دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هفتم، شماره سی و چهارم، بهمن و اسفند 1400
شماره شاپا: 2588X-588

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

یک نامساوی وارون برای برخی میانگین‌های هندسی تعمیم یافته شامل نگاشت‌های خطی مثبت یکانی

فاطمه خسروی[1]، امیرقاسم غضنفری[2*]

(1) دانشجوی دکتری، گروه ریاضی، دانشگاه لرستان، خرم آباد، ایران

(2) دانشیار، گروه ریاضی، دانشگاه لرستان، خرم آباد، ایران

تاریخ ارسال مقاله: 1399/05/04 تاریخ پذیرش مقاله: 1399/07/07

چکیده

فرض کنید B(H)، *C- جبری از همه عملگرهای خطی کراندار برفضاهای هیلبرت مختلط H باشد. آندو و لی و ماسیا، میانگین هندسی تعمیم یافته‌ای از n عملگر معین مثبت را تعریف کردند.

یک نامساوی وارون برای میانگین هندسی تعمیم یافته‌ای که توسط آندو و لی و ماسیا از n عملگر تعریف شده به قرار زیر بدست می‌آوریم:

فرض کنید $A_1, \dots, A_n$ عملگرهای معین مثبت در B(H) باشند و Φ نگاشت خطی مثبت یکانی بر B(H) و $r(A)$ شعاع طیفی از A باشد، آنگاه $\emptyset(G(A_1, \dots, A_n)) \geq \left(\frac{2h}{1+h^2}\right)^{n-1} G(\emptyset(A_1), \dots, \emptyset(A_n))$ که $R(A_i, A_j) = \max\{r(A_i^{-1}A_j), r(A_j^{-1}A_i)\}$ و $h = \min_{i,j} R(A_i, A_j)$ است.

میانگین کارچرکه میانگین ریمان هم نامیده می‌شود، اخیرا در موارد متنوعی از آن استفاده شده است مانند: انتشار تانسوری در تصویربرداری پزشکی و راداری، ماتریس‌های کوواریانس در آمار، هسته‌هایی در ماشین یادگیری و انعطاف پذیری. همچنین یک نامساوی وارون را برای میانگین توانی وزن‌دار از n عملگر معین مثبت شامل نگاشت‌های خطی مثبت یکانی بدست می‌آوریم.

واژه‌ی کلیدی: نگاشت خطی مثبت، میانگین هندسی، میانگین توانی، شعاع طیفی.

* عهده‌دار مکاتبات: Email: ghazanfari.amir@gmail.com

1- مقدمه

فرض کنید B(H) مجموعه‌ای از همه عملگرهای خطی کراندار بر فضای هیلبرت مختلط H باشد. عملگر $A \in B(H)$ را معین مثبت (نیمه معین مثبت) نامند اگر $\langle Ax,x\rangle > 0$ (به همین ترتیب $\langle Ax,x\rangle \geq 0$) برای هر $x \in H$ غیر صفر برقرار باشد.

اگر A نیمه معین مثبت باشد آن را با $A \geq 0$ نمایش می‌دهیم. فرض کنید $P, PS \subset B(H)$ به ترتیب مجموعه‌ای از همه عملگرهای نیمه معین مثبت و عملگرهای معین مثبت باشند.

برای بدست آوردن نامساوی‌ها برای علمگرهای خودالحاق کراندار بر فضای هیلبرت، ما از ویژگی یکنواختی عملگری زیر برای تابع‌های عملگری استفاده خواهیم کرد:

اگر $X \in B(H)$ خودالحاق و با طیف Sp(X) باشد و f,g تابع‌های پیوسته حقیقی مقدار بر بازه شامل Sp(X) باشند، آنگاه

$$f(t) \geq g(t), t \in Sp(X) \Rightarrow f(X) \geq g(X). \qquad (1.1)$$

برای جزئیات بیشتر در مورد این ویژگی، پژوهشگر به [1] ارجاع داده می‌شود.

برای $A, B \in P$ میانگین هندسی $A \# B$ از A,B با $A \# B = A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{-1}{2}}BA^{\frac{-1}{2}})^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}}$ تعریف می‌شود.

میانگین‌های همساز (هارمونیک) و حسابی از n عملگر را به آسانی می‌توان تعریف کرد. اما در مورد میانگین هندسی مشکلات زیادی وجود دارد زیرا حاصلضرب عملگرها غیر جابجایی است. بنابراین میانگین‌های هندسی مختلفی از n عملگر تعریف شده است که برخی از ویژگی‌های مهم به عنوان مثال یکنواختی و پایایی نسبت به جایگشت را نداشتند.

تعدادی از ریاضیدانان علاقمند به تعمیم میانگین هندسی $A \# B$ از دو عملگر به n عملگر بودند. آندوء و لی و ماسیا یک تعریف مناسب از میانگین هندسی برای تعدادی از ماتریس‌های نیمه معین مثبت توسعه دادندکه با یک روش متقارن تعریف شد و برخی از ویژگی‌های مناسب را داشت.[2]

آنها ده ویژگی که میانگین هندسی از m ماتریس باید داشته باشد را فهرست کردند و نشان دادند که میانگین آنها همه ده ویژگی را دارا است.

لاوسن و لیم نشان دادند که میانگین هندسی تعمیم یافته G همه ده ویژگی را دارد.[3]

ایده‌های دیگری از میانگین هندسی با همه ویژگی‌ها پیشنهاد داده شد.[6,5,4]

یامازاکی تعریف آندو و لی و ماسیا از میانگین هندسی را بر عملگرهای فضای هیلبرت توسعه داد.[7]

برای $A, B \in P$ فرض کنید

$$R(A,B) = \max\{r(A^{-1}B), r(B^{-1}A)\}$$

که $r(A)$ شعاع طیفی A است و

$$r(B^{-1}A) = \inf\{\lambda > 0 : A \leq \lambda B\} = ||B^{\frac{-1}{2}}AB^{\frac{-1}{2}}||$$

که $R(A,B)$ تعریف شده است و برخی از ویژگی‌های $R(A,B)$ در زیر نشان داده شده است.[8]

i) $R(A,C) \leq R(A,B)R(B,C)$ (نامساوی مثلثی)

ii) $R(A,B) \geq 1\,,\ \ R(A,B) = 1 \Leftrightarrow A = B$

iii) $||A - B|| \leq (R(A,B) - 1)||A||$

متر تامسون d(A,B) بر مخروط محدب Ω از عملگرهای معین مثبت تعریف می‌شود با:

$$d(A,B) = \log R(A,B) = \max\{\log r(A^{-1}B), \log r(B^{-1}A)\}.$$

ببینید. [10,9,8] می‌دانیم Ω نسبت به این متریک فضای متریک کامل است و توپولوژی متناظر با این متریک بر Ω با توپولوژی نرم نسبی سازگار است.

به عنوان یک نامساوی اساسی در رابطه با این متریک، نامساوی زیر برای میانگین هندسی وزن‌دار از دو عملگر برقرار است.[9,8]

$$d(A_1 \#_\vartheta A_2, B_1 \#_\vartheta B_2) \leq (1-\vartheta)d(A_1,B_1) + \vartheta d(A_2,B_2).$$

برای $A_2, B_1, B_2 \in \Omega$ و A_1 و $\vartheta \in (0,1)$.
میانگین هندسی $G(A_1, \dots, A_n)$ از n عملگر معین مثبت $\mathbb{A} = (A_1, \dots, A_n) \in P^n$ با استقرا تعریف می‌شود.
i) $G(A_1, A_2) = A_1 \# A_2$
ii) فرض کنید میانگین هندسی برای (n-1) عملگری تعریف شده باشد و

$$G\left(\left(A_j\right)_{j\neq i}\right) = G(A_1, A_2, \dots, A_{i-1}, A_{i+1}, \dots, A_n).$$

و دنباله $\left\{\mathbb{A}_i^{(r)}\right\}_{r=1}^{\infty}$ را به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم.

$$\mathbb{A}_i^{(1)} = A_i, \qquad \mathbb{A}_i^{(r+1)} = G\left(\left(\mathbb{A}_j^{(r)}\right)_{j\neq i}\right).$$

اگر حد $\lim_{r\to\infty} \mathbb{A}_i^{(r)}$ وجود داشته باشد و به i وابسته نباشد، میانگین هندسی از n عملگر تعریف می‌شود با:

$$\lim_{r\to\infty} \mathbb{A}_i^{(r)} = G\big((\mathbb{A})\big) = G(A_1, \dots, A_n) \quad (1.2)$$

برای $i = 1,2, \dots, n$
آندو و همکاران وجود این حد و همگرایی یکنواخت (1.2) رادر [2] نشان دادند. بعلاوه برای

$$\mathbb{A} = (A_1, \dots, A_n), \mathbb{B} = (B_1, \dots, B_n) \in P^n$$

نامساوی مهم زیر برقرار است

$$R\big(G(\mathbb{A}), G(\mathbb{B})\big) \le \left(\prod_{i=1}^{n} R(A_i, B_i)\right)^{\frac{1}{n}} \quad (1.3)$$

بویژه

$$R\left(\mathbb{A}_i^{(2)}, \mathbb{A}_k^{(2)}\right) = R\left(G\left(\left(A_j\right)_{j\neq i}\right), G\left(\left(A_j\right)_{j\neq k}\right)\right) \le R(A_i, A_k)^{\frac{1}{n-1}} \quad (1.4)$$

یامازاکی وارونی از نامساوی میانگین هندسی - حسابی از n عملگر با ثابت کانترویچ رادر [7] بدست آورد.

بلافاصله فوجی و همکاران نامساوی وارون قوی‌تری از میانگین‌های هندسی و حسابی وزن‌دار به واسطه لاوسن و لیم برای n عملگر با نامساوی کانترویچ در [11] ثابت کردند.
در این مقاله ما برخی از نامساوی وارون‌ها را برای نگاشت‌های خطی مثبت بر میانگین هندسی و میانگین توانی وزن‌دار برای n عملگرمعین مثبت با ثابت کانترویچ بدست می‌آوریم.

۱- نتایج

۱-۲- نامساوی مکمل برای میانگین هندسی وزن‌دار

فرض کنید Φ نگاشت خطی مثبت یکانی بر B(H) باشد. آندو در [12] ویژگی زیر را از نگاشت خطی مثبت در ارتباط با میانگین هندسی عملگری نشان داد:

$$\Phi(A \# B) \le \Phi(A) \# \Phi(B). \quad (2.1)$$

نامساوی (2.1)، در قضیه آندو-کوبو به میانگین عملگری σ در زیرگسترش داده شد:

$$\Phi(A\sigma B) \le \Phi(A)\sigma\Phi(B).$$

بویژه برای میانگین هندسی وزن‌دار داریم:

$$\Phi(A \#_{\vartheta} B) \le \Phi(A) \#_{\vartheta} \Phi(B) \quad (2.2)$$

که ϑ عدد حقیقی در [0,1) است.
یک نامساوی مکمل برای نامساوی (2.2)، نامساوی مهم زیر است[13]:
فرض کنید A,B دو عملگر معین مثبت بر فضای هیلبرت H باشند طوری که
$0 < m_2 I \le B \le M_2 I, 0 < m_1 I \le A \le M_1 I$
$0 < \vartheta \le 1$ باشند ، آنگاه

$$K(h, \vartheta)\Phi(A) \#_{\vartheta} \Phi(B) \le \Phi(A \#_{\vartheta} B) \quad (2.3)$$

که $h = \frac{M_1M_2}{m_1m_2}$ و $K(h,\vartheta)$ ثابت کانترویچ تعمیم یافته است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$K(h,\vartheta) = \frac{h^{\vartheta}-h}{(\vartheta-1)(h-1)}\left(\frac{(\vartheta-1)(h^{\vartheta}-1)}{\vartheta(h^{\vartheta}-h)}\right)^{\vartheta}.$$

ثابت کانترویچ تعمیم یافته $K(h,\vartheta)$ ویژگی‌های زیر را دارد:

$$K(h,\vartheta) = K(h,1-\vartheta) \quad ,0 < K(h,\vartheta) \le 1$$

$K(h,\vartheta)$ برای $\vartheta \le \frac{1}{2}$ کاهشی(نزولی)و برای $\vartheta > \frac{1}{2}$ افزایشی (صعودی) است. بنابراین برای همه $0 < \vartheta \le 1$،

$$K(h) = K\left(h,\frac{1}{2}\right) = \frac{2h^{\frac{1}{4}}}{1+h^{\frac{1}{2}}} \le K(h,\vartheta).$$

ابتدا نامساوی (2.3) را نسبت به $R(A,B)$ بیان می‌کنیم.

قضیه 1: فرض کنید A,B دو عملگر معین مثبت در P باشند. در این صورت:

$$K(R(A,B)^4,\vartheta)\,\Phi(A)\ \sharp_{\vartheta}\ \Phi(B) \le \Phi(A\ \sharp_{\vartheta}\ B). \qquad (2.4)$$

اثبات: می‌دانیم که

$$\frac{1}{R(A,B)}A \le B \le R(A,B)A. \qquad (2.5)$$

نگاشت خطیΨبر H به صورت زیر تعریف کنید:

$$\Psi(X) = \Phi(A)^{\frac{-1}{2}}(\Phi(A^{\frac{1}{2}}XA^{\frac{1}{2}})\Phi(A)^{\frac{-1}{2}}.$$

آنگاه Ψ نگاشت خطی مثبت یکانی است. از (2.5) داریم:

$$m_1 = \frac{1}{R(A,B)} \le A^{\frac{-1}{2}}BA^{\frac{-1}{2}} \le R(A,B) = M_1. \qquad (2.6)$$

بوضوح

$$m_2 = \frac{1}{R(A,B)} \le I \le R(A,B) = M_2. \qquad (2.7)$$

با استفاده از (2.3) برای Ψ و (2.6) و (2.7) بدست می‌آوریم:

$$K(h,\vartheta)\Psi(I)\ \sharp_{\vartheta}\ \Psi(X) \le \Psi(I\ \sharp_{\vartheta}\ X) \qquad (2.8)$$

که $X = A^{\frac{-1}{2}}BA^{\frac{-1}{2}}$ و $h = \frac{M_1M_2}{m_1m_2} = R^4(A,B)$.
از نامساوی (2.8) داریم

$$K(h,\vartheta)\Psi(X)^{\vartheta} \le \Psi(X^{\vartheta})$$

یا

$$K(h,\vartheta)((\Phi(A)^{\frac{-1}{2}}\Phi(B)\Phi(A)^{\frac{-1}{2}})^{\vartheta} \le \Phi(A)^{\frac{-1}{2}}\Phi(A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{-1}{2}}BA^{\frac{-1}{2}})^{\vartheta}A^{\frac{1}{2}})\Phi(A)^{\frac{-1}{2}}$$

$$K(h,\vartheta)\Phi(A)^{\frac{1}{2}}\left((\Phi(A)^{\frac{-1}{2}}\Phi(B)\Phi(A)^{\frac{-1}{2}}\right)^{\vartheta}\Phi(A)^{\frac{1}{2}} \le \Phi(A^{\frac{1}{2}}(A^{\frac{-1}{2}}BA^{\frac{-1}{2}})^{\vartheta}A^{\frac{1}{2}}).$$

درنتیجه نامساوی موردنظر (2.4) حاصل می‌شود.
بنابراین از نامساوی (2.3) با $\vartheta = \frac{1}{2}$، نتیجه زیر بدست می‌آید.

فرع 1: فرض کنید A,B دو عملگر معین مثبت در P باشند، در این صورت:

$$\frac{2R(A,B)}{1+R(A,B)^2}\Phi(A)\ \sharp\ \Phi(B) \le \Phi(A\ \sharp\ B). \qquad (2.9)$$

در [13] نشان داده شده است که اگر
$0 < m_2I \le B \le M_2I$,$0 < m_1I \le A \le M_1I$

آنگاه

$$\frac{2\sqrt[4]{m_1m_2M_1M_2}}{\sqrt{m_1m_2}+\sqrt{M_1M_2}}\Phi(A)\ \sharp\ \Phi(B) \le \Phi(A\ \sharp\ B). \qquad (2.10)$$

در مثال‌های زیر ارتباط بین ضرایب نامعادله (2.9) و (2.10) را بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که گاهی ضریب موجود در نامعادله (2.10) مناسب‌تر از ضریب موجود در (2.9) است و برعکس. بنابراین بطور کلی نامعادله (2.9) و (2.10) نسبت به هم برتری خاصی ندارند.

مثال 1: ماتریس‌های A_1, A_2 را به صورت زیر در نظر می‌گیریم،

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

به آسانی مشاهده می‌شود که

$$\frac{1}{3}I \le A_1 \le 2I \quad , \quad \frac{1}{2}I \le A_2 \le 4I.$$

همچنین خواهیم داشت

$$A_1^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \; A_2^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A_1^{-1}A_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

به سادگی نتیجه می‌شود

$$r(A_1^{-1}A_2) = 2$$

و برای $A_2^{-1}A_1$ نیز داریم:

$$A_2^{-1}A_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow r(A_2^{-1}A_1) = \frac{2}{3}$$

بنابراین

$$R(A_1, A_2) = \max\{r(A_1^{-1}A_2), r(A_2^{-1}A_1)\} = 2$$

و

$$R(A_1, A_2)^4 = 16 \le h = \frac{M_1M_2}{m_1m_2}$$
$$= \frac{2\times 4}{\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}} = 48$$
$$\Rightarrow K\left(R(A_1, A_2)^4, \frac{1}{2}\right) = \frac{2\sqrt[4]{16}}{1+\sqrt{16}} = \frac{4}{5}$$

از طرفی

$$K\left(h\,,\frac{1}{2}\right) = K(48, \frac{1}{2}) = \frac{2\sqrt[4]{48}}{1+\sqrt{48}}$$

در نتیجه نامساوی زیر برقرار است:

$$K\left(R(A_1, A_2)^4, \frac{1}{2}\right) \ge K\left(h\,,\frac{1}{2}\right)$$

مثال2: ماتریس‌های A_1, A_2 را به صورت زیر در نظر می‌گیریم،

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

به آسانی مشاهده می‌شود که

$$1I \le A_2 \le 2I \quad , \frac{3-\sqrt{5}}{2}I \le A_1 \le \frac{3+\sqrt{5}}{2}I.$$

همچنین خواهیم داشت

$$A_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \; A_2^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$$A_1^{-1}A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_2^{-1}A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

مقادیر ویژه $A_1^{-1}A_2$ عبارت است از

$$\lambda = \frac{5\pm\sqrt{17}}{2}$$

و مقادیر ویژه $A_2^{-1}A_1$ عبارت است از

$$\lambda = \frac{5\pm\sqrt{17}}{4}$$

به سادگی نتیجه می‌شود

$$R(A_1, A_2) = \frac{5+\sqrt{17}}{2}$$

ازطرفی

$$h = \frac{M_1M_2}{m_1m_2} = \frac{3+\sqrt{5}}{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = 2 \times \frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}} = \frac{(3+\sqrt{5})^2}{2}$$

بنابراین

$$R(A_1, A_2)^4 = \left(\frac{5+\sqrt{17}}{2}\right)^4 \ge \frac{(3+\sqrt{5})^2}{2}$$
$$R(A_1, A_2)^4 \ge \frac{M_1M_2}{m_1m_2} = h$$

در نتیجه نامساوی زیر برقرار است:

$$K\left(R(A_1, A_2)^4, \frac{1}{2}\right) \le K\left(h\,,\frac{1}{2}\right)$$

2-2- میانگین هندسی مربوط به آندو، لی و ماسیا

فرض کنید $\mathbb{A} = (A_1, \dots, A_n) \in \mathrm{P}^n$ و Φ نگاشت خطی مثبت یکانی بر B(H) باشد. آنگاه $\Phi(A_1), \dots, \Phi(A_n)$، n عملگر معین مثبت در P هستند. ما میانگین هندسی $G(\Phi(\mathbb{A}))$ در نظر می‌گیریم که $\Phi(\mathrm{A}) = (\Phi(A_1), \dots, \Phi(A_n))$، به شرح زیر است: برای i=1,…,n

$$\Phi^{(1)}(\mathbb{A}_i) = \Phi(\mathbb{A}_i).$$

و برای $r \geq 1, i = 1, \dots, n$

$$\Phi^{(r+1)}(\mathbb{A}_i) = G\left(\left(\Phi^{(r)}(\mathbb{A}_i)\right)_{j \neq i}\right) = G\left(\Phi^{(r)}(\mathbb{A}_1), \dots, \Phi^{(r)}(\mathbb{A}_{i-1}), \Phi^{(r)}(\mathbb{A}_{i+1}), \dots, \Phi^{(r)}(\mathbb{A}_n)\right).$$

در نتیجه

$$G(\Phi(\mathbb{A})) = G\left(\left(\Phi(A_1), \dots, \Phi(A_n)\right)\right) = \lim_{r \to \infty} \Phi^{(r)}(\mathbb{A}_i)$$

قضیه2: فرض کنید $n \geq 2$ عدد صحیح مثبت باشد و $(A_1, \dots, A_n) \in \mathrm{P}^n$ و $\mathrm{h} = \min_{\mathrm{i,j}} \mathrm{R}(\mathrm{A_i}, \mathrm{A_j})$ باشند. در این صورت:

$$\Phi(G(\mathbb{A})) \geq \left(\frac{2h_1}{1+{h_1}^2}\right)^{n-1} G(\Phi(\mathbb{A})) \quad (2.10)$$

اثبات: ابتدا برای $r \geq 1$ ما $\mathrm{h_r} = \min_{\mathrm{i,j}} \mathrm{R}(\mathrm{A_i}^{(r)}, \mathrm{A_j}^{(r)})$ و $\mathrm{K_r} = \mathrm{K}(\mathrm{h_r})$ قرار می‌دهیم. با رابطه (1.4) داریم:

$$1 \leq h_r \leq {h_{r-1}}^{\frac{1}{n-1}} \leq \dots \leq {h_1}^{\left(\frac{1}{n-1}\right)^r}.$$

چون تابع $f(\mathrm{t}) = \mathrm{t}^{\alpha}$ برای $0 < \alpha \leq 1$ مقعر است برقرار می‌کند که

$$\frac{1+t^{2\alpha}}{2} \leq \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^{\alpha}.$$

یا

$$\frac{2t^{\alpha}}{1+t^{2\alpha}} \geq \left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^{\alpha}.$$

چون تابع $K(\mathrm{t}) = \frac{2\mathrm{t}}{1+\mathrm{t}^2}$، تابع کاهشی (نزولی) است. بنابراین،

$$K_r = \frac{2h_r}{1+{h_r}^2} \geq \frac{2{h_1}^{\left(\frac{1}{n-1}\right)^r}}{1+{h_1}^{2\left(\frac{1}{n-1}\right)^r}} \geq \left(\frac{2h_1}{1+{h_1}^2}\right)^{\left(\frac{1}{n-1}\right)^r} = \mathrm{K_1}^{\left(\frac{1}{n-1}\right)^r}. \quad (2.11)$$

اکنون ما نامساوی (2.10) را با استقرا روی n ثابت می‌کنیم. برای حالت n = 2 با استفاده از فرع 1 داریم:

$$\Phi(\mathrm{A_1} \# \mathrm{A_2}) \geq \mathrm{K_1}\left(\Phi(\mathrm{A_1}) \# \Phi(\mathrm{A_2})\right).$$

برای حالت $n = 3$ یک محاسبه ساده نشان می‌دهد که

$$\begin{aligned}
&\Phi(G(A_1 \# A_3, A_1 \# A_2)) \\
&= \Phi((A_1 \# A_3) \# (A_1 \# A_2)) \\
&\geq \mathrm{K_2}[\Phi(A_1 \# A_3) \# \Phi(A_1 \# A_2)] \\
&\geq \mathrm{K_2}\left[\mathrm{K_1}\left(\Phi(A_1) \# \Phi(A_3)\right) \# \mathrm{K_1}\left(\Phi(A_1) \# \Phi(A_2)\right)\right] \\
&= \mathrm{K_2}\mathrm{K_1}\left[\left(\Phi(A_1) \# \Phi(A_3)\right) \# \left(\Phi(A_1) \# \Phi(A_2)\right)\right] \\
&= \mathrm{K_2}\mathrm{K_1} G\left(\Phi(A_1) \# \Phi(A_3), \Phi(A_1) \# \Phi(A_2)\right).
\end{aligned}$$

پس

$$\Phi\left({A_1}^{(3)}\right) \geq \mathrm{K_2}\mathrm{K_1}\Phi^{(3)}(A_1).$$

بنابراین

$$\Phi\left({A_i}^{(r)}\right) \geq (\mathrm{K_{r-1}}\mathrm{K_{r-2}} \dots \mathrm{K_1})\Phi^{(r)}(A_i).$$

برای i=1,2,3.

فرض کنید قضیه2 برای n-1 برقرار باشد ما حالت n را اثبات می‌کنیم. از فرض استقرا داریم:

$$\begin{aligned}
\Phi\left({A_i}^{(r)}\right) &= \Phi\left(G\left(\left({A_j}^{(r-1)}\right)_{j \neq i}\right)\right) \\
&= \Phi\left(G\left({A_1}^{(r-1)}, {A_2}^{(r-1)}, \dots, {A_{i+1}}^{(r-1)}, \dots, {A_n}^{(r-1)}\right)\right) \\
&\geq K_{r-1}^{n-2} G\left(\Phi\left({A_1}^{(r-1)}\right), \dots, \Phi\left({A_{i+1}}^{(r-1)}\right), \dots, \Phi\left({A_n}^{(r-1)}\right)\right) \\
&\geq K_{r-1}^{n-2} G\begin{pmatrix} K_{r-2}^{n-2}\Phi\left({A_1}^{(r-1)}\right), \dots, K_{r-2}^{n-2}\Phi\left({A_{i+1}}^{(r-1)}\right), \dots, \\ K_{r-2}^{n-2}\Phi\left({A_n}^{(r-1)}\right) \end{pmatrix} \geq
\end{aligned}$$

$$K_{r-1}^{n-2}K_{r-2}^{n-2}G\begin{pmatrix}\Phi\left(A_1{}^{(r-1)}\right),\dots,\Phi\left(A_{i+1}{}^{(r-1)}\right),\dots,\\ \Phi\left(A_n{}^{(r-1)}\right)\end{pmatrix}=$$
$$K_{r-1}^{n-2}K_{r-2}^{n-2}G\left(\Phi\left(G\left(A_1{}^{(r-2)}\right)\right),\dots,\Phi\left(G\left(A_{i+1}{}^{(r-2)}\right)\right),\dots,\Phi\left(G\left(A_n{}^{(r-2)}\right)\right)\right)$$
$$\vdots$$
$$\geq$$
$$(\mathrm{K}_{r-1}\mathrm{K}_{r-2}\dots\mathrm{K}_1)^{n-2}G\begin{pmatrix}\Phi(A_1),\dots,\Phi(A_{i+1}),\\ \dots,\Phi(A_n)\end{pmatrix}=$$
$$(\mathrm{K}_{r-1}\mathrm{K}_{r-2}\dots\mathrm{K}_1)^{n-2}G\left(\Phi\left(A_j\right)_{j\neq i}\right).$$

بنابراین برای عدد صحیح مثبت $i=1,\dots,n$ داریم:

$$\Phi\left(A_i{}^{(r)}\right)\geq (\mathrm{K}_{r-1}\mathrm{K}_{r-2}\dots\mathrm{K}_1)^{n-2}G\left(\Phi\left(A_j\right)_{j\neq i}\right) \tag{2.12}$$

با استفاده از رابطه (2.11) داریم:

$$\mathrm{K}_{r-1}\mathrm{K}_{r-2}\dots\mathrm{K}_1\geq \mathrm{K}_1\mathrm{K}_1{}^{\frac{1}{n-1}}\dots\mathrm{K}_1{}^{\left(\frac{1}{n-1}\right)^{r-1}} = \mathrm{K}_1{}^{1+\frac{1}{n-1}+\dots+\left(\frac{1}{n-1}\right)^{r-1}}.$$

در نتیجه

$$\lim_{r\to\infty}\inf \mathrm{K}_{r-1}\mathrm{K}_{r-2}\dots\mathrm{K}_1\geq \mathrm{K}_1{}^{\frac{n-1}{n-2}} \tag{2.13}$$

از آنجا که $\mathrm{K}_1{}^{1+\frac{1}{n-1}+\dots+\left(\frac{1}{n-1}\right)^{r-1}}\to \mathrm{K}_1{}^{\frac{n-1}{n-2}}$، می‌دانیم

$$\lim_{r\to\infty}\Phi\left(A_i{}^{(r)}\right)=\Phi\left(\lim_{r\to\infty}A_i{}^{(r)}\right)=\Phi(G(A_1,A_2,\dots,A_n)). \tag{2.14}$$

و

$$\lim_{r\to\infty}\Phi^{(r)}(A_i)=G\left(\Phi(A_1),\Phi(A_2),\dots,\Phi(A_n)\right) \tag{2.15}$$

از نامساوی‌های (2.12) و (2.13) و(2.14) و (2.15)، نامساوی (2.10) بدست می‌آید.

فرع2. فرض کنید $n\geq 2$ عدد صحیح مثبت باشد و $(A_1,\dots,A_n)\in \mathrm{P}^n$ باشد. همچنین فرض کنید $0<m\mathrm{I}\leq A_i\leq M\mathrm{I}$ برای $i=1,\dots,n$، آنگاه $0<m<M$ و

$$K^{n-1}\left(\prod_{j=1}^n\langle A_j\,x,x\rangle\right)^{\frac{1}{n}}\leq \langle G(A_1,A_2,\dots,A_n)x,x\rangle\leq \left(\prod_{j=1}^n\langle A_j\,x,x\rangle\right)^{\frac{1}{n}} \tag{2.16}$$

که $K=\frac{2\sqrt{mM}}{m+M}$.

اثبات: فرض کنید $(A_1,\dots,A_n)\in \mathrm{P}^n$ باشد. با برهان مشابه در حالت دو متغیره، به آسانی می‌توان نشان داد که نامساوی زیر برقرار است

$$\Phi(G(A_1,A_2,\dots,A_n))\leq G(\Phi(A_1),\Phi(A_2),\dots,\Phi(A_n)) \tag{2.17}$$

با بکار بردن رابطه‌های (2.10) و (2.17) برای تابعک خطی مثبت $\Phi(A)=\langle Ax,x\rangle$ که x بردار واحد در H باشد، نامساوی (2.16) بدست می‌آید.

از نامساوی‌های (2.10) برای $\Phi(A)=\langle Ax,x\rangle$ و همچنین عملگرهای خطی مثبت

$$\parallel A\parallel = sup\{\langle Ax,x\rangle : \parallel x\parallel\leq 1\}$$

نتیجه زیر بدست می‌آید:

فرع3. فرض کنید $n\geq 2$ عدد صحیح مثبت باشد و $(A_1,\dots,A_n)\in \mathrm{P}^n$ باشد و فرض کنید $0<m\mathrm{I}\leq A_i\leq M\mathrm{I}$ برای $i=1,\dots,n$، در این صورت $0<m<M$ و

$$K^{n-1}\prod_{j=1}^n\parallel A_j\parallel^{\frac{1}{n}}\leq\parallel G(A_1,A_2,\dots,A_n)\parallel\leq \prod_{j=1}^n\parallel A_j\parallel^{\frac{1}{n}} \tag{2.18}$$

که $K=\frac{2\sqrt{mM}}{m+M}$.

3-2- میانگین‌های کارچر و میانگین‌های توانی

میانگین کارچرکه میانگین ریمان هم نامیده می‌شود، مدت‌هاست که در زمینه هندسه دیفرانسیل مورد توجه قرار گرفته است.

اخیرا از آن در موارد متنوعی استفاده شده است مانند: انتشار تانسوری در تصویربرداری پزشکی و راداری،

ماتریس‌های کوواریانس در آمار، هسته‌هایی در ماشین یادگیری و انعطاف‌پذیری.

میانگین توانی برای عملگرها و ماتریس‌های معین مثبت در [14,15] معرفی شده‌اند. میانگین کارچر و میانگین توانی در تمامی ده ویژگی فهرست شده، صدق می‌کنند. در [16,3,2] نشان داده شد که میانگین‌های توانی و میانگین کارچر اخیرا ابزار مهمی برای مطالعه عملگرهای معین مثبت و موضوع جالب برای آنالیز ماتریسی و نظریه عملگرها هستند. پژوهشگر را برای اطلاعات بیشتر به [20,19,18,17,15,14,3] ارجاع می‌دهیم.

میانگین‌های توانی و هندسی برای دو عملگر را می‌توان برای بیشتر از سه عملگر، با حل معادله‌های عملگری زیر توسعه داد.

فرض کنید n عدد طبیعی و Δ_n مجموعه‌ای از همه بردارهای احتمال باشد به‌عبارتی

$$\Delta_n = \{w = (w_1, \dots, w_n) \in (0,1)^n : \sum_{i=1}^{n} w_i = 1\}.$$

فرض کنید $\mathbb{A} = (A_1, \dots, A_n) \in P^n$ و $w = (w_1, \dots, w_n) \in \Delta_n$ باشد. در این صورت میانگین کارچر وزن‌دار $\Lambda(w;\mathbb{A})$، باجواب مثبت یکتا از معادله عملگری زیر است، تعریف می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \log(X^{\frac{-1}{2}} A_i X^{\frac{-1}{2}}) = 0.$$

فرض کنید $t \in [-1,1]$، میانگین توانی وزن‌دار $P_t(w;\mathbb{A})$ با جواب مثبت یکتا از معادله عملگری زیر تعریف می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{n} w_i (X^{\frac{-1}{2}} A_i X^{\frac{-1}{2}})^t = I.$$

رابطه بین میانگین‌های کارچر وزن‌دار و میانگین‌های توانی وزن‌دار، $\Lambda(w;\mathbb{A}) = \lim_{t\to 0} P_t(w;\mathbb{A})$ با توپولوژی عملگری- قوی در [14] یادآوری می‌شود.

فرض کنید Φ نگاشت خطی مثبت یکانی بر $B(H)$ باشد در [15] ثابت شد اگر $t \in (0,1]$ باشد در این صورت

$$\Phi(P_t(w;\mathbb{A})) \leq P_t(w;\Phi(\mathbb{A})) \qquad (2.19)$$

در قضیه زیر وارون این نامساوی را بدست می‌آوریم.

قضیه3. فرض کنید Φ نگاشت خطی مثبت یکانی بر $B(H)$ باشد و $n \geq 2$ عدد صحیح مثبت باشد. اگر $0 < t \leq 1$ و $(A_1, \dots, A_n) \in P^n$ باشد، در این صورت

$$\Phi(P_t(w;\mathbb{A})) \geq K_0^{\frac{1}{t}} P_t(w;\Phi(\mathbb{A})) \qquad (2.20)$$

که $h_0 = \min_{1\leq i\leq n} R(P_t(w;\mathbb{A}), A_i)$.

اثبات: فرض کنید $t \in (0,1]$ و $X_t = P_t(w;\mathbb{A})$ باشد، در این صورت

$$X_t = \sum_{i=1}^{n} w_i (X_t \#_t A_i).$$

تابع f را به‌صورت $f(X) = \sum_{i=1}^{n} w_i (X \#_t \Phi(A_i))$ تعریف کنید. در این صورت $\lim_{n\to\infty} f^n(X) = P_t(w;\mathbb{A})$ برای $X > 0$.

فرض کنید Φ نگاشت خطی مثبت یکانی بر $B(H)$ باشد. در این صورت

$$\Phi(X_t) = \sum_{i=1}^{n} w_i \Phi(X_t \#_t A_i) \geq \sum_{i=1}^{n} w_i K(h_0,t)(\Phi(X_t) \#_t \Phi(A_i)) = K(h_0,t) f(\Phi(X_t)).$$

قرار دهید $\vartheta = 1 - t$. چون f تابع افزایشی (صعودی) است،

$$f(K(h_0,t)^{-1}\Phi(X_t)) = \sum_{i=1}^{n} w_i (K(h_0,t)^{-1}\Phi(X_t) \#_t \Phi(A_i)) = K(h_0,t)^{-\vartheta} \sum_{i=1}^{n} w_i (\Phi(X_t) \#_t \Phi(A_i)) = K(h_0,t)^{-\vartheta} f(\Phi(X_t)) \geq f^2(\Phi(X_t)).$$

بنابراین

$$\Phi(X_t) \geq K(h_0,t) f(\Phi(X_t)) \geq K(h_0,t)^{1+\vartheta} f^2(\Phi(X_t)).$$

در نتیجه

$$\Phi(X_t) \geq K(h_0,t)f\big(\Phi(X_t)\big) \geq K(h_0,t)^{1+\vartheta+\vartheta^2+\cdots+\vartheta^{n-1}}f^n\big(\Phi(X_t)\big).$$

این برقرار می‌کند،

$$\Phi\big(P_t(w;\mathbb{A})\big) = \Phi(X_t) \geq K_0^{\frac{1}{1-\vartheta}} \lim_{n\to\infty} f^n\big(\Phi(X_t)\big) = K_0^{\frac{1}{t}}P_t\big(w;\Phi(\mathbb{A})\big).$$

در پایان مقاله را با مساله باز زیر پایان می‌دهیم،
«آیا رابطه‌های (2.19) و (2.20) برای میانگین‌های کارچر وزن‌دار برقرارند؟»

4-2- نتیجه‌گیری

وارون نامساوی‌ها (نامساوی‌های مکمل) از نامساوی‌های کلاسیک و معروف همواره مورد توجه بوده‌اند.
به عنوان مثال یک وارون از نامساوی معروف میانگین حسابی-هندسی عملگری زیر:

$$A \,\sharp\, B = A^{\frac{1}{2}}\left(A^{\frac{-1}{2}}BA^{\frac{-1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}}A^{\frac{1}{2}} \leq \frac{A+B}{2} = A\nabla B.$$

نامساوی زیر است:

$$\frac{2\sqrt{mM}}{m+M}\,\frac{A+B}{2} \leq A \,\sharp\, B.$$

که با استفاده از ثابت کانترویچ در [21] اثبات شده است و برای هر عملگر معین مثبت A و B به طوری که $0 < mI \leq A, B \leq MI$ برقرار است.
در [7] یامازاکی این نتیجه را تعمیم داده و یک وارون از نامساوی میانگین حسابی – هندسی برای n عملگر معین مثبت بدست می‌آورد.
همچنین یک نامساوی وارون از نامساوی معروف $\Phi(A \,\sharp\, B) \leq \Phi(A) \,\sharp\, \Phi(B)$ به‌صورت نامساوی زیر است:

$$\frac{2\sqrt[4]{m_1m_2M_1M_2}}{\sqrt{m_1m_2}+\sqrt{M_1M_2}}\Phi(A) \,\sharp\, \Phi(B) \leq \Phi(A \,\sharp\, B). \quad (1)$$

که برای هر عملگر معین و مثبت A,B به‌طوری‌که $0 < m_2I \leq B \leq M_2I\,, 0 < m_1I \leq A \leq M_1I$

و هر نگاشت خطی و مثبت Φ برقرار است و در [13] نشان داده شده است.
در این مقاله ما نامساوی (1) را برای میانگین هندسی معرفی شده توسط آندو و لی و ماسیا شامل n عملگر خطی معین مثبت تعمیم داده‌ایم و نشان داده‌ایم:

$$\left(\frac{2h}{1+h^2}\right)^{n-1} G(\Phi(A_1),\dots,\Phi(A_n) \leq \Phi(G(A_1,\dots,A_n)). \quad (2)$$

که

$$R(A_i,A_j)=\max\{\, r\big({A_i}^{-1}A_j\big), r\big({A_j}^{-1}A_i\big)\}$$
$$h=min_{i,j}R(A_i,A_j)$$

است. و با ارائه مثال‌هایی ضرایب نامساوی‌های (1) و (2) را برای n =2 با هم مقایسه کرده‌ایم. همچنین یک نامساوی وارون را برای میانگین توانی-وزن‌دار از n عملگر معین مثبت شامل نگاشت‌های خطی مثبت یکانی بدست آورده‌ایم.

فهرست منابع

[1] J. E. Pečarić, T. Furuta, J. Mićić Hot, Y. Seo, Mond- Pečarić Method in operator in-equalities, Element, Zagreb, 2005.

[2] T. Ando, C.-K. Li, R. Mathias, Geometric means, Linear Algebra Appl. 385 (2006) 305-334.

[3] J. Lawson and Y. Lim, Monotonic properties of the least squares mean, Math. Ann. 351(2011) 267-279.

[4] R. Bhatia and J. Holbrook, Riemannian geometry and matrix geometric means, Linear Algebra Appl., 413(2006),594-618.

[5] D. Bini, B. Meini and F. Poloni, An effective matrix geometric mean satisfying the Ando-Li-Mathias properties, Math. Comp. 79 (2010) 437-452.

[6] S. Izumino, N. Nakamura, Geometric means of positive operators II, Sci. Math. 69(2009) 35-44.

[7] T. Yamazaki, An extension of Kantorovich inequality to n-operators via the geometric mean by Ando-Li-Mathias, Linear Algebra Appl. 416(2006) 688-695.

[8] E. Andruchow, G. Corach, D. Stojanoff, Geometrical significance of the Lowener-Heinz inequality, Proc. Amer. Math. Soc.128 (1999) 1031-1037.

[9] G. Corach, H. Porta, L. Recht, Convexity of the geodesic distance on space of positive operators, Illinois J. Math. 38 (1994) 7-94.

[10] R.D. Nussbaum, Hilberts projective metric and iterated nonlinear maps, Mem. Amer. Math. Soc. 75(391) (1988).

[11] J.I. Fujii, M. Fujii, M. Nakamura, J. Pečarić, Y.Seo, A reverse inequality for the weighted geometric mean due to Lawson-Lim, Linear Algebra Appl. 427 (2007) 272-284.

[12] T. Ando, Concavity of certain maps on positive definite matrices and applications to Hadamard products, Linear Algebra Appl. 26 (1979) 203-241.

[13] J. Mićić, J. Pečarić, Y. Seo, Complementary inequalities to inequalities of Jensen and Ando based on the Mond- Pečarić method, Linear Algebra Appl. 318 (2000) 87-107.

[14] J. Lawson and Y. Lim, Karcher means and Karcher equations of positive defnite oper- ators, Trans. Amer. Math. Soc. Ser. B, 1 (2014), 1-22.

[15] Y. Lim and M. Pálfia, Matrix power means and the Karcher mean, J. Funct. Anal., 262 (2012), 1498-1514.

[16] R. Bhatia and R. L. Karandikar, Monotonicity of the matrix geometric mean, Math. Ann., 353 (2012), 1453-1467

[17] Y. Lim and T. Yamazaki, On some inequalities for the matrix power and Karcher means, Linear Algebra Appl., 438 (2013), 1293-1304.

[18] M. Moakher, A differential geometric approach to the geometric mean of symmetric positive de_nite matrices, SIAM J. Matrix Anal. Appl.: 26 (2005), 735-747.

[19] M. Pálfia, Operator means of probability measures and generalized Karcher equations, Adv. Math., 289 (2016), 951-1007.

[20] T. Yamazaki, The Riemannian mean and matrix inequalities related to the Ando-Hiai inequality and chaotic order, Oper. Matrices, 6 (2012), 577-588.

[21] M. Fujii, M. Nakamura, J. Pečarić, Y. Seo, Bounds for the ratio and difference between parallel sum and series via Mond-Pecaric method, Math Inequal. Appl., 9(2006)749-759.