دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره سی و پنجم، فروردین و اردیبهشت 1401
شماره شاپا: 2588X-588

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

آنالیز تقارن، قوانین بقا و جواب‌های ناوردا از معادله زمان-کسری موج همسان

رامین نجفی*

استادیار، گروه ریاضی، واحد ماکو، دانشگاه آزاد اسلامی، ماکو، ایران

تاریخ ارسال مقاله: 1399/01/15   تاریخ پذیرش مقاله: 1400/08/19

چکیده:

آنالیز تقارن لی روشی کارآمد برای بدست آوردن جواب‌های تحلیلی و دقیق از معادلات دیفرانسیل ارائه می‌دهد. در این مقاله آنالیز تقارن لی برای معادله دیفرانسیل زمان-کسری موج همسان با مشتق کسری ریمن-لیوویل را مورد بحث قرار می‌دهیم. این معادله برای توصیف شبیه‌سازی انتشار موج تک بعدی در محیط‌های غیرخطی همراه با فرآیندهای پراکندگی مورد استفاده قرارمی‌گیرد. با به کار بردن آنالیز تقارن لی کلاسیک و غیرکلاسیک و بعضی تکنیک‌های محاسباتی، مولدهای بی‌نهایت کوچک جدید را بدست می‌آوریم. سپس با تغییر مختصات، معادله موج همسان کسری را به معادله دیفرانسیل معمولی کسری تقلیل داده و جواب‌های ناوردایی برای این معادله پیدا می‌کنیم. با استفاده از قضیه بقا جدید ایبراگیموف و تعمیم عملگرهای نوتر، قوانین بقا را برای معادله می‌سازیم. همچنین معادله الحاقی و مولد بی‌نهایت کوچک آن، که با تقارن‌های لی معادله اساسی در ارتباط است را بدست می‌آوریم و این معادله را به معادله دیفرانسیل معمولی کسری تقلیل می‌دهیم. در معادلات کاهش یافته، مشتق در مفهوم اردلی-کوبر است.

واژه‌ی کلیدی: معادله زمان-کسری موج همسان، آنالیز تقارن لی، قوانین بقا، معادله الحاقی، جواب ناوردا.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: raminnajafi984@gmail.com

1. مقدمه

در طی سال‌های اخیر، نظریه معادلات دیفرانسیل با مرتبه کسری نقش اساسی در زمینه‌های مختلف علوم بازی می‌کند و در مدل‌سازی ریاضی بیشتر سیستم‌ها در فیزیک، شیمی و زیست شیمی، مالی، پزشکی و علوم دیگر اهمیت اساسی دارد، چون به‌وسیله این نوع معادلات دینامیک رفتار پدیده‌ها به‌طور دقیق قابل بررسی است[1-7]. معادلات دیفرانسیل کسری یک ابزار ارزشمند برای توصیف حافظه و خواص ارثی از فرآیندهای فیزیکی ارائه می‌کند، چون این معادلات تاریخچه‌ای از فرآیندها را ضبط، ومدل دقیق‌تری از سیستم‌ها را فراهم می‌کند. معادلات دیفرانسیل کسری توسط روش‌های عددی متنوعی مورد بحث و مطالعه قرار گرفته است[8-11]، با این حال برای بدست آوردن جواب تحلیلی از این معادلات کارهای کمی انجام گرفته است[12-13].

معادله موج همسان[2] برای توصیف مدل ریاضی از انتشار موج در محیط‌های غیر خطی با فرآیندهای پراکندگی مورد استفاده قرار گرفته است[14]. در مدل‌سازی این معادله، هنگامی که اثرات حافظه در نظر گرفته می شود، معادله دیفرانسیل را با مشتقات کسری بدست می‌آوریم. چند روش مختلف عددی برای تجزیه و تحلیل این معادله موج همسان کسری ارائه شده است[15-17].

آنالیز تقارن لی[3] می‌تواند برای بدست آوردن جواب‌های تحلیلی و دقیق از معادلات دیفرانسیل به صورت کارا مورد استفاده قرار گیرد. در روش تقارن لی هدف بدست آوردن مولدهای بی‌نهایت کوچک[4] معادله دیفرانسیل و سپس تقلیل[5] آن معادله و بدست آوردن جواب‌های تحلیلی متناظر با آن مولد است. برخی از محققان آنالیز تقارن لی را برای پیدا کردن جواب‌های تحلیلی بعضی معادلات دیفرانسیل جزئی به‌کار برده‌اند[18-23]. برای بدست آوردن مولدهای بی‌نهایت کوچک جدید و در نتیجه جواب‌های جدید از معادله دیفرانسیل، یکی از تعمیم‌های ممکن از آنالیز تقارن لی "روش غیرکلاسیک"[6] می‌باشد. روش آنالیز تقارن لی غیرکلاسیک برای معادلات دیفرانسیل کسری در [24-26] مورد بررسی قرار گرفته است.

قوانین بقا[7] نقش مهمی در مطالعه خصوصیات اساسی از معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی همانند بررسی وجود، یکتایی و پایداری جواب دارد. قضیه کلاسیک نوتر ارتباطی بین تقارن معادلات دیفرانسیل و قوانین بقا از آن معادله برقرار می‌کند[27]. "قضیه جدید بقا" مبتنی بر معادلات الحاقی[8] برای بدست آوردن قوانین بقا برای معادلات دیفرانسیل غیرخطی بدون لاگرانژین[9] توسط ایبراگیموف پیشنهاد شده است[28]. در[29] تعمیم کسری از عملگرهای نوتر[10] برای بدست آوردن قوانین بقا از معادلات دیفرانسیل کسری با لاگرانژین کسری با استفاده از قضیه ایبراگیموف گسترش یافته و مورد استفاده قرار گرفته است.

این مقاله از پنج بخش به صورت زیر تشکیل شده است. مفاهیم مقدماتی و پایه‌ای از حساب دیفرانسیل و انتگرال کسری و هم‌چنین آنالیز تقارن لی کلاسیک و غیرکلاسیک برای معادلات دیفرانسیل کسری در بخش دوم داده شده است. در بخش سوم آنالیز تقارن لی برای معادله زمان-کسری موج همسان بیان شده و مولدهای بی‌نهایت کوچک از این معادله بدست آمده است. در بخش چهارم با استفاده از مولدهای بدست آمده، معادله موج همسان به معادله دیفرانسیل معمولی کسری تقلیل یافته و جواب‌های دقیق از معادله پیدا شده است. قوانین بقا برای

[2] equal width wave equation
[3] Lie symmetry analysis
[4] Infinitesimal generators
[5] Reduction
[6] Nonclassical method
[7] Conservation law
[8] Adjoint equation
[9] Lagrangian
[10] Noether's operator

معادلات دیفرانسیل کسری در بخش پنج بیان شده و این قوانین برای معادله موج همسان بدست آمده است. در نهایت در بخش ششم، با توجه به روش جدید برای بدست آوردن قانون بقا، مولدهای بی‌نهایت کوچک از معادله الحاقی معادله موج همسان کسری ارائه شده است.

2- آنالیز تقارن لی برای معادلات دیفرانسیل کسری

در این بخش به صورت خلاصه آنالیز تقارن لی را برای معادلات دیفرانسل کسری یادآوری می‌کنیم. برای این کار بعضی از تعاریف، قضایا را که برای بحث ضروری هستند را بیان می‌کنیم.

تعریف 1: فرض کنید $\alpha > 0$ و $n - 1 < \alpha \leq n$ باشد. مشتق کسری ریمن-لیوویل از مرتبه α از تابع $f \in L_1(0, T)$ به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \times \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s) ds$$

که در آن $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty s^{\alpha-1} e^{-s} ds$ تابع گاما را نمایش می‌دهد.

قضیه2: (فرمول لایبنیتز برای عملگر مشتق کسری ریمن-لیوویل) فرض کنید $\alpha > 0$ و f و g برای هر $h > 0$ توابع تحلیلی در بازه $(-h, h)$ باشند، در این صورت برای هر $0 < t < \frac{h}{2}$ داریم:

$$D_t^\alpha [fg](t) = \sum_{n=0}^\infty \binom{\alpha}{n} f^{(n)}(t) D_t^{\alpha-n} g(t).$$

فرض کنید

$$\begin{aligned} \bar{x} &= x + \epsilon\xi(x,t,u) + O(\epsilon^2), \\ \bar{t} &= t + \epsilon\tau(x,t,u) + O(\epsilon^2), \\ \bar{u} &= u + \epsilon\eta(x,t,u) + O(\epsilon^2), \end{aligned} \tag{1}$$

تبدیلات گروه لی یک پارامتری[11] G با مولد بی نهایت کوچک

$$X = \xi \frac{\partial}{\partial x} + \tau \frac{\partial}{\partial t} + \eta \frac{\partial}{\partial u}, \tag{2}$$

روی زیرمجموعه باز $M \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ با مختصات (x, t, u) باشد. فرض کنید $\alpha > 0$ و

$$F(x, t, u, u_x, u_t, u_{xx}, \dots, D_t^\alpha u) = 0, \tag{3}$$

معادله دیفرانسیل زمان-کسری تعریف شده روی M باشد. برای بدست آوردن ناوردا[12]یی معادله دیفرانسیل کسری فوق در روش تقارن لی کلاسیک، برای هر مولد بی نهایت کوچک X داریم:

$$X^{(\alpha,t)}(F)|_{F=0} = 0, \tag{4}$$

که در آن $X^{(\alpha,t)}$ به شکل زیر تعریف می‌شود:

$$X^{(\alpha,t)} = X + \eta^x \frac{\partial}{\partial u_x} + \eta^t \frac{\partial}{\partial u_t} + \eta^{xx} \frac{\partial}{\partial u_{xx}} + \dots + \eta^{(\alpha,t)} \frac{\partial}{\partial D_t^\alpha u},$$

و

$$\begin{aligned} \eta^x &= \mathcal{D}_x \eta - \mathcal{D}_x(\xi) u_x - \mathcal{D}_x(\tau) u_t, \\ \eta^t &= \mathcal{D}_t \eta - \mathcal{D}_t(\xi) u_x - \mathcal{D}_t(\tau) u_t, \\ \eta^{xx} &= \mathcal{D}_x(\eta^x) - \mathcal{D}_x(\xi) u_{xx} - \mathcal{D}_x(\tau) u_{xt}, \\ \eta^{(\alpha,t)} &= \mathcal{D}_t^\alpha \eta + \xi D_t^\alpha u_x - \mathcal{D}_t^\alpha(\xi u_x) \\ &\quad + \mathcal{D}_t^\alpha(\mathcal{D}_t(\tau) u) - \mathcal{D}_t^{\alpha+1}(\tau u) + \tau D_t^{\alpha+1} u. \end{aligned} \tag{5}$$

در این فرمول‌ها $\mathcal{D}_t f$ و $\mathcal{D}_t^\alpha f$ به ترتیب عملگرهای مشتق کلی[13] و مشتق کلی کسری، نسبت به t را نمایش می‌دهند. برای استفاده از (4) و بدست آوردن مولدهای بی‌نهایت کوچک از معادله دیفرانسیل کسری لازم است $\eta^{(\alpha,t)}$ ساده شود، برای این کار می‌توان با استفاده از قضیه 2 نوشت:

$$\eta^{(\alpha,t)} = \mathcal{D}_t^\alpha \eta - \sum_{n=1}^\infty \binom{\alpha}{n} \mathcal{D}_t^n \xi D_t^{\alpha-n} u_x - \sum_{n=1}^\infty \binom{\alpha}{n} \mathcal{D}_t^n \tau D_t^{\alpha+1-n} u,$$

که در آن $\mathcal{D}_t^\alpha \eta$ با استفاده از قاعده زنجیری می‌تواند

---

[11] One-parameter Lie group transformation
[12] Invariant
[13] Total derivative

به صورت زیر محاسبه شود:

$$\mathcal{D}_t^\alpha \eta(x,t,u(x,t)) = D_t^\alpha \eta + \eta_u D_t^\alpha u - uD_t^\alpha \eta_u + \sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha}{n} D_t^n \eta_u D_t^{\alpha-n} u + \mu,$$

با

$$\mu = \sum_{n=2}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\frac{x^{n-\alpha}}{\Gamma(n+1-\alpha)}\sum_{m=2}^{n}\sum_{k=2}^{m}\sum_{r=0}^{k-1}\binom{n}{m}\binom{k}{r}\frac{1}{k!}(-u)^r D_t^m u^{k-r} D_t^{n-m}(D_u^k \eta),$$

که در آن $\eta_u = \frac{\partial \eta}{\partial u}$ و $D_t^m = \frac{\partial^m}{\partial t^m}$.
با توجه به تعریف 1 برای ناوردایی حد پایین انتگرال در مشتق کسری نسبت به t، تحت تبدیلات گروه (1)، باید فرض کنیم:

$$\tau(x,t,u(x,t))|_{t=0} = 0. \tag{6}$$

آنالیز تقارن لی غیرکلاسیک با اضافه کردن معادله جدید شرط رویه ناوردا[14] به معادله اصلی و سپس بررسی ناوردایی، برای بدست آوردن مولدهای بی‌نهایت کوچک جدید است. با در نظر گرفتن تبدیلات گروه لی (1) با مولد بی‌نهایت کوچک (2) معادله شرط رویه ناوردا به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Lambda: \xi(x,t,u)u_x + \tau(x,t,u)u_t - \eta(x,t,u) = 0, \tag{7}$$

با اضافه کردن این معادله به معادله اصلی (3)، بایستی هردوی این معادلات تحت تبدیلات گروه لی(1) ناوردا باشد. چون به ازای هر τ, ξ و η معادله شرط رویه ناوردا همواره تحت تبدیلات گروه لی(1) ناورداست بنابراین در روش تقارن لی غیرکلاسیک، برای هر مولد بی نهایت کوچک X داریم:

$$X^{(\alpha,t)}(F)|_{F=0,\Lambda=0} = 0. \tag{8}$$

3- آنالیز تقارن لی کلاسیک و غیر کلاسیک برای معادله زمان-کسری موج همسان

معادله دیفرانسیل غیر خطی زمان-کسری موج همسان زیر را در نظر بگیرید:

$$\Delta: D_t^\alpha u + \beta(u^2)_x - \lambda u_{xxt} = 0, \quad 0 < \alpha < 1, \tag{9}$$

که در آن β و λ مقادیر حقیقی هستند. با توجه به آنالیز تقارن لی کلاسیک، می‌خواهیم همه توابع ممکن τ, ξ و η از مولد بی‌نهایت کوچک (2) را طوری پیدا کنیم که تبدیلات گروه یک پارامتری (1)، گروه تقارن از معادله (9) باشد. با در نظر گرفتن (4) و بکار بردن $X^{(\alpha,t)}$ در معادله (9) محک بی‌نهایت کوچک[15] به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\eta^{(\alpha,t)} + 2\beta\eta u_x + 2\beta u\eta^x - \lambda\eta^{xxt}|_{\Delta=0} = 0, \tag{10}$$

که در آن $\eta^{(\alpha,t)}$ و η^x به صورت (5) تعریف می‌شود و η^{xxt} به صورت زیر است:

$$\eta^{xxt} = \mathcal{D}_t(\eta^{xx}) - \mathcal{D}_t(\xi)u_{xxx} - \mathcal{D}_t(\tau)u_{xxt}.$$

با جایگذاری کردن این مقادیر در (10) و جایگزینی $D_t^\alpha u$ با $-\beta(u^2)_x + \lambda u_{xxt}$ و سپس با مساوی صفر قرار دادن ضرایب مشتقات u، معادلات مشخصه آنالیز تقارن لی کلاسیک به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}
&2\beta\eta_x u - \lambda\eta_{xxt} + D_t^\alpha \eta - uD_t^\alpha \eta_u = 0,\\
&2\beta\eta - 2\beta\xi_x u - 2\lambda\eta_{xtu} + \lambda\xi_{xxt} + 2\beta\alpha\tau_t u = 0,\\
&-2\beta\tau_x u - \lambda\eta_{xxu} + \lambda\tau_{xxt} = 0,\\
&-2\beta\xi_u u - \lambda\eta_{tuu} + 2\lambda\xi_{xtu} = 0,\\
&-2\beta\tau_u u - 2\lambda\eta_{xuu} + \lambda\xi_{xxu} + 2\lambda\tau_{xtu} + 2\beta\alpha\tau_u u = 0,\\
&\tau_{xuu} = 0, -\eta_{uuu} + 2\xi_{xuu} + \tau_{tuu} = 0,\\
&-\eta_{tu} + 2\xi_{xt} = 0,\\
&-2\eta_{xu} + \xi_{xx} + 2\tau_{xt} = 0,\\
&-\eta_{uu} + 2\xi_{xu} + \tau_{tu} = 0, \tau_{xxu} = 0,\\
&\tau_{xx} = 0, \tau_{xu} = 0, \xi_{tuu} = 0, \xi_{uuu} = 0,\\
&\xi_{uu} = 0, \tau_{uuu} = 0, \tau_{uu} = 0,\\
&2\xi_x + (1-\alpha)\tau_t = 0, \tau_x = 0, \xi_{tu} = 0,\\
&\xi_u = 0, \tau_u = 0, \xi_t = 0,\\
&\binom{\alpha}{n} D_t^n \eta_u - \binom{\alpha}{n+1}\mathcal{D}_t^{n+1}\tau = 0, \quad n \in \mathbb{N},\\
&\mathcal{D}_t^n \xi = 0, \qquad n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

---

[14] Invariant surface condition

[15] Infinitesimal criterion

با حل کردن معادلات مشخصه و با در نظر گرفتن (6)، توابع τ, ξ و η به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\xi = (\alpha - 1)c_2 x + c_1,$$
$$\tau = 2c_2 t,$$
$$\eta = -(\alpha + 1)c_2 u,$$

که c_1 و c_2 مقادیر ثابت دلخواه است. بنابراین مولدهای بی‌نهایت کوچک کلاسیک از معادله (9) به صورت زیر است:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x},$$
$$X_2 = (\alpha - 1)x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} - (\alpha + 1)u\frac{\partial}{\partial u}.$$

حال آنالیز تقارن لی غیرکلاسیک را برای بدست آوردن میدان‌های برداری معادله (9) به کار می‌بریم. فرض کنید (1) تبدیلات گروه یک پارامتری با مولد بی‌نهایت کوچک (2) باشد، در این صورت شرط رویه ناوردا به صورت (7) تعریف می‌شود و شرط ناوردایی غیرکلاسیک آنالیز تقارن لی از معادله (9) به صورت زیر است:

$$X^{(\alpha,t)}(\Delta)|_{\Delta=0,\Lambda=0} = 0.$$

با بکار بردن $X^{(\alpha,t)}$ در معادله (9) داریم:

$$\eta^{(\alpha,t)} + 2\beta\eta u_x + 2\beta u\eta^x - \lambda\eta^{xxt}|_{\Delta=0,\Lambda=0} = 0. \tag{11}$$

با توجه به مشتق کسری نسبت به زمان، برای پیدا کردن مولدهای بی‌نهایت کوچک غیرکلاسیک دو حالت در نظر می‌گیریم: $\xi \neq 0$ و $\xi = 0$. هرگاه $\xi \neq 0$ باشد در این صورت بدون از دست دادن کلیت مطلب می‌توان فرض کرد $\xi = 1$ و از اینرو با توجه به شرط رویه ناوردا (7) داریم:

$$u_x = \eta - \tau u_t,$$
$$u_{xt} = \eta_t + (\eta_u - \tau_t)u_t - \tau_u u_t^2 - \tau u_{tt},$$
$$u_{xx} = \eta_x + \eta\eta_u - \tau\eta_t - (2\tau\eta_u + \tau_x + \tau_u\eta - \tau\tau_t)u_t + 2\tau\tau_u u_t^2 + \tau^2 u_{tt},$$
$$u_{xtt} = \eta_{tt} + (2\eta_{tu} - \tau_{tt})u_t + (\eta_{uu} - 2\tau_{tu})u_t^2 - \tau_{uu}u_t^3 + (\eta_u - 2\tau_t)u_{tt} -3\tau_u u_t u_{tt} - \tau u_{ttt},$$
$$u_{xxt} = \eta_{xt} + \eta_t\eta_u + \eta\eta_{tu} - \tau_t\eta_t -\tau\eta_{tt} + (\eta_{xu} + \eta_u^2 + \eta\eta_{uu} - 2\tau_u\eta_t -3\tau\eta_{tu} - 2\tau_t\eta_u - \tau_{xt} - \tau_{tu}\eta + \tau_t^2 +\tau\tau_{tt})u_t - (3\tau_u\eta_u + 2\tau\eta_{uu} + \tau_{xu} + \tau_{uu}\eta - 3\tau_t\tau_u - 3\tau\tau_{tu})u_t^2 + (2\tau_u^2 + 2\tau\tau_{uu})u_t^3 - (2\tau\eta_u + \tau_x + \tau_u\eta -3\tau\tau_t)u_{tt} + 6\tau\tau_u u_t u_{tt} + \tau^2 u_{ttt},$$

پس از جایگذاری کردن مقادیر $\eta^{(\alpha,t)}, \eta^{xxt}, \eta^x$ با مقدار $\xi = 1$ در (11)، جایگزین کردن $D_t^\alpha u$ با $-\beta(u^2)_x + \lambda u_{xxt}$ همانند حالت کلاسیک و همچنین جایگذاری کردن مقادیر $u_x, u_{xt}, \ldots$ طبق روابط بالا، و مساوی صفر قرار دادن ضرایب مشتقات u معادلات مشخصه غیرکلاسیک برای گروه تقارن (1) بدست می‌آید. در بررسی ضرایب مشتقات u که ظاهر می‌شوند، ضریب u_{tt}^2 به صورت زیر است:

$$\tau^2\tau_u = 0,$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم $\tau = 0$ یا $\tau_u = 0$. هرگاه $\tau = 0$ در این صورت شرط رویه ناوردا به شکل $u_x = \eta$ است و در این حالت معادلات مشخصه غیرکلاسیک معادله (9) به صورت زیر می‌باشد:

$$2\beta\eta^2 + 2\beta\eta_x u - \lambda\eta_{xxt} - 2\lambda\eta\eta_{xtu} -\lambda\eta^2\eta_{tuu} - \lambda\eta_x\eta_{tu} - \lambda\eta\eta_u\eta_{tu} -2\lambda\eta_t\eta_{xu} - 2\lambda\eta\eta_t\eta_{uu} +D_t^\alpha\eta - uD_t^\alpha\eta_u = 0,$$
$$\eta_{xxu} + 2\eta\eta_{xuu} + \eta^2\eta_{uuu} + 2\eta_u\eta_{xu} + \eta_x\eta_{uu} + 3\eta\eta_u\eta_{uu} = 0,$$
$$D_t^n\eta_u = 0, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

با حل کردن این معادلات مشخصه تابع η به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\eta = \frac{u}{x+\rho},$$

که ρ مقدار ثابت دلخواه است. بنابراین مولد بی‌نهایت کوچک غیرکلاسیک از معادله (9) به صورت زیر است:

$$X_3 = (x + \rho)\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u}.$$

از اینرو با توجه به مباحث بالا قضیه زیر را می‌توان

اثبات کرد:

قضیه3: فرض کنید $\alpha > 0$ و

$$\Delta: D_t^{\alpha}u + auu_x + G(u_{xx}, u_{xxt}, u_{xxx}, \dots) = 0, \quad (12)$$

معادله دیفرانسیل زمان-کسری تعریف شده روی $M \subset \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ با مختصات (x, t, u) باشد که در آن a مقدار ثابت دلخواه و G تابع دلخواه است، در این صورت

$$X = (x + \rho)\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u}, \quad (13)$$

مولد بی‌نهایت کوچک غیرکلاسیک از معادله (12) می‌باشد.

اثبات: با بکار بردن $X^{(\alpha,t)}$ در معادله (12) محک بی‌نهایت کوچک غیرکلاسیک از این معادله به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\eta^{(\alpha,t)} + a\eta u_x + au\eta^x + H(\eta^{xx}, \eta^{xxt}, \eta^{xxx}, \dots)|_{\Delta=0,\Lambda=0} = 0, \quad (14)$$

که تابع H از بکار بردن $X^{(\alpha,t)}$ روی تابع G بدست آمده است. با توجه به (13) شرط رویه ناوردا به صورت

$$\Lambda: u_x = \frac{u}{x+\rho},$$

می‌باشد. با مشتق گرفتن از طرفین Λ نسبت به x و جایگذاری مقدار u_x داریم:

$$u_{xx} = 0, \quad u_{xxt} = 0, \quad u_{xxx} = 0, \quad \dots$$

وهمچنین با توجه به $u_x = \eta$ داریم:

$$\eta^{(\alpha,t)} = \frac{1}{x+\rho}D_t^{\alpha}u, \ \ \eta^x = 0,$$
$$\eta^{xx} = 0, \quad \eta^{xxt} = 0, \quad \dots$$

با جایگذاری این مقادیر در (14) داریم:

$$\eta^{(\alpha,t)} + a\eta u_x + au\eta^x + H(\eta^{xx}, \eta^{xxt}, \eta^{xxx}, \dots) = \frac{1}{x+\rho}\Delta,$$

و این اثبات قضیه را کامل می‌کند.

تذکر1: این قضیه به ازاء $\alpha \in \mathbb{N}$ نیز برقرار است.

تذکر2: با توجه به این قضیه خیلی از معادلات دیفرانسیل موجود در زمینه‌های مختلف علوم همانند معادلات کی‌دی‌وی، برگر، کاواهارا دارای مولد بی‌نهایت کوچک غیرکلاسیک به صورت (13) می‌باشد.

هرگاه $\xi = 1$، $\tau \neq 0$ و $\tau_u = 0$ در معادلات مشخصه غیرکلاسیک ضرایب $u_t u_{tt}$، u_{ttt} و u_t^3 داخل زیگما به صورت زیر می‌باشد:

$$\eta_{uu} = 0, \ \ (\alpha - 1)\tau\tau_t + 2\tau_x = 0,$$
$$\eta_{uuu} = 0,$$
$$\binom{\alpha}{n}D_t^n\eta_u - \binom{\alpha}{n+1}D_t^{n+1}\tau = 0, n \in \mathbb{N}.$$

با حل کردن این معادلات، توابع τ و η به صورت زیر بدست می‌آیند:

$$\tau = \frac{2t}{(\alpha-1)x+\rho},$$
$$\eta = A(x)u + B(x,t),$$

که در آن A، B توابع دلخواه و ρ مقدار ثابت دلخواه است. با جایگذاری این توابع در بقیه معادلات مشخصه داریم:

$$A = -\frac{\alpha+1}{(\alpha-1)x+\rho}, \qquad B = 0.$$

بنابراین در این حالت مولد بی‌نهایت کوچک غیرکلاسیک به صورت زیر است:

$$X_4 = [(\alpha - 1)x + \rho]\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} - (\alpha + 1)u\frac{\partial}{\partial u}.$$

تذکر3: این مولد به صورت $X_4 = X_2 + \rho X_1$ می‌باشد، این بدین معناست که ممکن است توسط روش غیرکلاسیک مولدهای بی‌نهایت کوچک

کلاسیک را نیز بدست آوریم. در [26] نشان داده شده است که توسط روش غیرکلاسیک ممکن است مولدهای مهم‌تری نسبت به روش کلاسیک بدست آید. در حالتی که $\xi = 0$ با توجه به شرط رویه ناوردا (7) نتیجه می‌گیریم $\tau \neq 0$ و در این صورت این شرط به شکل $u_t = \frac{\eta}{\tau}$ خواهد بود. مشابه حالت قبل با مشتق‌گیری از این شرط و محاسبه مقادیر u_{xt}، u_{tt}، u_{xxt}، u_{xtt} و جایگزینی آنها، معادلات مشخصه غیرکلاسیک از معادله (9) بدست می‌آید. توجه شود که در حالت عمومی، حل این معادلات نسبت به τ و η مشکل است.

4- تقلیل و جواب‌های دقیق از معادله زمان-کسری موج همسان

در این بخش با استفاده از مولدهای بی‌نهایت کوچک بدست آمده از معادله (9)، این معادله را به یک معادله دیفرانسیل معمولی کسری تقلیل می‌دهیم و جواب دقیق از معادله را بدست می‌آوریم.

حالت 1: برای بدست آوردن جواب ناوردا برای معادله (9) گروه یک پارامتری تولید شده به وسیله X_1 را با جواب ناوردای

$$u(x,t) = f(t), \tag{15}$$

در نظر بگیرید، با جایگذاری کردن این جواب در معادله (9)، معادله دیفرانسیل تبدیل یافته به صورت زیر می‌باشد:

$$D_t^{\alpha} f(t) = 0,$$

با توجه به جوابی از این معادله، جواب معادله (9) به شکل زیر است:

$$u(x,t) = k_1 t^{\alpha-1},$$

که k_1 مقدار ثابت دلخواه است.

حالت 2: با در نظر گرفتن گروه تک پارامتری تولید شده به وسیله مولد بی‌نهایت کوچک X_2، و حل کردن سیستم مشخصه

$$\frac{dx}{(\alpha-1)x} = \frac{dt}{2t} = \frac{du}{-(\alpha+1)u},$$

ناورداهای سراسری[16] از این گروه به صورت زیر بدست می‌آید:

$$y = x^2 t^{1-\alpha}, \qquad u = t^{-\frac{\alpha+1}{2}} g(y). \tag{16}$$

قضیه4: با تغییر متغیر (16) معادله (9) به معادله دیفرانسیل معمولی کسری زیر تبدیل می شود:

$$\left(P^{\frac{1-3\alpha}{2},\alpha}_{\frac{1}{\alpha-1}} g\right)(y) + 4\beta\sqrt{y}\,g g' + \lambda(3\alpha-1)g' + \lambda(12\alpha-8)y g'' + \lambda(4\alpha-4)y^2 g''' = 0,$$

که در آن $g' = \frac{dg}{dy}$ و $(P_{\delta}^{\gamma,\alpha} g)(y)$ مشتق کسری اردلی-کوبر[17] برای مشتق کسری ریمن-لیوویل است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(P_{\delta}^{\gamma,\alpha} g)(y) = \prod_{j=0}^{n-1}\left(\gamma + j - \frac{1}{\delta} y \frac{d}{dy}\right)(K_{\delta}^{\gamma+\alpha, n-\alpha} g)(y),$$

$$n = \begin{cases} [\alpha] + 1, & \alpha \notin \mathbb{N} \\ \alpha, & \alpha \in \mathbb{N} \end{cases}$$

و $(K_{\delta}^{\gamma,\alpha} v)(y)$ انتگرال کسری اردلی-کوبر است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(K_{\delta}^{\gamma,\alpha} g)(y) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^{\infty} (r-1)^{\alpha-1} r^{-(\gamma+\alpha)} \times g\left(y r^{\frac{1}{\delta}}\right) dr, & \alpha > 0 \\ g(y), & \alpha = 0 \end{cases}$$

اثبات: با استفاده از عملگر مشتق کسری ریمن-لیوویل مرتبه $0 < \alpha < 1$ و با در نظر گرفتن

[16] Global invariants

[17] Erdélyi–Kober fractional derivative

تبدیلات (16) داریم:

$$D_t^{\alpha}u = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \times$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t (t-s)^{-\alpha} s^{-\frac{\alpha+1}{2}} g(x^2 s^{1-\alpha})ds,$$

با استفاده از تغییر متغیر $r = \frac{t}{s}$ بدست می‌آوریم:

$$D_t^{\alpha}u = \frac{\partial}{\partial t}\left[t^{\frac{1-3\alpha}{2}}\left(K_{\frac{1}{\alpha-1}}^{\frac{1-\alpha}{2},1-\alpha} g\right)(y)\right]$$
$$= t^{-\frac{1+3\alpha}{2}}\left[\frac{1-3\alpha}{2} + (1-\alpha)y\frac{d}{dy}\right]$$
$$\times \left(K_{\frac{1}{\alpha-1}}^{\frac{1-\alpha}{2},1-\alpha} g\right)(y)$$
$$= t^{-\frac{1+3\alpha}{2}}(P_{\frac{1}{\alpha-1}}^{\frac{1-3\alpha}{2},\alpha} g)(y),$$

از طرف دیگر، با توجه به تغییر متغیر (16) داریم:

$$(u^2)_x = 4t^{-\frac{1+3\alpha}{2}}\sqrt{y}gg',$$
$$u_{xxt} = t^{-\frac{1+3\alpha}{2}}[(1-3\alpha)g'$$
$$+(8-12\alpha)yg'' + (4-4\alpha)y^2g'''],$$

و این اثبات را کامل می‌کند.

حالت 3: با استفاده از مولد بی‌نهایت کوچک غیرکلاسیک X_3 با جواب ناوردای $u(x,t) = (x+\rho)h(t)$ معادله (9) به معادله دیفرانسیل کسری زیر تبدیل می‌شود:

$$D_t^{\alpha}h(t) + 2\beta h^2(t) = 0,$$

که جوابی از این معادله به صورت زیر است:

$$h(t) = -\frac{\Gamma(1-\alpha)}{2\beta\Gamma(1-2\alpha)}t^{-\alpha},$$

بنابراین جواب ناوردا از معادله (9) به صورت زیر می‌باشد:

$$u(x,t) = -\frac{\Gamma(1-\alpha)}{2\beta\Gamma(1-2\alpha)}(x+\rho)t^{-\alpha}.$$

5- قوانین بقا برای معادله زمان-کسری موج همسان با استفاده ازمولد بی نهایت کوچک

در این بخش با استفاده از مولدهای بی‌نهایت کوچک، قوانین بقا (پایستگی) را برای معادله (9) بیان می‌کنیم:

تعریف5: بردار $C = (C^x, C^t)$ را بردار پایسته[18] برای معادله (9) نامند هرگاه در معادله بقا زیر صدق کند:

$$\mathcal{D}_t(C^t) + \mathcal{D}_x(C^x)|_{\Delta=0} = 0, \qquad (17)$$

که$C^x = C^x(x,t,u,\dots)$ و $C^t = C^t(x,t,u,\dots)$.
معادله (17) را قانون بقا برای معادله (9) گویند.
واضح است که معادله (9) می‌تواند در شکلی از قانون بقا نوشته شود که در آن $C^t = D_t^{\alpha-1}u,$ $C^x = \beta u^2 - \lambda u_{xt}$ روش جدید برای بدست آوردن قانون بقا مطرح شده به وسیله ایبراگیموف[28]، روشی برای ساختن این قوانین برای معادلات دیفرانسیل فراهم می‌کند. با توجه به این قضیه، لاگرانژین برای معادله (9) به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{L} = v(x,t)[D_t^{\alpha}u + \beta(u^2)_x - \lambda u_{xxt}], \quad (18)$$

که $v(x,t)$ متغیر وابسته جدید است. معادله الحاقی از معادله (9) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta u} = 0, \qquad (19)$$

که در آن $\frac{\delta}{\delta u}$ عملگر اویلر-لاگرانژ است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\frac{\delta}{\delta u} = \frac{\partial}{\partial u} + (\mathcal{D}_t^{\alpha})^*\frac{\partial}{\partial(D_t^{\alpha}u)} - \mathcal{D}_x\frac{\partial}{\partial u_x}$$
$$+ \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\mathcal{D}_{i_1}\mathcal{D}_{i_2}\dots\mathcal{D}_{i_k}\frac{\partial}{\partial u_{i_1,i_2,\dots,i_k}},$$

---

[18] Conserved vector

و $(\mathcal{D}_t^\alpha)^*$ عملگر الحاقی از $\mathcal{D}_t^\alpha$ است [29]. این عملگر الحاقی برای مشتق کسری ریمن-لیوویل به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(\mathcal{D}_t^\alpha)^* f(x,t) = \frac{(-1)^n}{\Gamma(n-\alpha)} \times \int_t^T (s-t)^{n-\alpha-1} D_s^n f(x,s) ds,$$
$$n = [\alpha] + 1.$$

با جایگذاری (18) در (19) معادله الحاقی از معادله (9) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$(\mathcal{D}_t^\alpha)^* v - 2\beta u v_x + \lambda v_{xxt} = 0. \qquad (20)$$

از طرف دیگر تساوی اساسی برای بدست آوردن قوانین بقا به صورت زیر است [28-30]:

$$X^{(\alpha,t)} + \mathcal{D}_t(\tau) I + \mathcal{D}_x(\xi) I = W \frac{\delta}{\delta u} + \mathcal{D}_t(N^t) + \mathcal{D}_x(N^x), \qquad (21)$$

که در آن I عملگر همانی است، N^t و N^x عملگرهای نوتر را نمایش می‌دهد و $W = \eta - \xi u_x - \tau u_t$. برای مشتق زمان-کسری ریمن-لیوویل با $n - 1 < \alpha < n$، عملگر نوتر N^t به صورت زیر نوشته می‌شود [29]:

$$N^t = \tau I + \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \mathcal{D}_t^{\alpha-1-k}(W) \mathcal{D}_t^k \left(\frac{\partial}{\partial(D_t^\alpha u)}\right) - (-1)^n J\left(W, \mathcal{D}_t^n \left(\frac{\partial}{\partial(D_t^\alpha u)}\right)\right), \qquad (22)$$

که عملگر انتگرال J به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$J(f,g) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \times \int_0^t \int_t^T (s-\omega)^{n-\alpha-1} f(x,\omega) g(x,s) ds d\omega.$$

همچنین برای معادله (9) عملگر N^x به صورت فرمول زیر نوشته می‌شود:

$$N^x = \xi I + W\left(\frac{\partial}{\partial u_x} + \mathcal{D}_x \mathcal{D}_t \frac{\partial}{\partial u_{xxt}}\right) - \mathcal{D}_x(W) \mathcal{D}_t \frac{\partial}{\partial u_{xxt}} - \mathcal{D}_t(W) \mathcal{D}_x \frac{\partial}{\partial u_{xxt}} + \mathcal{D}_x \mathcal{D}_t(W) \frac{\partial}{\partial u_{xxt}}. \qquad (23)$$

چون برای هر مولد بی‌نهایت کوچک X از معادله (9) و هر جوابی از این معادله داریم:

$$X^{(\alpha,t)} \mathcal{L} + \mathcal{D}_t(\tau)\mathcal{L} + \mathcal{D}_x(\xi)\mathcal{L}|_{\Delta=0} = 0,$$

بنابراین با در نظر گرفتن روابط (19) و (21) قانون بقا برای معادله (9) به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\mathcal{D}_t(N^t \mathcal{L}) + \mathcal{D}_x(N^x \mathcal{L})|_{\Delta=0} = 0, \qquad (24)$$

که مولفه‌های بردار پایسته (17) با توجه به تعاریف (22)، (23) و به ازاء $0 < \alpha < 1$ به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$C^t = N^t \mathcal{L} = \tau_i \mathcal{L} + \mathcal{D}_t^{\alpha-1}(W_i) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(D_t^\alpha u)} + J\left(W_i, \mathcal{D}_t\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(D_t^\alpha u)}\right)\right) = \tau_i \mathcal{L} + \mathcal{D}_t^{\alpha-1}(W_i) v + J(W_i, v_t),$$

و

$$C^x = N^x \mathcal{L} = \xi_i \mathcal{L} + W_i\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_x} + \mathcal{D}_x \mathcal{D}_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xxt}}\right) - \mathcal{D}_x(W_i) \mathcal{D}_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xxt}} - \mathcal{D}_t(W_i) \mathcal{D}_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xxt}} + \mathcal{D}_x \mathcal{D}_t(W_i) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u_{xxt}}$$
$$= \xi_i \mathcal{L} + W_i(2\beta u v - \lambda v_{xt}) + \lambda \mathcal{D}_x(W_i) v_t + \lambda \mathcal{D}_t(W_i) v_x - \lambda \mathcal{D}_x \mathcal{D}_t(W_i) v,$$

که در آن $v(x,t)$ جواب دلخواه غیربدیهی از معادله الحاقی (20) است و ξ_i, τ_i مولفه مولدهای بی‌نهایت کوچک $X_i, i = 1,2,3$ می‌باشد. بنابراین به ازاء هر X_i، مقادیر W_i به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$W_1 = -u_x,$$
$$W_2 = -(\alpha+1)u - (\alpha-1)x u_x - 2t u_t,$$
$$W_3 = u - (x+\rho) u_x.$$

6- مولدهای بی‌نهایت کوچک برای معادله الحاقی (20)

در این بخش نشان می‌دهیم که معادله الحاقی (20) همه مولدهای بی‌نهایت کوچک از معادله (9) را به ارث می‌برد. برای این کار قضیه زیر را بیان می‌کنیم:

قضیه6: معادله الحاقی (20) همه تقارن‌های معادله (9) را به ارث می‌برد، به عبارت دیگر اگر

$$X = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \tau\frac{\partial}{\partial t} + \eta\frac{\partial}{\partial u},$$

مولد بی‌نهایت کوچک از معادله (9) باشد، در این صورت معادله الحاقی (20) دارای مولد تعمیم یافته به متغیر v به صورت

$$Y = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \tau\frac{\partial}{\partial t} + \eta\frac{\partial}{\partial u} + \eta^*\frac{\partial}{\partial v}, \qquad (25)$$

است که در آن $\eta^* = \eta^*(x,t,u,v,u_x,u_t,\dots)$ یک تابع معین می‌باشد.

اثبات: با در نظر گرفتن مولد بی نهایت کوچک X و معادله (9) داریم:

$$X^{(\alpha,t)}(\Delta) = \kappa\Delta,$$

که $\kappa = \kappa(x,t,u,\dots)$.

برای اینکه معادله الحاقی (20) تحت مولد بی‌نهایت کوچک (25) ناوردا باشد باید داشته باشیم[28]:

$$Y^{(\alpha,t)}(\mathcal{L}) + \mathcal{L}\mathcal{D}_x(\xi) + \mathcal{L}\mathcal{D}_t(\tau)|_{\Delta=0} = 0, \quad (26)$$

که در آن $\mathcal{L}$ لاگرانژین معادله (9) به‌صورت (18) است. با اعمال $Y^{(\alpha,t)}$ روی $\mathcal{L}$ و محاسبه (26) داریم:

$$\begin{aligned}&Y^{(\alpha,t)}(\mathcal{L}) + \mathcal{L}\mathcal{D}_x(\xi) + \mathcal{L}\mathcal{D}_t(\tau)\\ &= \Upsilon(v)\Delta + vX^{(\alpha,t)}(\Delta) + v\Delta\mathcal{D}_x(\xi) + v\Delta\mathcal{D}_t(\tau)\\ &= \eta^*\Delta + v\kappa\Delta + v\Delta\mathcal{D}_x(\xi) + v\Delta\mathcal{D}_t(\tau)\\ &= [\eta^* + v\kappa + v\mathcal{D}_x(\xi) + v\mathcal{D}_t(\tau)]\Delta\end{aligned}$$

بنابراین با توجه به (26) بدست می‌آوریم:

$$\eta^* = -[\kappa + \mathcal{D}_x(\xi) + \mathcal{D}_t(\tau)]v.$$

چون (26) ناوردایی معادلات (9) و (20) را تضمین می‌کند پس نتیجه می‌گیریم که معادله الحاقی (20) دارای مولد بی‌نهایت کوچک به صورت زیر است:

$$Y = \xi\frac{\partial}{\partial x} + \tau\frac{\partial}{\partial t} + \eta\frac{\partial}{\partial u} - [\kappa + \mathcal{D}_x(\xi) + \mathcal{D}_t(\tau)]v\frac{\partial}{\partial v}.$$

با استفاده از این قضیه می‌توان مولدهای بی‌نهایت کوچک معادله الحاقی را نوشت:

حالت 1: هرگاه $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$ در این صورت $\kappa = 0$ و مولد بی‌نهایت کوچک از معادله الحاقی به صورت

$$Y_1 = \frac{\partial}{\partial x},$$

خواهد بود. با استفاده از این مولد جواب ناوردا از معادله الحاقی به صورت $v(x,t) = f_*(t)$ است. با جایگذاری این مقدار در معادله الحاقی داریم:

$$(\mathcal{D}_t^{\alpha})^* f_*(t) = 0, \qquad (27)$$

لازم به یادآوری است که در این حالت مقدار تابع $u(x,t)$ به صورت (15) می‌باشد. با حل معادله (27) جواب دقیق ازمعادله الحاقی به‌صورت $v(x,t) = k_2$ بدست می‌آید که k_2 مقدار ثابت دلخواه است.

حالت2: هرگاه

$$X_2 = (\alpha-1)x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} - (\alpha+1)u\frac{\partial}{\partial u}$$

باشد، در این صورت $\kappa = -3\alpha - 1$ و مولد بی‌نهایت کوچک معادله الحاقی به صورت زیر خواهد بود:

$$Y_2 = (\alpha-1)x\frac{\partial}{\partial x} + 2t\frac{\partial}{\partial t} - (\alpha+1)u\frac{\partial}{\partial u} + 2\alpha v\frac{\partial}{\partial v}.$$

با حل سیستم معادلات مشخصه این مولد متغیرهای جدید از این گروه به‌صورت زیر بدست می‌آید:

$$\begin{aligned}&y = x^2 t^{1-\alpha},\\ &u = t^{-\frac{\alpha+1}{2}} g(y), \qquad (28)\\ &v = t^{\alpha} g_*(y).\end{aligned}$$

با استفاده از این تغییر متغیر می‌توان معادله الحاقی (20) را تقلیل داد. بنابراین قضیه زیر را داریم:

قضیه7: با فرض $T = \infty$ و با استفاده از (28) معادله الحاقی (20) به معادله دیفرانسیل معمولی کسری زیر تبدیل می‌شود:

$$\left({}_{*}P_{\frac{1}{\alpha-1}}^{-\alpha-1,\alpha} g_{*} \right)(y) - 4\beta\sqrt{y}gg_{*}' + 2\lambda g_{*}' - \lambda(6\alpha-10)yg_{*}'' - 4\lambda(\alpha-1)y^{2}g_{*}''' = 0,$$

که در آن $({}_{*}P_{\delta}^{\gamma,\alpha}v)(y)$ مشتق کسری اردلی-کوبر برای مشتق کسری کاپوتو است که به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$({}_{*}P_{\delta}^{\gamma,\alpha}g)(y) = \left[K_{-\delta}^{\gamma+\alpha+1,n-\alpha} \prod_{j=0}^{n-1}\left(\gamma+1+j+\frac{1}{\delta}y\frac{d}{dy}\right)g\right](y),$$

$$n = \begin{cases} [\alpha]+1, & \alpha \notin \mathbb{N}, \\ \alpha, & \alpha \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

اثبات: شبیه قضیه4 می‌توان اثبات کرد.

بحث و نتیجه‌گیری

در این مطالعه آنالیز تقارن لی کلاسیک و غیرکلاسیک برای معادلات دیفرانسیل زمان-کسری موج همسان به کار برده شد و مولدهای بی‌نهایت کوچک کلاسیک و غیرکلاسیک برای این معادله بدست آمد. با استفاده از این مولدها، معادله دیفرانسیل کسری با مشتق کسری ریمن-لیوویل به معادلات دیفرانسیل معمولی کسری با مشتق کسری ریمن-لیوویل و یا مشتق کسری اردلی-کوبر تقلیل یافت و برخی از جواب‌های ناوردا از این معادلات بدست آمد. برخی از این معادلات تقلیل‌یافته را می‌توان با استفاده از روش‌های تحلیلی یا عددی دیگر حل کرد. قوانین بقا برای معادله دیفرانسیل کسری و همچنین معادله الحاقی آن بدست آمد و نشان داده شد که با استفاده از مولدهای بی‌نهایت کوچک معادله اصلی می‌توان مولدهای معادله الحاقی معادله اصلی را ساخت و با استفاده از این مولدها معادله الحاقی را تقلیل داد.

فهرست منابع

[1] Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J., *Theory and Application of Fractional Differential Equations*, Elsevier, The Netherlands, (2006)

[2] Diethelm K., *The Analysis of Fractional Differential Equations: An Application-Oriented Exposition Using Differential Operators of Caputo Type*, Springer, Heidelberg, (2010)

[3] Hilfer R., *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific, Singapore, (2000)

[4] Barkari E., Metzler R., Klafter J., From continuous time random walks to the fractional Fokker-Planck equation, *Phys. Rev. E*, **61**: 132-138 (2000)

[5] Yuste S.B., Acedo L., Lindenberg K., Reaction front in an A+BC reaction-subdiffusion process, *Phys. Rev. E*, **69**: 036126 (2004)

[6] Nunno G.D., Oksendal B., *Advenced Mathematical Methods for Finance*, Springer, Berlin (2011)

[7] Hall M.G., Barrick T.R., From diffusion-weighted MRI to anomalous diffusion imaging. *Magn. Reson. Med.*, **59**: 447-455 (2008)

[8] Najafi R., Küçük G.D., Çelik E., Modified iteration method for solving fractional gas dynamics equation, *Math. Meth. Appl. Sci.*, **40**: 939-946 (2017)

[9] Wazwaz A.M., Rach R., Duan J.S., A study on the systems of the Volterra integral forms of the Lane–Emden equations by the Adomian decomposition method, *Math. Meth. Appl. Sci.*, **37**(1):10–19 (2014)

[10] Sakar M.G., Ergören H., Alternative variational iteration method for solving the time-fractional Fornberg–Whitham equation, *Appl. Math. Model.*, **39**(14): 3972–3979 (2015)

[11] Khan Y., Wu Q. Homotopy perturbation transform method for nonlinear equations using He's polynomials, *Comput. Math. Appl.*, **61**:1963–1967 (2011)

[12] El-Ajoua, A., Abu Arquba, O., Momani, S., Approximate analytical solution of the nonlinear fractional KdV–Burgers equation: a new iterative algorithm, J. Comput. Phys. **293**: 81–95 (2015)

[13] Kurulay M., Bayram M., Approximate analytical solution for the fractional modified KdV by differential transform method, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat., **15**:1777–178 (2010)

[14] Morrison P.J., Meiss J.D., Carey J.R., Scattering of RLW solitary waves, Physica 11D 324–336 (1984)

[15] Shi D., Zhang Y., Diversity of exact solutions to the conformable space-time fractional MEW equation, *Appl. Math. Lett.*, **99**: 105994 (2020)

[16] Tariq K.U., Seadawy A.R., Younis M., Rizvi S.T.R, Dispersive traveling wave solutions to the space-time fractional equal-width dynamical equation and its applications, Opt. Quant. Electron., **50**:147 (2018)

[17] Raslan K.R., Ali K.K., Shallal M.A., The modified extended tanh method with the Riccati equation for solving the space-time fractional EW and MEW equations, *Chaos, Soliton. Fract.*, **103**: 404–409 (2017)

[18] Olver P.J., *Applications of Lie groups to differential equations*, Second ed., Springer, New York, (1993)

[19] Bluman, G.W., Cheviakov, A.F., Anco, S.C., *Applications of Symmetry Methods to Partial Differential Equations*, Springer, Berlin (2010)

[20] Grigoriev, Y.N., Ibragimov, N.H., Kovalev, V.F., Meleshko, S.V., *Symmetries of Integro-Differential Equations: With Applications in Mechanics and Plasma Physics*, Springer, Berlin (2010)

[21] Hashemi M.S., Bahrami F., Najafi R., *Lie symmetry analysis of steady-state fractional reaction-convection-diffusion equation*, Optik, **138**: 240-249 (2017)

[22] Qin C.Y., Tian S.F., Wang X.B., Zhang T.T., *Lie symmetry analysis, conservation laws and analytical solutions for a generalized time-fractional modified KdV equation*, Wave. Random Complex., **29**: 456-476 (2019)

[23] Sahoo S., Ray S.S., *The conservation laws with Lie symmetry analysis for time fractional integrable coupled KdV-mKdV system*, Int. J. NonLin. Mech., **98**: 114-121 (2018)

[24] Najafi R., Bahrami F., Hashemi M.S., *Classical and nonclassical Lie symmetry analysis to a class of nonlinear time--fractional differential equations*, Nonlinear Dynam., **87**: 1785-1796 (2017)

[25] Bahrami F., Najafi R., Hashemi M.S., *On the invariant solutions of space/time-fractional diffusion equations*, Indian J. Phys., 91: 1571-1579 (2017)

[26] Najafi R., *Group-invariant solutions for time-fractional Fornberg-Whitham equation by Lie symmetry analysis*, **8**(2): 251-258 (2020)

[27] Noether E., *Invariant variational problems*, Transp. Theory Stat. Phys., **1**:186-207 (1971)

[28] Ibragimov N.H., *A new conservation theorem*, J. Math. Anal. Appl., **333**(1): 311-328 (2007)

[29] Lukashchuk SY., *Conservation laws for time-fractional subdiffusion and diffusion-wave equations*, Nonlinear Dynam., **80**: 791-802 (2015)

[30] Gazizov R.K., Ibragimov N.H., Lukashchuk SY., *Nonlinear self-adjointness, conservation laws and exact solutions of time–fractional Kompaneets equations*. Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat., **23**: 153–163 (2015)