\alpha_i>0}\alpha_i\int_0^1 t\left|(1-t)\beta_i\gamma_i+t\gamma_i^2\lambda\right|dt$$
$$-\sum_{\alpha_i<0}\alpha_i\int_0^1 t\left|(1-t)\beta_i\gamma_i+t\gamma_i^2\lambda\right|dt$$
$$=\sum_{\alpha_i>0}|\alpha_i|\int_0^1 t\left|(1-t)\beta_i\gamma_i+t\gamma_i^2\lambda\right|dt$$
$$+\sum_{\alpha_i<0}|\alpha_i|\int_0^1 t\left|(1-t)\beta_i\gamma_i+t\gamma_i^2\lambda\right|dt$$
$$=\sum_{i=1}^{m}\int_0^1 t\left|(1-t)\alpha_i\beta_i\gamma_i+t\alpha_i\gamma_i^2\lambda\right|dt,$$

پس

$$\frac{1}{6}\lambda\|x\| \le \|y\|\sum_{i=1}^{m}\int_0^1 t\left|(1-t)\alpha_i\beta_i\gamma_i+t\alpha_i\gamma_i^2\lambda\right|dt. \tag{۶}$$

با استفاده از (۲) و به کارگیری روشی مشابه، به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3}\Big(\sum_{\alpha_i<0}\alpha_i\beta_i^2+\lambda^2\sum_{\alpha_i<0}\alpha_i\gamma_i^2\\ &+\lambda\sum_{\alpha_i<0}\alpha_i\beta_i\gamma_i\Big)\|x\|^2+\frac{1}{3}\|y\|^2\sum_{\alpha_i<0}\alpha_i\gamma_i^2\\ &-2\|x\|\|y\|\sum_{\alpha_i<0}\alpha_i|\gamma_i|\int_0^1 t|(1-t)\beta_i+t\gamma_i\lambda|dt\\ &\ge\sum_{\alpha_i<0}\alpha_i\int_0^1\|[(1-t)\beta_i+t\gamma_i\lambda]x+t\gamma_i y\|^2\,dt\\ &=-\sum_{\alpha_i>0}\alpha_i\int_0^1\|[(1-t)\beta_i+t\gamma_i\lambda]x+t\gamma_i y\|^2\,dt.\end{aligned}\tag{۷}$$

همچنین از (۴) به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3}\Big(\sum_{\alpha_i>0}\alpha_i\beta_i^2+\lambda^2\sum_{\alpha_i>0}\alpha_i\gamma_i^2\\ &+\lambda\sum_{\alpha_i>0}\alpha_i\beta_i\gamma_i\Big)\|x\|^2+\frac{1}{3}\|y\|^2\sum_{\alpha_i>0}\alpha_i\gamma_i^2\\ &+2\|x\|\|y\|\sum_{\alpha_i>0}\alpha_i|\gamma_i|\int_0^1 t|(1-t)\beta_i+t\gamma_i\lambda|dt\\ &\ge\sum_{\alpha_i>0}\alpha_i\int_0^1\|[(1-t)\beta_i+t\gamma_i\lambda]x+t\gamma_i y\|^2\,dt.\end{aligned}\tag{۸}$$

پس از (۷) و (۸) نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}&\frac{1}{3}\lambda\|x\|^2+2\|x\|\|y\|\\ &\Big(\sum_{\alpha_i>0}\alpha_i\int_0^1 t\left|(1-t)\beta_i\gamma_i+t\alpha_i\gamma_i^2\lambda\right|dt\\ &-\sum_{\alpha_i<0}\alpha_i\int_0^1 t\left|(1-t)\beta_i\gamma_i+t\alpha_i\gamma_i^2\lambda\right|dt\Big)\ge 0\end{aligned}$$

و لذا

$$\begin{aligned}&\frac{1}{6}\lambda\|x\|\ge\\ &-\|y\|\sum_{i=1}^{m}\int_0^1 t\left|(1-t)\alpha_i\beta_i\gamma_i+t\alpha_i\gamma_i^2\lambda\right|dt.\end{aligned}\tag{۹}$$

سرانجام از (۶) و (۹)، نابرابری زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{6}|\lambda|\|x\|\le\\ &\|y\|\Big(\sum_{i=1}^{m}\int_0^1 t\left|(1-t)\alpha_i\beta_i\gamma_i+t\alpha_i\gamma_i^2\lambda\right|dt\Big).\end{aligned}$$

بدین ترتیب اثبات کامل می شود.□

یادآوری می‌شود که اگر $(X,\|\cdot\|)$ فضای نرمدار باشد، $0\neq x\in X$ و $y\in X$، آن‌گاه تابعک‌های

$$\tau_-(x,y)=\lim_{t\to 0^-}\frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t}$$

و

$$\tau_+(x,y)=\lim_{t\to 0^+}\frac{\|x+ty\|-\|x\|}{t}$$

به‌ترتیب، مشتق گاتوی چپ و راست تابع نرم در نقطهٔ x و در جهت y نامیده می‌شوند.

تابع نرم در نقطهٔ x، در جهت y مشتق‌پذیرِ گاتو است اگر $\tau_+(x,y)=\tau_-(x,y)$ که این مقدار مشترک را با $\tau(x,y)$ نشان داده می‌شود و مشتق گاتوی تابع نرم در نقطهٔ x، در جهت y می‌نامند. اگر تابع نرم در نقطهٔ x در جهت هر $y\in X$

مشتق‌پذیرِ گاتو باشد، آن‌گاه تابع نرم در نقطهٔ x مشتق‌پذیرِ گاتو است.

از جمله ویژگی‌های مهم تابعک‌های $\tau_{\pm}$ می‌توانیم به موارد زیر اشاره کنیم:

الف) $\tau_-(x,y)\le\tau_+(x,y)$.

ب) $|\tau_{\pm}(x,y)|\le\|y\|$.

پ) $\tau_{\pm}(x,\alpha y)=\begin{cases}\alpha\tau_{\pm}(x,y) & \alpha>0\\ \alpha\tau_{\mp}(x,y) & \alpha\le 0\end{cases}$.

ت) $\tau_{\pm}(x,\alpha x+y)=\alpha\|x\|+\tau_{\pm}(x,y)$.

برای اثبات قضیهٔ بعد به دو نتیجهٔ زیر که توسط جیمز در [۲] به‌دست آمده است نیاز داریم.

لم۳- *[۲] فرض کنیم $(X,\|\cdot\|)$ فضای نرمدار باشد که نرم آن مشتق‌پذیر گاتو است و $x,y\in X$. در این‌صورت $x\perp_B y$ اگر و تنها اگر $\tau(x,y)=0$.*

لم۴- *[۲، لم ۴. ۴] فرض کنیم $(X,\|\cdot\|)$ فضای نرمدار باشد و $x,y\in X$. برای هر $a\in\mathbb{R}$ داریم*

$$\lim_{|s|\to\infty}\frac{\|(a+s)x+y\|^2-\|sx+y\|^2}{s}=2a\|x\|^2.$$

قضیه ۵- *فرض کنیم $(X,\|\cdot\|)$ فضای نرمدار باشد، $x,y\in X$ و $x\neq 0$. در این‌صورت برای هر $0\neq r\in\mathbb{R}$ مقدار $\lambda(r)\in\mathbb{R}$ وجود دارد به‌طوری که*

$$rx\perp_{HH-C}(\lambda(r)x+y).$$

به‌علاوه، برای هر چنین $\lambda(r)$،

$$\lim_{r\to+\infty}\lambda(r)=\lambda(x,y)$$

که در آن

$$\lambda(x,y)=-\frac{1}{6}\frac{p\tau_+(x,y)+(1-p)\tau_-(x,y)}{\|x\|}$$

و

$$p=\sum_{\beta_i\gamma_i>0}\alpha_i\beta_i\gamma_i.$$

برهان: فرض کنیم $0\neq r\in\mathbb{R}$. در این صورت بنا به لم ۲ عدد $\lambda(r)\in\mathbb{R}$ وجود دارد به‌طوری که

$$rx\perp_{HH-C}(\lambda(r)x+y).$$

بنابراین

$$rx\perp_{HH-C}([r^{-1}\lambda(r)](rx)+y).$$

پس از نابرابری به‌دست آمده در لم ۲ نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{6}\left|r^{-1}\lambda(r)\right|\|rx\|\\
&\le\|y\|\sum_{i=1}^{m}\int_0^1 t\,|(1-t)\alpha_i\beta_i\gamma_i\\
&+t\alpha_i\gamma_i^2[r^{-1}\lambda(r)]|\,dt\\
&\le\|y\|[\sum_{i=1}^{m}|\alpha_i\beta_i\gamma_i|\int_0^1 t(1-t)dt\\
&+\left|r^{-1}\lambda(r)\right|\sum_{i=1}^{m}|\alpha_i|\gamma_i^2\int_0^1 t^2dt]\\
&=\frac{1}{6}\|y\|\sum_{i=1}^{m}|\alpha_i\beta_i\gamma_i|\\
&+\frac{1}{3}\|y\|\left|r^{-1}\lambda(r)\right|\sum_{i=1}^{m}|\alpha_i|\gamma_i^2.
\end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned}
&\left|r^{-1}\lambda(r)\right|[\frac{1}{6}\|rx\|-\frac{1}{3}\|y\|\sum_{i=1}^{m}|\alpha_i|\gamma_i^2]\\
&\le\frac{1}{6}\|y\|\sum_{i=1}^{m}|\alpha_i\beta_i\gamma_i|.
\end{aligned}$$

این نتیجه می‌دهد که

$$|\lambda(r)|[\frac{1}{6}-\frac{A}{|r|}]\le B \qquad (۱۰)$$

که در آن $A=\frac{1}{3}\frac{\|y\|}{\|x\|}\sum_{i=1}^{m}|\alpha_i|\gamma_i^2$ و $B=\frac{1}{6}\frac{\|y\|}{\|x\|}\sum_{i=1}^{m}|\alpha_i\beta_i\gamma_i|$.

اکنون فرض کنیم $\{r_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی مثبت باشد که $\lim_{n\to\infty}r_n=\infty$ و قرار می‌دهیم $\lambda_n:=\lambda(r_n)$. بنا به آنچه در (۱۰) به‌دست آوردیم، دنبالهٔ $\{\lambda_n\}$ کراندار است. پس بدون کاسته شدن از کلیت، می‌توانیم فرض کنیم $\lambda\in\mathbb{R}$ وجود دارد به‌طوری که

$$r_nx\perp_{HH-C}(\lambda_nx+y),\quad \lim_{n\to\infty}\lambda_n=\lambda.$$

بنابراین

$$F_n:=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\int_0^1\frac{1}{r_n}\|[(1-t)r_n\beta_i+t\gamma_i\lambda_n]x+t\gamma_iy\|^2\,dt=0.$$

برای هر $n\in\mathbb{N}$ تعریف می‌کنیم

$$F_n^1:=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\int_0^1\frac{1}{r_n}\big(\|[(1-t)r_n\beta_i+t\gamma_i\lambda_n]x+t\gamma_iy\|^2-\|[(1-t)r_n\beta_i+t\gamma_i\lambda]x+t\gamma_iy\|^2\big)dt,$$

$$F_n^2:=\sum_{\beta_i\neq0}\alpha_i\beta_i^2\int_0^1\frac{1}{r_n}\big(\|[(1-t)r_n+t\beta_i^{-1}\gamma_i\lambda]x+t\beta_i^{-1}\gamma_iy\|^2-\|(1-t)r_nx+t\beta_i^{-1}\gamma_iy\|^2\big)dt,$$

$$F_n^3:=\frac{1}{3}\frac{\|\lambda x+y\|^2}{r_n}\sum_{\beta_i=0}\alpha_i\gamma_i^2,$$

و

$$F_n^4:=\sum_{\beta_i\neq0}\alpha_i\beta_i^2\int_0^1\frac{\|(1-t)r_nx+t\beta_i^{-1}\gamma_iy\|^2}{r_n}\,dt.$$

از این‌رو

$$0=F_n=F_n^1+F_n^2+F_n^3+F_n^4.$$

اکنون برای هر $1\le i\le m$، $t\in[0,1]$ و هر $n\in\mathbb{N}$ تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned}f_n(t)&:=\frac{1}{r_n}\big(\|[(1-t)r_n\beta_i+t\gamma_i\lambda_n]x+t\gamma_iy\|^2\\&\quad-\|[(1-t)r_n\beta_i+t\gamma_i\lambda]x+t\gamma_iy\|^2\big)\\&=\frac{1}{r_n}\big(\|[(1-t)r_n\beta_i+t\gamma_i\lambda_n]x+t\gamma_iy\|\\&\quad+\|[(1-t)r_n\beta_i+t\gamma_i\lambda]x+t\gamma_iy\|\big)\\&\quad\big(\|[(1-t)r_n\beta_i+t\gamma_i\lambda_n]x+t\gamma_iy\|\\&\quad-\|[(1-t)r_n\beta_i+t\gamma_i\lambda]x+t\gamma_iy\|\big)\end{aligned}$$

ابتدا توجه می‌کنیم که برای هر $1\le i\le m$، $t\in[0,1]$ و هر $n\in\mathbb{N}$ داریم

$$\begin{aligned}&\big|\|[(1-t)r_n\beta_i+t\gamma_i\lambda_n]x+t\gamma_iy\|\\&-\|[(1-t)r_n\beta_i+t\gamma_i\lambda]x+t\gamma_iy\|\big|\\&\le\|[(1-t)r_n\beta_i+t\gamma_i\lambda_n]x+t\gamma_iy\\&-[(1-t)r_n\beta_i+t\gamma_i\lambda]x-t\gamma_iy\|\\&=t|\gamma_i||\lambda_n-\lambda|.\end{aligned}$$

همچنین، از آنجایی‌که $\lim_{n\to\infty}r_n=\infty$ و $\lim_{n\to\infty}\lambda_n=\lambda$ نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned}g_n(t)&:=\frac{1}{r_n}\big(\|[(1-t)r_n\beta_i+t\gamma_i\lambda_n]x+t\gamma_iy\|\\&\quad+\|[(1-t)r_n\beta_i+t\gamma_i\lambda]x+t\gamma_iy\|\big)\\&=\|[(1-t)\beta_i+t\gamma_i\frac{\lambda_n}{r_n}]x+\frac{t\gamma_iy}{r_n}\|\\&\quad+\|[(1-t)\beta_i+t\gamma_i\frac{\lambda_n}{r_n}]x+\frac{t\gamma_iy}{r_n}\|\end{aligned}$$

به $2(1-t)|\beta_i|\|x\|$ همگراست و در نتیجه کراندار است. از این‌رو بنا به قضیهٔ همگرایی تسلطی لبگ نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}|F_n^1| &\le \sum_{i=1}^{m}\alpha_i \lim_{n\to\infty}\int_0^1 |f_n(t)|\,dt\\ &\le \sum_{i=1}^{m}\alpha_i \lim_{n\to\infty}|\gamma_i||\lambda_n-\lambda|\int_0^1 t g_n(t)dt\\ &= (\sum_{i=1}^{m}\alpha_i|\beta_i\gamma_i|\int_0^1 2t(1-t)dt)\\ &\lim_{n\to\infty}|\lambda_n-\lambda|\|x\|=0.\end{aligned}$$

بنابراین $\lim_{n\to\infty}F_n^1=0$. اکنون فرض کنیم

$$\begin{aligned}h_n(t):=\frac{1}{r_n}(&\|[(1-t)r_n+t\beta_i^{-1}\gamma_i\lambda]x+t\beta_i^{-1}\gamma_i y\|^2\\ &-\|(1-t)r_n x+t\beta_i^{-1}\gamma_i y\|^2).\end{aligned}$$

با به کارگیری روشی مشابه آنچه که برای اثبات کرنداری دنبالهٔ $\{f_n(t)\}$ انجام شد، می‌توانیم ثابت کنیم که دنبالهٔ $\{h_n(t)\}$ نیز کراندار است.
همچنین از لم ۴ نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{n\to\infty}h_n(t)=2t\beta_i^{-1}\gamma_i\lambda\|x\|$$

و لذا قضیهٔ همگرایی تسلطی لبگ نتیجه می‌دهد که

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}F_n^2 &= \sum_{i=1}^{m}\alpha_i\beta_i^2\lim_{n\to\infty}\int_0^1 h_n(t)dt\\ &= (\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\beta_i\gamma_i)\lambda\|x\|\int_0^1 2t\,dt\\ &= \lambda\|x\|.\end{aligned}$$

واضح است که چون $\lim_{n\to\infty}r_n=0$، پس

$$\lim_{n\to\infty}F_n^3=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{\|\lambda x+y\|^2}{r_n}\sum_{\beta_i=0}\alpha_i\gamma_i^2=0.$$

ازآنجایی‌که $\sum_{\beta_i\neq 0}\alpha_i\beta_i^2=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\beta_i^2=0$، نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned}F_n^4=\sum_{\beta_i\neq 0}\alpha_i\beta_i^2\int_0^1\frac{1}{r_n}(&\|(1-t)r_n x+t\beta_i^{-1}\gamma_i y\|^2\\ &-\|(1-t)r_n x\|^2)dt.\end{aligned}$$

برای هر $1\le i\le m$، $t\in[0,1]$ و هر $n\in\mathbb{N}$ قرار می‌دهیم

$$\begin{aligned}k_n(t) &:= \frac{1}{r_n}(\|(1-t)r_n x+t\beta_i^{-1}\gamma_i y\|^2\\ &\qquad -\|(1-t)r_n x\|^2)\\ &= (\|(1-t)r_n x+t\beta_i^{-1}\gamma_i y\|-\|(1-t)r_n x\|)\\ &\quad (\frac{\|(1-t)r_n x+t\beta_i^{-1}\gamma_i y\|+\|(1-t)r_n x\|}{r_n}).\end{aligned}$$

لذا

$$\begin{aligned}k_n(t) &= (\frac{\|(1-t)x+s_n(t\beta_i^{-1}\gamma_i y)\|-\|(1-t)x\|}{s_n})\\ &\quad (\|(1-t)x+s_n(t\beta_i^{-1}\gamma_i y)\|+\|(1-t)x\|).\end{aligned}$$

که در آن $s_n=\frac{1}{r_n}$. چون $\lim_{n\to\infty}s_n=0$، پس بنا به تعریف تابعک τ_+ داریم

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{s_n}(\|(1-t)x+s_n(t\beta_i^{-1}\gamma_i y)\|-\|(1-t)x\|)\\ &=\tau_+((1-t)x,t\beta_i^{-1}\gamma_i y)\\ &=t(1-t)\tau_+(x,\beta_i^{-1}\gamma_i y).\end{aligned}$$

این نتیجه می‌دهد که

$$\lim_{n\to\infty}k_n(t)=2t(1-t)^2\|x\|\tau_+(x,\beta_i^{-1}\gamma_i y).$$

به‌علاوه، به سادگی دیده می‌شود که دنبالهٔ $\{k_n(t)\}$ کراندار است. لذا قضیهٔ همگرایی تسلطی لبگ نتیجه می‌دهد که

$$\lim_{n\to\infty} F_n^4 = \sum_{\beta_i\neq 0}\alpha_i\beta_i^2\int_0^1 k_n(t)dt$$
$$=\sum_{\beta_i\neq 0}\alpha_i\beta_i^2\tau_+(x,\beta_i^{-1}\gamma_i y)\,\|x\|\int_0^1 2t(1-t)^2dt$$
$$=\frac{1}{6}\|x\|\sum_{\beta_i\neq 0}\alpha_i\beta_i^2\tau_+(x,\beta_i^{-1}\gamma_i y)$$
$$=\frac{1}{6}\|x\|(p\tau_+(x,y)+(1-p)\tau_-(x,y))$$

که در آن $p=\sum_{\beta_i\gamma_i>0}\alpha_i\beta_i\gamma_i$. سرانجام به‌دست می‌آوریم

$$0=\lim_{n\to\infty}F_n$$
$$=\lim_{n\to\infty}(F_n^1+F_n^2+F_n^3+F_n^4)$$
$$=\lambda\|x\|+\frac{1}{6}\|x\|(p\tau_+(x,y)$$
$$+(1-p)\tau_-(x,y)).$$

بنابراین

$$\lambda=-\frac{1}{6}\frac{p\tau_+(x,y)+(1-p)\tau_-(x,y)}{\|x\|}.$$

بدین‌ترتیب اثبات کامل می‌شود.□

برای اثبات قضیهٔ بعد به نتیجهٔ زیر از [۴] نیاز داریم.

لم ۶- *[۴، لم ۲. ۷] فرض کنیم $(X,\|\cdot\|)$ فضای نرمدار باشد. اگر اعداد حقیقی λ و μ وجود داشته باشند که $\lambda+\mu\neq 0$ و $\lambda\tau_+(x,y)+\mu\tau_-(x,y)$ تابعی پیوسته از $x,y\in X$ باشد، آن‌گاه نرم X مشتق‌پذیر گاتو است.*

قبلاً اشاره کردیم که تعامد $HH-C$ در فضاهای نرمدار لزوماً همگن نیست. جالب است که بدانیم تعامد $HH-C$ تنها در فضاهای ضرب داخلی همگن است. این واقعیت در [۱۳] ثابت شده است.

قضیه ۷- *[۱۳، قضیهٔ ۳. ۱] فرض کنیم $(X,\|\cdot\|)$ فضای نرمدار باشد. اگر تعامد $HH-C$ در X همگن باشد، آن‌گاه X فضای ضرب داخلی است.*

در قضیهٔ بعد ثابت می کنیم تعامد $HH-C$ تنها در فضاهای ضرب داخلی جمعی است. ذکر این نکته ضروری است که این مطلب در [۱۳] به روش دیگری اثبات شده است. در واقع نویسندگان در [۱۳] از ایده‌های کارلسون در [۴] الهام گرفته‌اند. امّا باید بر این نکته تأکید کنیم که اثبات ارائه شده برای این حقیقت در مقالهٔ پیش رو مبتنی بر ویژگی وجودی تعامد $HH-C$ است و روند کاملاً متفاوتی را پیشنهاد می‌کند. همچنین توجه کنید از قضیه‌های ۷ و ۸ به سادگی نتیجه می‌شود که ویژگی‌های همگنی و جمعی بودن تعامد $HH-C$ در فضاهای نرمدار معادل هستند.

قضیه ۸- *فرض کنیم $(X,\|\cdot\|)$ فضای نرمدار باشد. اگر تعامد $HH-C$ در X جمعی باشد، آن‌گاه X فضای ضرب داخلی است.*

برهان: بدون کاسته شدن از کلیت، فرض می‌کنیم تعامد $HH-C$ در X از چپ جمعی باشد، $x,y\in X$، $x\neq 0$ و $x\perp_{HH-C} y$. چون تعامد $HH-C$ از چپ جمعی است، پس برای هر $n\in\mathbb{N}$، $nx\perp_{HH-C} y=0x+y$. از طرفی برای هر $n\in\mathbb{N}$ مقدار $\lambda(n)\in\mathbb{R}$ وجود دارد که $nx\perp_{HH-C}(\lambda(n)x+y)$. از این‌رو قضیهٔ ۵ نتیجه می‌دهد که برای هر $n\in\mathbb{N}$، $\lambda(n)=0$ و $\lambda(x,y)=\lim_{n\to+\infty}\lambda(n)=0$ و لذا

$$p\tau_+(x,y)+(1-p)\tau_-(x,y)=0$$

که در آن $p=\sum_{\beta_i\gamma_i>0}\alpha_i\beta_i\gamma_i$.

از سوی دیگر توجه کنید که بنا به ویژگی وجودی تعامد $HH-C$، برای هر $x,y\in X$ که

$x\neq 0$، عدد $r=r(x,y)\in \mathbb{R}$ وجود دارد که $x\perp_{HH-C}(rx+y)$. پس بنا به آن‌چه ثابت کردیم

$$\begin{aligned}0&=p\tau_+(x,rx+y)+(1-p)\tau_-(x,rx+y)\\&=r\|x\|+p\tau_+(x,y)+(1-p)\tau_-(x,y).\end{aligned}$$

بنابراین

$$r=r(x,y)=-\frac{p\tau_+(x,y)+(1-p)\tau_-(x,y)}{\|x\|}.$$

اکنون فرض کنیم $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دنباله‌هایی در X باشند که برای هر $n\in \mathbb{N}$، $x_n\neq 0$، $\lim_{n\to\infty}x_n=x$ و $\lim_{n\to\infty}y_n=y$. به خاطر ویژگی وجودی تعامد $HH-C$ برای هر $n\in \mathbb{N}$ عدد $r_n=r(x_n,y_n)$ وجود دارد به‌طوری که $x_n\perp_{HH-C}(r_nx_n+y_n)$. بنابراین برای هر $n\in \mathbb{N}$ داریم

$$r_n=-\frac{p\tau_+(x_n,y_n)+(1-p)\tau_-(x_n,y_n)}{\|x_n\|}$$

از طرفی چون $|\tau_\pm(x_n,y_n)|\leq\|y_n\|$، پس دنبالهٔ $\{r_n\}$ کراندار است و درنتیجه زیر دنباله‌ای همگرا دارد که دوباره آن‌را $\{r_n\}$ می‌نامیم و فرض می‌کنیم $\lim_{n\to\infty}r_n=r$. در این صورت به خاطر ویژگی پیوستگی تعامد $HH-C$ نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{n\to\infty}r(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}r_n=r=r(x,y).$$

این یعنی $r(x,y)$ و در نتیجه $p\tau_+(x,y)+(1-p)\tau_-(x,y)$ نسبت به هر دو مولفهٔ x و y پیوسته است. بنابراین از لم ۶ نتیجه می‌شود که تابع نرم روی X مشتق‌پذیر گاتو است. پس با استفاده از لم ۳ نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned}x\perp_{HH-C}y&\Leftrightarrow\tau(x,y)=0\\&\Leftrightarrow x\perp_B y\quad(\forall x,y\in X).\end{aligned}$$

امّا می‌دانیم تعامد برکف-جیمز همگن است. بنابراین تعامد $HH-C$ نیز در X همگن است و لذا قضیهٔ ۷ نتیجه می‌دهد که X فضای ضرب داخلی است.$\square$

تشکر و قدردانی

از سردبیر و داوران محترم که با نظرات ارزشمند خود، برغنای علمی مقاله افزودند، تشکر و قدردانی می‌کنم.

فهرست منابع

[1] G. Birkhoff, Orthogonality in linear metric spaces, Duke Math. J., 1 (2) (1935), 169–172.

[2] R. C. James, Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces, Trans Amer. Math. Soc., 61 (2) (1947), 265–292.

[3] R. C. James, Orthogonality in normed linear spaces, Duke Math. J., 12 (2) (1945), 291–302.

[4] S. O. Carlsson, Orthogonality in normed linear spaces, Ark. Mat., 4 (1962), 297–318.

[5] مهدی دهقانی ، فضاهای ضرب داخلی، از اتحاد متوازی الاضلاع تا سه گانه جیمز، فرهنگ و اندیشه ریاضی، ۱۳۹۹، سال ۳۹، (شمارهٔ ۷۶) پاییز و زمستان ۱۳۹۹ ، صص. ۱۰۷ تا ۱۲۳.

[6] J. Alonso, C. Beníitez, Orthogonality in normed linear spaces: a survey. Part I: main properties, Extracta Math., 3, (1988), 1–15.

[7] J. Alonso, C. Beníitez, Orthogonality in normed linear spaces: a survey. II. Relations between main orthogonalities, Extracta Math., 4, no. 3, (1989), 121–131.

[8] M. Dehghani, M. Abed and R. Jahanipur, A generalized orthogonality relation via norm derivatives in real normed linear spaces, Aequat. Math., 93 (2019), 651–667.

[9] H. Mazaheri, S. M. Moshtaghioun, The orthogonality in the vector spaces, Bull. Iran. Math., Soc., 35, (2009), 119–127.

[10] A. Zamani, M. Dehghani, (2019) On Exact and Approximate Orthogonalities Based on Norm Derivatives, In: Brzdęk J., Popa D., Rassias T. (eds) Ulam Type Stability. Springer, Cham.

[11] E. Kikianty, S.S. Dragomir, Hermite-Hadamard's inequality and the p-HH-norm on the Cartesian product of two copies of a normed space, Math. Inequal. Appl., 13 (1) (2010) 1–32.

[12] S. S. Dragomir, E. Kikianty, Orthogonality connected with integral means and characterizations of inner product spaces, *J. Geom.* 98 (1) (2010), 33–49.

[13] E. Kikianty, S. S. Dragomir, On Carlsson type orthogonality and characterization of inner product spaces, Filomat, 26 (4) (2012), 859–870.

[14] P. Jordan, J. von Neumann, On inner products in linear metric spaces, Ann. of Math., 36 (2), (1935), 719–723.

[15] M. M. Day, Some characterizations of inner-product spaces, Trans. Amer. Math. Soc., 62, (1947), 320–337.

[16] R. C. James, Inner product in normed linear spaces, Bull. Amer. Math. Soc., 53, (1947), 559–566.

[17] C. Alsina, J. Sikorska and M.S. Tomás, *Norm Derivatives and Characterizations of Inner Product Spaces*, World Scientific, Hackensack, NJ, 2010.

[18] D. Amir, *Characterizations of Inner Product Spaces*, *Operator Theory: Advances and Applications*, vol. 20. Birkhäuser, Basel (1986)

[19] M. Dehghani, A. Zamani, Characterization of real inner product spaces by Hermite-Hadamard type orthogonalities, J. Math. Anal. Appl., 479, (2019), 1364-1382.