

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال هفتم، شماره سی و چهارم، بهمن و اسفند ۱۴۰۰

شماره شاپا: ۵۸۸-۲۵۸۸X



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

کاربرد معادلات دیفرانسیل جزئی کسری فازی در کاهش اختلال سیگنال صدای قلب

فرنوش کریمی^۱، توفیق الهویرنلو^{۱*}، سعید عباس‌بندی^۲

(^۱) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی واحد علوم و تحقیقات، تهران، ایران
(^۲) گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)، قزوین، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۹/۰۱/۲۹ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۲/۲۵

چکیده

مطالعات علمی به میزان دسترسی به داده‌های معتبر بستگی دارد. امروزه در زمینه‌های مربوط به تحقیقات حیاتی بشر، نه تنها به دلیل خطاهای اندازه‌گیری بلکه به دلیل ابهام در مفهوم اندازه‌گیری، داده‌های تجربی همیشه توسط اطلاعات نادرست آلوده می‌شوند. به عنوان یک نمونه واقعی می‌توان به ادغام سیگنال‌های حیاتی از جمله سیگنال قلب با نویز اشاره کرد که در آن ابهام موجود مانع از پردازش صحیح سیگنال با روش‌های کلاسیک شده است. در این مقاله سعی ما بر آن است که در مرحله پیش‌پردازش سیگنال، الگوریتمی برای کاهش نویز سیگنال صدای قلب طراحی کنیم. روش جدید حذف نویز از سیگنال‌های صدای قلب با استفاده از معادلات دیفرانسیل جزئی فازی از مرتبه کسری (FFPDE) جهت دستیابی به دقت بالا ارائه می‌شود. فازی سازی برای از بین بردن مرزهای مطلق انجام شده است. الگوریتم بر روی سیگنال صدای قلب نرمال بدون نویز با افزودن نویز سفید گاوسی مورد آزمایش قرار می‌گیرد. پس از معرفی و ارائه مدل، حذف نویز مبتنی بر روش انجام می‌گیرد. تحقق فیلتر FFPDE از مرتبه کسری به‌طور کلی مراحل زیر را شامل می‌شود؛ ابتدا با استفاده از جمله پسر اوپلر و گسسته سازی، معادله دیفرانسیل فازی به دست می‌آید. سپس ماتریس فیلتر معرفی می‌شود. نتایج حاصل حاکی از آن است که معادلات دیفرانسیل جزئی فازی از مرتبه کسری در تشخیص و کاهش نویز بسیار کارا است.

واژه‌ی کلیدی: معادلات دیفرانسیل جزئی فازی، مشتق از مرتبه کسری، کاهش نویز، سیگنال صدای قلب.

۱- مقدمه

می‌دهد که در زمینه کاهش نویز معادلات دیفرانسیل جزئی در مقایسه با سایر رویکردهای موجود، بسیار قدرتمند هستند. همچنین بارودیش و همکاران روش کاهش نویز سیگنال مبتنی بر SVD و PDE را شرح داده‌اند [۱۷]. در تحقیقات انجام‌شده اصول اساسی فیلتر کاهش نویز از مرتبه صحیح بررسی شده است. اخیراً استفاده از PDE از مرتبه کسری در کاهش نویز تصویر مورد توجه قرار گرفته است [۱۸-۱۹]. با این حال استفاده از FPDE از مرتبه کسری در کاهش نویز سیگنال‌های حیاتی از جمله سیگنال‌های صدای قلب بررسی نشده است. انگیزه اصلی در انجام این مقاله کاهش نویز سیگنال‌های صدای قلب مبتنی بر معادلات دیفرانسیل جزئی فازی از مرتبه دلخواه است. از آنجا که دانش موجود در ارتباط با ماهیت واقعی نویز سیگنال‌های حیاتی کامل نیست و عدم قطعیت بر تشخیص صحیح اثرگذار خواهد بود. بنابراین بهتر است این پارامترها به صورت اعداد فازی بیان شود. لذا روابط مربوط به معادلات دیفرانسیل به صورت معادلات دیفرانسیل فازی بیان می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که روش پیشنهادی روشی مؤثر و کاراست و می‌توان از آن برای پردازش سیگنال‌ها و تشخیص بیماری در مرحله بعدی استفاده کرد. در ادامه مقاله حاضر به صورت زیر تنظیم شده است. بخش دوم به تشریح کامل روش کاهش نویز با استفاده از معادلات دیفرانسیل فازی اختصاص دارد. در بخش سوم با استفاده از روش پیشنهادی، به حل عددی FFPDE از مرتبه دلخواه به تفصیل پرداخته می‌شود. و در ادامه در بخش چهارم، کاربرد روش پیشنهادی روی سیگنال‌های شبیه‌سازی شده، شرح داده می‌شود. در بخش نهایی مطالب ارائه شده در این مقاله جمع‌بندی و نتایج به دست آمده ارائه می‌شود.

۲- کاهش نویز با استفاده از معادلات**دیفرانسیل فازی****۲-۱ معرفی حساب کسری فازی**

در علوم پزشکی برای یافتن یک تشخیص دقیق از بیماری‌های قلبی، تجزیه و تحلیل مناسب از صداهای قلبی بسیار مهم است زیرا صداهای قلبی حاوی اطلاعات بسیار مهمی هستند. اما مسئله تفاوت در حساسیت شنوایی پزشکان و آمیخته شدن سیگنال‌های صدا با سیگنال‌هایی غیر از سیگنال صدای قلب مانع از تشخیص صحیح صداهای قلبی می‌شود. با توجه به مقدمات بیان شده هدف اصلی ما در این مقاله ارائه الگوریتمی بهینه جهت جداسازی سیگنال صدای قلب از دیگر سیگنال‌ها با استفاده از فنوکاردیوگرافی (PCG) است، فنوکاردیوگرافی ابزاری است که منجر به دسترسی به اطلاعات ارزشمند در مورد عملکرد قلب می‌شود. تجزیه و تحلیل مناسب صداهای قلبی، برای به دست آوردن یک تشخیص دقیق از بیماری‌های قلبی ضروری است. در حال حاضر روش‌هایی مختلفی برای فیلتر کردن سیگنال به منظور کاهش نویز سیگنال و استخراج اطلاعات مفیدتر از درون آن‌ها وجود دارد. تحقیقات گسترده‌ای در زمینه روش‌های مختلف کاهش نویز از سیگنال‌های پایدار و ناپایدار انجام شده است. مانند کاهش نویز مبتنی بر تبدیل موجک [۱-۵]. حوزه فوریه [۶] و یا استفاده از فیلترهای تطبیقی [۷]. اساس تبدیل موجک برای کاهش نویز این است که ضرایب موجک برای سیگنال و نویز متفاوت است [۸]. روش تجزیه مقدار منفرد (SVD) نوعی فیلتر غیرخطی است که سیگنال نویز دار را در غالب ماتریس هنکل نمایش می‌دهد، این ماتریس به وسیله مقدار منفرد فیلتر شده است [۹]. اما عملکرد SVD به طور کلی به مجموعه پارامترها وابسته است و این امر در کاربردهای میدانی می‌تواند مشکل ساز باشد [۱۰]. استفاده از معادلات دیفرانسیل جزئی (PDE) در کاهش نویز به عنوان یک روش مؤثر و جالب توجه در حوزه پردازش تصویر توجه زیادی را به خود جلب کرده است [۱۱-۱۶]. نتایج این تحقیقات نشان

$${}^{GH-G}D_t^\rho \tilde{f}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^\rho} \sum_{b=0}^i \binom{-\rho}{b} \tilde{f}(t - bh) \quad (5)$$

که در آن $gH - G$ مشخص کننده مشتق پذیری تعمیم یافته هاکورا از نوع گرانوالد- لتنیکو و ρ مرتبه مشتق پذیری، Z و t به ترتیب حد پائین و بالای انتگرال و $i = \frac{t-Z}{h}$ می باشد. طبق تئوری عملگر، زمانی که $\rho < 0$ ، دیفرانسیل مرتبه ρ قابل تبدیل به انتگرال است؛

$${}^{GH-G}D_t^\rho \tilde{f}(t) = {}^{GH-G}I_t^{-\rho} \tilde{f}(t)$$

و زمانی که $\rho \in \mathbb{Z}^+$ ، دیفرانسیل مرتبه کسری فازی به صورت مشتق مرتبه صحیح و زمانی که $\rho \in \mathbb{Z}^-$ ، دیفرانسیل مرتبه کسری فازی به صورت انتگرال مرتبه صحیح فازی باز تولید می شود. دیفرانسیل مرتبه کسری ریمان- لیوویل تابع فازی مقدار \tilde{f} که متعلق به فضای توابع فازی مقدار پیوسته و لبگ اندازه پذیر است به صورت زیر می باشد:

$${}^{GH-R}D_t^\rho \tilde{f}(t) = \begin{cases} \frac{d^n \tilde{f}}{dt^n} & \rho = n, n \in \mathbb{N} \\ \frac{d^n \tilde{f}}{dt^n} \left(I_t^{n-\rho} \tilde{f}(t) \right) = \frac{d^n}{dt^n} \frac{1}{\Gamma(n-\rho)} \int_Z^t \frac{\tilde{f}(s)}{(t-s)^{1-n-\rho}} ds & 0 \leq n-1 < \rho < n \end{cases} \quad (6)$$

که در آن $gH - R$ مشخص کننده مشتق پذیری تعمیم یافته هاکورا ریمان- لیوویل است، دیفرانسیل کسری تعمیم یافته هاکورا از نوع ریمان- لیوویل به شکل زیر محاسبه می شود:

$${}^{GH-R}D_t^\rho \left(\frac{d^n \tilde{f}(t)}{dt^n} \right) = {}^{GH-R}D_t^{r+n} \left({}^{GH-R}D_t^{-n} \tilde{f}^{(n)}(t) \right) = {}^{GH-R}D_t^{r+n} \tilde{f}(t) \ominus_{gH} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\tilde{f}^{(k)}(z)(t-z)^{k-r+n}}{\Gamma(k+1-r-n)} \quad (7)$$

بر اساس مطالب بیان شده، برای هر چه بهتر بیان کردن مدل تحت ابهام از معادلات دیفرانسیل فازی مرتبه کسری استفاده می کنیم. در این بخش مفاهیم پایه ای فازی در حالت کسری که برای ارائه روش مورد استفاده قرار گرفته است مرور می شود. برای تابع فازی مقدار $\tilde{f}(t)$ می دانیم که معکوس مشتق آن $D^{-1} \tilde{f}(t)$ ، به صورت (۱) تعریف می شود.

$$D^{-1} \tilde{f}(t) = \int_0^s \tilde{f}(s) ds \quad (1)$$

اگر $u(x)$ جواب معادله (۱) باشد که در آن $\tilde{f}: [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_F$

مشتق فازی نوع گرانوالد- لتنیکو از مرتبه صحیح به صورت زیر تعریف می شود:

$$\tilde{f}'_{gH}(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tilde{f}(t) \ominus_{gH} \tilde{f}(t-h)}{h} \quad (2)$$

به طور مشابه برای مشتق مراتب بالاتر به صورت زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} \tilde{f}''_{gH}(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tilde{f}'_{gH}(t) \ominus_{gH} \tilde{f}'_{gH}(t-h)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tilde{f}'_{gH}(t) \ominus_{gH} \tilde{f}'_{gH}(t-h)}{h} \right) \\ &\ominus_{gH} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\tilde{f}'_{gH}(t) \ominus_{gH} \tilde{f}'_{gH}(t-h)}{h} \\ &= \frac{1}{h^2} \lim_{h \rightarrow 0} \left(\tilde{f}(t) \ominus_{gH} 2 \tilde{f}(t-h) \oplus \tilde{f}(t-2h) \right) \end{aligned} \quad (3)$$

و

$$\tilde{f}^i_{gH}(t) = \frac{d^i \tilde{f}}{dt^i} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^i} \sum_{b=0}^i (-1)^i \binom{i}{b} \tilde{f}(t - bh) \quad (4)$$

با توجه به رابطه

$$\binom{i}{b} = \frac{i(i-1)\dots(i-b+1)}{b!}$$

مشتق کسری گرانوالد- لتنیکو فازی از مرتبه غیر صحیح به صورت زیر خواهد بود:

که $\tilde{f}(x, t) \in \mathbb{R}_{\mathcal{F}}$ تابعی فازی مقدار پیوسته و $\tilde{u}(x, t)$ تابعی فازی مقدار مطلقاً انتگرال‌پذیر است. با فرض اینکه $\tilde{f}(x, t) = \tilde{\delta}$ ، از انتگرال فوریه برای حل معادله (۸) استفاده می‌کنیم. با استفاده از تعریف و ویژگیهای تابع فوریه فازی [19] تبدیل فوریه فازی تابع $\tilde{u}(x, t)$ به صورت انتگرال زیر بیان می‌شود:

$$\mathcal{F}\{\tilde{u}(x, t)\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}(x, t) e^{-i\omega x} dx = \tilde{U}(\omega, t) \quad (9)$$

هرگاه

$$\partial_{t,gh} \tilde{u}(x, t), \partial_{x,gh} \tilde{u}(x, t), \partial_{x^\rho,gh} \tilde{u}(x, t)$$

در بازه $(-\infty, +\infty)$ توابع مطلقاً انتگرال‌پذیر فازی باشند معادله (۹) به (۱۰) تبدیل می‌شود.

$$\mathcal{F}\{\partial_{t,gh} \tilde{u}(x, t)\} \ominus_{gH} \mathcal{F}\{\partial_{x^\rho,gh} a^\rho \tilde{u}(x, t)\} \quad (10)$$

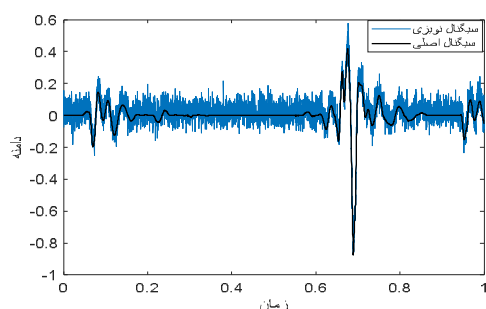
لذا

$$\mathcal{F}\{\partial_{x^\rho,gh} a^\rho \tilde{u}(x, t)\} = a^\rho (i\omega)^\rho \tilde{U}(\omega, t) \quad (11)$$

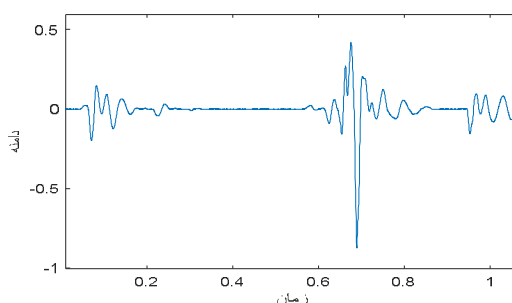
در ساختار سیگنال نویزی نقاط متأثر از نویز اضافه‌شده به سیگنال هستند. ظاهر شدن عدم قطعیت در ساختار دینامیکی سیگنال‌ها در نمودار سیگنال خودنمایی می‌کند.

برای درک شهودی مسئله بیان شده در شکل (۱) سیگنال صدای قلب سالم و در شکل (۲) همان سیگنال پس از اضافه کردن نویز سفید گاوسی نمایش داده شده است. همان‌طور که در شکل مشاهده می‌کنیم زمانی که سیگنال نویز با سیگنال اصلی صدای قلب ادغام می‌شود منحنی سیگنال مخدوش می‌شود. به عبارتی همواری ساختار تحت تأثیر عدم قطعیت نویز قرار گرفته و لذا این عدم قطعیت به سیگنال آغشته به نویز انتقال می‌یابد. معادلات دیفرانسیل جزئی کسری فازی به صورت زیر تعریف می‌شوند:

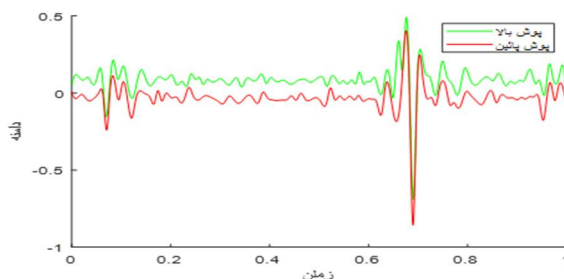
$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} \ominus_{gH} a^\rho \frac{\partial^\rho \tilde{u}}{\partial x^\rho} = \tilde{f}(x, t) \\ x \in \mathbb{R}, t > 0, \rho \in \mathbb{R}, \\ a \in \mathbb{R}^+, \tilde{u}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_{\mathcal{F}} \\ \tilde{u}(x, 0) = \tilde{\Phi}(x) \quad x \in \mathbb{R} \end{cases} \quad (A)$$



شکل (۲): سیگنال نویزی صدای قلب



شکل (۱): سیگنال اصلی صدای قلب



شکل (۳): پوش بالا و پائین سیگنال نویزی

می‌شود. همچنین $K(\omega, t)$ پاسخ فرکانس فیلتر است. با فرض اینکه

$$(i\omega)^\rho = a_\rho(\omega) \cdot \exp(i\theta_\rho(\omega))$$

و

$$a_\rho(\omega) = |\omega|^\rho, \theta_\rho(\omega) = \rho\pi \operatorname{sgn} \frac{\omega}{2}$$

معادله (۱۷) را می‌توان به صورت زیر نمایش داد:

$$K(\omega, t) = \frac{e^{a^\rho \omega^\rho t \cos \frac{\rho\pi}{2}} \cdot e^{ia^\rho \omega^\rho t \sin \frac{\rho\pi}{2}}}{P(\omega, t) \cdot Q(\omega, t)} \quad \omega > 0 \quad (18)$$

که

$$P(\omega, t) = e^{a^\rho \omega^\rho t \cos \frac{\rho\pi}{2}}, Q(\omega, t) = e^{ia^\rho \omega^\rho t \sin \frac{\rho\pi}{2}}$$

با فرض

$$\gamma(\omega, t) = a^\rho \omega^\rho t \sin \frac{\rho\pi}{2}$$

توابع $P(\omega, t)$ و $\gamma(\omega, t)$ به ترتیب توابع مقدار فرکانس و فاز فرکانس خواهند بود.

زمانی که مرتبه FFPDE عددی فرد باشد آنگاه تابع مقدار فرکانس آن به صورت $P(\omega, t) = 1$ خواهد شد. و در نتیجه دامنه سیگنال ثابت باقی می‌ماند یعنی فیلتر، فیلتری تمام گذر است.

زمانی که $\rho > 0$ فیلتر پایین گذر و زمانی که $\rho < 0$ فیلتر بالا گذر خواهد بود. زمانی که $\cos \frac{\rho\pi}{2} > 0$ باشد، $P(\omega, t)$ به طور یکنواخت افزایش می‌یابد لذا برای فیلتر کردن مناسب نیست.

برای معادله (۸) شرایط مرزی زیر را تعریف می‌کنیم:

$$z = 0, \tilde{u}^{(k)}(0, t) = 0, \\ k = (0, 1, 2, \dots, n-1)$$

معادله (۸) را می‌توان به صورت

$${}^{GH-R}D_t^r \left(\frac{d^n \tilde{f}(t)}{dt^n} \right) = \\ {}^{GH-R}D_t^{r+n} \left(\tilde{f}^{(n)}(t) \right), n \in \mathbb{Z}$$

بازنویسی کرد.

از آنجا که $\partial_{t,gh} \tilde{u}(x, t)$ مطلقاً انتگرال پذیر فازی است بنابراین

$$D \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_{t,gh} \tilde{u}(x, t) dx, \tilde{\sigma} \right) \leq \\ \int_{-\infty}^{+\infty} D(\partial_{t,gh} \tilde{u}(x, t), \tilde{\sigma}) dx < \infty$$

در نتیجه $\int_{-\infty}^{+\infty} \partial_{t,gh} \tilde{u}(x, t) dx$ به طور یکنواخت همگراست. پس

$$\mathcal{F}\{\partial_{t,gh} \tilde{u}(x, t)\} = \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_{t,gh} \tilde{u}(x, t) e^{-i\omega x} dx \\ = \frac{d\tilde{U}(\omega, t)}{dt} \quad (12)$$

بنابراین

$$\frac{d\tilde{U}(\omega, t)}{dt} \ominus_{GH} a^\rho (i\omega)^\rho \tilde{U}(\omega, t) = \tilde{\sigma} \quad (13)$$

پس از ضرب طرفین معادله (۱۳) در عامل انتگرال ساز $e^{\int_{-\infty}^{+\infty} a^\rho (i\omega)^\rho dt}$ خواهیم داشت:

$$(-1) \otimes \left(e^{\int_{-\infty}^{+\infty} a^\rho (i\omega)^\rho dt} \tilde{U}(\omega, t) \right)' = \tilde{\sigma} \quad (14)$$

بنابراین

$$\left(e^{\int_{-\infty}^{+\infty} a^\rho (i\omega)^\rho dt} \tilde{U}(\omega, t) \right)' = \tilde{\sigma}$$

و

$$\tilde{U}(\omega, t) = e^{a^\rho (i\omega)^\rho t} \tilde{U}(\omega, 0) \quad (15)$$

بنابراین می‌توان (۱۶) را نتیجه گرفت

$$\tilde{U}(\omega, t) = \tilde{\Phi}(\omega) \cdot K(\omega, t) \quad (16)$$

که در آن $\tilde{U}(\omega, t)$ و $\tilde{\Phi}(\omega)$ به ترتیب تبدیل فوری فازی $\tilde{u}(x, t)$ و $\tilde{\Phi}(x)$ هستند. $K(\omega, t)$ به صورت زیر ظاهر شده است:

$$K(\omega, t) = e^{a^\rho (i\omega)^\rho t} \quad (17)$$

$\tilde{\Phi}(x)$ نمایانگر سیگنال اصلی است و جواب (۸) به عنوان فیلتر پردازش سیگنال در نظر گرفته

که در آن

$$g_b = \Gamma(b-r)/\Gamma(-r)\Gamma(b+1)$$

$$\Gamma(\beta) = \int_0^\infty e^{-x} x^{\beta-1} dx = (\beta-1)!,$$

$$0 \leq i \leq m$$

m طول سیگنال است. $h = \frac{1}{f_s}$ طول گام و f_s فرکانس نمونه‌برداری، l گام زمان تکوین و s کل تکرارها است به طوری که

$$0 \leq k \leq s-1, \tau = sl.$$

با فرض قراردادن اینکه

$$\tilde{u}(t_{-1}, \tau_{k+1}) = \tilde{o}$$

که در آن \tilde{u}_i^k نشان‌دهنده مقدار $\tilde{u}(t, \tau)$ در نقطه (t_i, τ_k) است، آنگاه رابطه (۲۱) به صورت زیر خواهد شد:

$$\tilde{u}_i^{k+1} \Theta_{gH} \tilde{u}_i^k = \quad (22)$$

$$\frac{a^{\rho l}}{2h^{\rho}} \sum_{b=0}^i g_b (\tilde{u}_{i-b+1}^{k+1} \Theta_{gH} \tilde{u}_{i-b-1}^{k+1})$$

با تعریف $q = \frac{a^{\rho l}}{2h^{\rho}}$ طبق معادله (۱۶) داریم:

$$q = \frac{a^{\rho l}}{2h^{\rho}} = \frac{a^{\rho \tau}}{2h^{\rho s}} = \frac{0.115 y}{a^{\rho} \left(\frac{1}{f_s} \right)^{\rho} s^{\rho} a^{\rho} (2\pi f_c)^{\rho} |\cos(\rho\pi/2)|} = \frac{0.0575 y}{(2\pi)^{\rho} s^{\rho} |\cos(\rho\pi/2)|} \left(\frac{f_s}{f_c} \right)^{\rho} \quad (23)$$

معادله (۲۳) به صورت

$$\tilde{u}_i^{k+1} \Theta_{gH} \tilde{u}_i^k = q \sum_{b=0}^i g_b (\tilde{u}_{i-b+1}^{k+1} \Theta_{gH} \tilde{u}_{i-b-1}^{k+1})$$

خواهد بود. به عبارتی

$$\tilde{u}_i^k = q g_{i-1} \tilde{u}_0^{k+1} \Theta_{gH} q (g_i - g_{i-2}) \tilde{u}_1^{k+1} \Theta_{gH} \dots \Theta_{gH} q (g_2 - g_0) \tilde{u}_{i-1}^{k+1} \Theta_{gH} q (g_1 - 1) \tilde{u}_i^{k+1} \Theta_{gH} q g_0 \tilde{u}_{i+1}^{k+1} \quad (24)$$

با در نظر گرفتن

$$c_1 = -q g_0, c_2 = -q (g_1 - 1)$$

لذا معادله (۱۹) را خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} \Theta_{gH} a^{\rho} g^{H-R} D_t^{\rho} \left(\frac{\partial^n \tilde{u}}{\partial x^n} \right) = \tilde{o} \\ t > 0, n \in \mathbb{Z}, \rho = r + n, \\ 0 < r < 1 \\ \tilde{u}(x, 0) = \tilde{\Phi}(x) \end{cases} \quad (19)$$

طبق (۱۹)، و رابطه

$$y = -20 \log |K(\omega, t)|$$

مقدار تضعیف (y) ، فیلتر FFPDE تحت فرکانس

قطع f_c به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$y = 20 \log (1 / \exp(-a^{\rho} (2\pi f_c)^{\rho} |\cos(\rho\pi/2)|) \tau)$$

بنابراین

$$\tau = \frac{0.115 y}{a^{\rho} (2\pi f_c)^{\rho} |\cos(\rho\pi/2)|}$$

که در آن τ زمان تکوین است.

زمانی که $\rho > 0$ و f_n به طور نامحدود افزایش یابد τ افت پیدا کرده و به صفر نزدیک می‌شود و سیگنال ورودی معادل با فیلتر تمام گذر خواهد بود. زمانی که τ به بی‌نهایت میل کند سیگنال ورودی معادل با فیلتر تمام نگذر است. زمانی که $\rho < 0$ رفتار عکس رفتار ذکر شده خواهد داشت.

۳- ماتریس تبدیل و جواب عددی روش

در ادامه پروسه فیلتر کردن نشان می‌دهیم که به ازای $n = 1, 1 \leq \rho \leq 2$ معادله (۱۴) به صورت

زیر بازنویسی می‌شود:

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} \Theta_{gH} a^{\rho} g^{H-R} D_t^{\rho} \left(\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} \right) = \tilde{o} \\ \tilde{u}(x, 0) = \tilde{\Phi}(x) \end{cases} \quad (20)$$

متغیرهای x و t در $\tilde{u}(x, t)$ را به ترتیب با t و τ جایگذاری می‌کنیم. پس از گسسته سازی t و τ به کار بردن فرم تفاضل مرکزی عددی و عبارت پسر و اولر روابط (۲۰) و (۵) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\frac{\tilde{u}(t_i, \tau_{k+1}) \Theta_{gH} \tilde{u}(t_i, \tau_k)}{l} = \quad (21)$$

$$\frac{a^{\rho}}{h^{\rho}} \sum_{b=0}^i g_b \frac{\tilde{u}(t_{i-b+1}, \tau_{k+1}) \Theta_{gH} \tilde{u}(t_{i-b-1}, \tau_{k+1})}{2h}$$

معادله (۲۶) را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\begin{cases} A\tilde{u}^{k+1} = \tilde{u}^k \\ \tilde{u}^{k+1} = A^{-1}\tilde{u}^k \end{cases} \quad (28)$$

۴- شبیه‌سازی عددی

در این بخش، عملکرد روش پیشنهادی را با استفاده از سیگنال‌های صوتی نویز دار مصنوعی مورد بررسی قرار می‌دهیم. برای این کار سیگنال اصلی صدای قلب که از پایگاه داده

<http://www.peterjbentley.com/heartchallenge/#downloads>

اخذ شده است را به وسیله سیگنال نویز از نوع سفید گاوسی به سیگنال نویز دار تبدیل می‌کنیم. و سپس با اعمال فیلتر پیشنهاد شده و فازی زدایی از داده‌های به دست آمده، به کاهش نویز سیگنال (ج) شکل (۴) می‌پردازیم. شکل (۴) سیگنال‌های نویزی مصنوعی مختلف با سه SNR (نسبت سیگنال به نویز) مختلف -5 ، 0 و 5 دسی بل را نشان می‌دهد. در این سیگنال‌ها فرکانس نمونه برداری 44100 هرتز است. برای کاهش نویز با روش قیدشده پس از بررسی ترکیبی از مقادیر مختلف برای f_c, γ, s و ρ به ازای $a = 1$ با تنظیم:

$$\rho = \frac{3}{2}, f_c = 20 \text{ Hz}, \gamma = 10, s = 1$$

همان‌طور که در شکل (۵) نشان داده شده است، فیلتر به خوبی قادر به کاهش نویز از سیگنال خواهد بود.

$$\begin{aligned} c_j &= -q(g_{j-1} - g_{j-3}), 3 \leq j \leq m+1 \\ c_{m+2} &= -qg_{m-1} \end{aligned}$$

داریم:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_i^k &= c_{m+2} \tilde{u}_o^{k+1} \oplus_{gH} c_{m+1} \tilde{u}_1^{k+1} \oplus_{gH} \dots \\ &\oplus_{gH} c_3 \tilde{u}_{i-1}^{k+1} \oplus_{gH} c_2 \tilde{u}_i^{k+1} \oplus_{gH} c_1 \tilde{u}_{i+1}^{k+1} \end{aligned} \quad (25)$$

با فرض اینکه

$$\tilde{u}^o = [\tilde{u}_1^o, \tilde{u}_2^o, \dots, \tilde{u}_{m-1}^o, \tilde{u}_m^o]$$

نشان دهنده سیگنال اصلی،

$$\tilde{u}^k = [\tilde{u}_1^k, \tilde{u}_2^k, \dots, \tilde{u}_{m-1}^k, \tilde{u}_m^k]$$

سیگنال فیلتر شده بعد از k امین تکرار و $\tilde{u}_1^k = 0$ و $\tilde{u}_{m+1}^k = 0$.

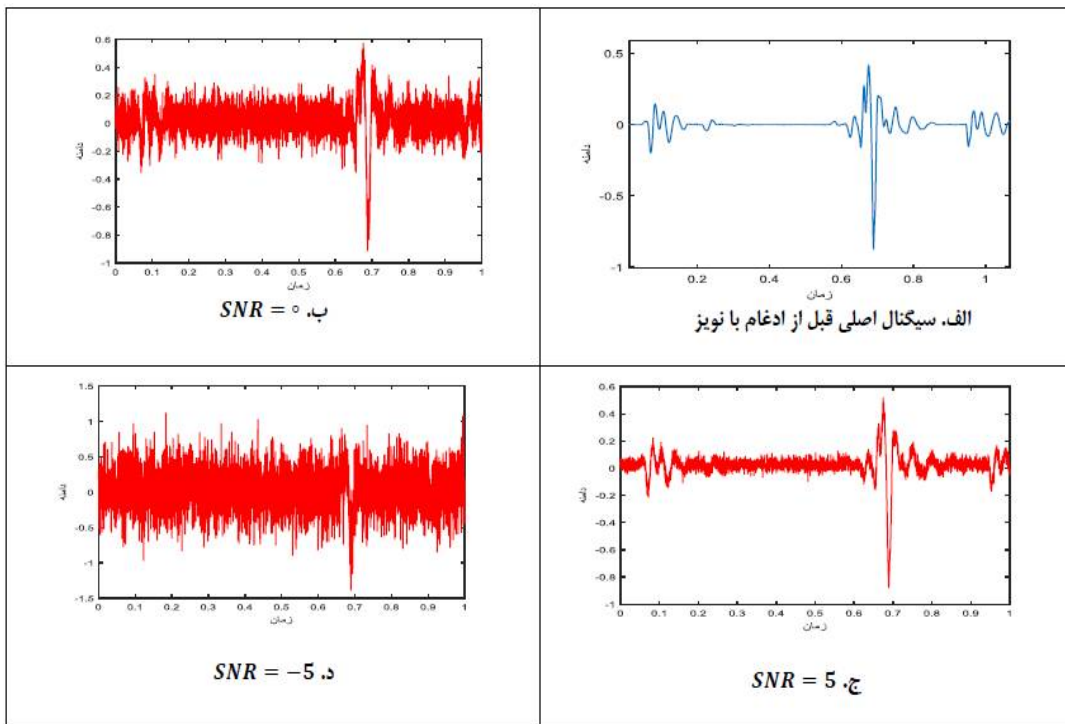
مقادیر اولیه مرزی $FPDE$ باشند آنگاه روند فیلتر کردن به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_1^k \\ \tilde{u}_2^k \\ \vdots \\ \tilde{u}_{m-1}^k \\ \tilde{u}_m^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_2 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & c_3 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & c_1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & c_2 & c_1 \\ c_{m+1} & c_m & \dots & \dots & c_3 & c_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{u}_1^{k+1} \\ \tilde{u}_2^{k+1} \\ \vdots \\ \tilde{u}_{m-1}^{k+1} \\ \tilde{u}_m^{k+1} \end{bmatrix} \quad (26)$$

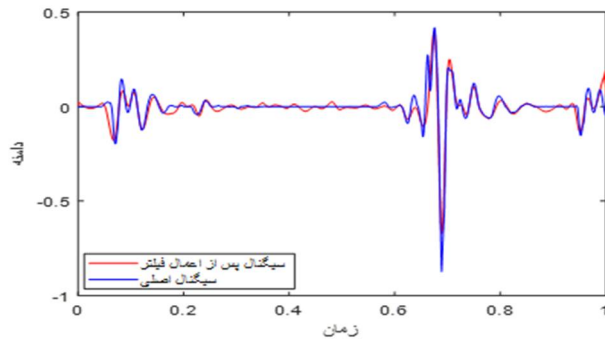
با نام گذاری

$$A = \begin{bmatrix} c_2 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & c_3 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & c_1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & c_2 & c_1 \\ c_{m+1} & c_m & \dots & \dots & c_3 & c_2 \end{bmatrix} \quad (27)$$

شکل ۴- الف، سیگنال اصلی قبل از ادغام با نویز. نمودارهای ب، ج، د: سیگنال‌های نویزی با SNR مختلف



شکل (۵) مقایسه سیگنال اصلی و سیگنال نویزی صدای قلب پس از نویزدایی



جدول (۱): خطای مطلق جواب تقریبی برای مثال ۴-۱

ردیف	$u(t)$ قبل از ادغام با نویز (سیگنال اصلی)	$\underline{u}(t)$ بعد از اعمال فیلتر	$\bar{u}(t)$ بعد از اعمال فیلتر	$u(t)$ بعد از اعمال فیلتر (فازی زدایی شده)	خطا
1	E-05-6.10352	0.004737313	0.008441059	0.006589186	0.006650221
2	E-056.10352	0.009080515	0.016410967	0.012745741	0.012684705
3	0.000152588	0.011933711	0.022368234	0.017150972	0.016998384
4	-0.000183105	0.01336255	0.026385196	0.019873873	0.020056979
5	0	0.013723496	0.028942617	0.021333057	0.021333057
6	E-05-3.05176	0.013365373	0.030515149	0.021940261	0.021970779
7	-0.000152588	0.012552476	0.031463457	0.022007967	0.022160554
8	-0.000213623	0.011464289	0.032032746	0.021748517	0.02196214
9	E-05-6.10352	0.010215483	0.032379696	0.021297589	0.021358624
10	0.000305176	0.008876531	0.032600513	0.020738522	0.020433346
11	0	0.0074896	0.032752642	0.020121121	0.020121121
12	-0.000244141	0.006079443	0.032869657	0.01947455	0.019718691
13	E-053.05176	0.004660391	0.032970848	0.018815619	0.018785102
14	-0.000396729	0.003240664	0.03306712	0.018153892	0.018550621
15	E-056.10352	0.001824954	0.03316454	0.017494747	0.017433712
16	-0.000213623	0.00041594	0.033266412	0.016841176	0.017054799
17	E-05-6.10352	-0.000984833	0.033374481	0.016194824	0.016255859
18	0.000152588	-0.002376458	0.033489619	0.01555658	0.015403992
19	E-053.05176	-0.003758382	0.033612211	0.014926915	0.014896397
20	E-05-3.05176	-0.005130247	0.033742377	0.014306065	0.014336582
21	0.000183105	-0.006491802	0.033880084	0.013694141	0.013511035
22	0.000366211	-0.007842857	0.034025222	0.013091183	0.012724972
23	-0.000305176	-0.009183251	0.034177636	0.012497193	0.012802368
24	0.000335693	-0.010512843	0.034337146	0.011912151	0.011576458
25	0.000488281	-0.011831502	0.034503559	0.011336029	0.010847748
26	-0.000274658	-0.013139099	0.034676677	0.010768789	0.011043447
27	0	-0.014435511	0.034856296	0.010210393	0.010210393
28	E-053.05176	-0.015720614	0.035042211	0.009660798	0.009630281
29	0.000274658	-0.016994287	0.035234215	0.009119964	0.008845306
30	0.000183105	-0.018256409	0.035432102	0.008587847	0.008404741
31	0.000244141	-0.019506857	0.035635664	0.008064404	0.007820263
32	$\cdot\Delta E-6.10352$	-0.020745511	0.035844695	0.007549592	0.007488557
33	0.000427246	-0.021972249	0.036058986	0.007043368	0.006616122
34	-0.000183105	-0.023186951	0.03627833	0.00654569	0.006728795
35	0.000366211	-0.024389495	0.03650252	0.006056512	0.005690301
36	0.000396729	-0.025579761	0.036731348	0.005575794	0.005179065
37	0.000183105	-0.026757627	0.036964607	0.00510349	0.004920385
38	$\cdot\Delta E--6.10352$	-0.027922972	0.03720209	0.004639559	0.004700594
39	0.000366211	-0.029075676	0.037443588	0.004183956	0.003817745
40	0.000457764	-0.030215618	0.037688895	0.003736638	0.003278875

نتیجه گیری

این مقاله بر مسئله کاهش نویز از سیگنال‌های صدای قلب به‌عنوان یک ابزار کمک‌کننده برای تشخیص صحیح ناهنجاری‌های قلب متمرکز شده است. با هدف ذکرشده در این مقاله، یک روش براساس معادلات دیفرانسیل جزئی فازی از مرتبه دلخواه ارائه شده است. راه‌حل عددی برای طراحی فیلتر FPDE از مرتبه دلخواه به دست می‌آید. پارامترهای فیلتر FPDE مورد بررسی قرار گرفته و روش کاهش نویز با شبیه‌سازی سیگنال نویز دار با افزودن نویز سفید گاوسی به سیگنال صدای قلب، تست می‌شود. شبیه‌سازی به‌منظور شناخت عملکرد مطلوب ارائه شده و بررسی مقادیر در الگوریتم ارائه شده انجام می‌شود. ماتریس فیلتر ساخته شده است و روش فیلتر با یک تکرار از ماتریس محقق می‌شود، که از لحاظ زمان اجرا یک مزیت است. عملکرد وقت‌گیر شبیه‌سازی‌های عددی نشان می‌دهد که فیلتر FFPDE پیشنهادی در مقایسه با روش‌های معمول مؤثر و کارآمد است.

همچنین نتایج حاصل‌شده از روش نشان داد که در صورت استفاده از روش ارائه شده سیگنال به‌خوبی نویز زدایی شده است و مقدار اندک خطا حاکی از مطلوب بودن نتایج و در نتیجه روش پیشنهادی است. این روش با استفاده از سیگنال‌های فنوکاردیوگرافی به‌دست‌آمده از استتسکوپ دیجیتال قابل اجرا است. با استفاده از این روش می‌توان سیگنال صوتی قلب را از نویز جداسازی نمود و نیز مراحل پردازش بعدی آن را آسان‌تر نمود.

Synchro squeezing for Rolling Element Bearing Fault Diagnosis, IEEE, New York, (2018)

[9] Y.L. Chu, Y.G. Zhang, X.G. Yuan, X.M. Ren. Research on singular value decomposition denoising algorithm on polarization mode dispersion measurement, in: Y. Huang (Ed.), Tenth International Conference on Information Optics and Photonics, Spie-Int Soc Optical Engineering, Bellingham (2018)

[10] A. Rai, S.H. Upadhyay. A review on signal processing techniques utilized in the fault diagnosis of rolling element bearings. Tribol. Int. 96: 289–306 (2016)

[11] T.J. Esward, L. Wright, Efficient updating of PDE models for metrology, Measurement 79: 267–275 (2016)

[12] Y.M. Zhang. An accurate and stable RBF method for solving partial differential equations, Appl. Math. Lett. 97: 93–98 (2019)

[13] X. Yang. Reflected backward stochastic partial differential equations with jumps in a convex domain, Stat. Probab. Lett. 152: 126–136 (2019)

[14] M. Lysaker, A. Lundervold, T. Xue-Cheng, "Noise removal using fourth-order partial differential equation with applications to medical magnetic resonance images in space and time," Image Processing, IEEE Transactions on, 12: 1579-1590 (2003)

[15] H. Hassanpour, E. Nadernejad, H. Miar. Image Enhancement Using Diffusion Equation. IEEE Int. Conference on Signal Processing and its Applications ISSPA. (2007)

[16] P. Perona, J. Malik, Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion.

فهرست منابع

[1] G.D. Yue, X.S. Cui, Y.Y. Zou, X.T. Bai, Y.H. Qu, H.T. Shi. A Bayesian wavelet packet denoising criterion for mechanical signal with non-Gaussian characteristic. Measurement 138: 702–712. (2019)

[2] D.L. Chen, Y.Q. Chen, D.Y. Xue. Fractional-order total variation image denoising based on proximity algorithm, Appl. Math. Compute. 257: 537–545 (2015)

[3] O.I. Traore, L. Pantera, N. Favretto-Cristini, P. Cristini, S. Viguier-Pla, P. Vieu. Structure analysis and denoising using Singular Spectrum Analysis: application to acoustic emission signals from nuclear safety experiments, Measurement 104: 78–88 (2017)

[4] Y.L. Chen, P.L. Zhang, Z.J. Qiang, Q.C. Yang, Y.D. Yang. Denoising algorithm for mechanical vibration signal using quantum Hadamard transformation, Measurement 66: 168–175 (2015)

[5] Q.C. Kuang, B.Q.K. Ling, Z.J. Yang. Parameter free and reliable signal denoising based on constants obtained from IMFs of white Gaussian noise, Measurement 102: 230–243 (2017)

[6] L. D. Harris, J.G. "Wavelet denoising of chirp-like signals in the Fourier domain," *Circuits and Systems, 1999. ISCAS '99. Proceedings of the 1999 IEEE International Symposium on*, 3: 540-543 (1999)

[7] M. Bodson. S. C. Douglas. "Adaptive algorithms for the rejection of sinusoidal disturbances with unknown frequency," Automatica. 33: 2213–2221 (1997)

[8] H. Liu, J.Q. Xiang, Multivariate Wavelet. Denoising Method Based on

IEEE Trans. On Pattern Analysis and Machine Intel. 12(7): 629–639 (1990)

[17] G. Baravdish, G. Evangelista, O. Svensson, F. Sofya, PDE-SVD based audio denoising, Communications Control and Signal Processing (ISCCSP), in: 2012 5th International Symposium on, IEEE. 1–6 (2012)

[18] Ω.D. Xue, F.Q. Zhao, Haze image enhancement based on space fractional-order partial differential equation, in: C.M. Falco, X. Jiang (Eds.), Ninth International Conference on Digital Image Processing, Spie-Int Soc Optical Engineering, Bellingham. (2017)

[19] Z. Gouyandeh, T. Allahviranloo, S. Abbasbandy, A. Armand. A fuzzy solution of heat equation under generalized Hukuhara differentiability by fuzzy Fourier transform, Fuzzy Sets and Systems, Volume 309: 81-97(2017)