دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هفتم، شماره سی و چهارم، بهمن و اسفند 1400
شماره شاپا: 2588X-588

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

برخی از خواص مجموع عملگرهای ترکیبی وزن دار روی فضای فوک

اسما نگهداری[1*]، مهسا فاتحی[2]

[1و2] گروه ریاضی، واحد شیراز، دانشگاه آزاد اسلامی، شیراز، ایران

تاریخ ارسال مقاله: 1398/12/12   تاریخ پذیرش مقاله: 1399/11/23

چکیده

فرض کنید φ نگاشتی تام باشد. برای هر تابع f متعلق به فضای فوک $\mathcal{F}^2$، عملگر ترکیبی C_φ را به صورت $C_\varphi(f) = f \circ \varphi$ تعریف می‌کنیم. برای دو تابع تام ψ و ϕ، عملگر ترکیبی وزن‌دار را با نماد $C_{\psi,\varphi}$ نمایش داده و برای هر $f \in \mathcal{F}^2$ به فرم $C_{\psi,\varphi}(f) = \psi.(f \circ \varphi)$ تعریف می‌کنیم. همچنین برد عددی عملگر کراندار T را با نماد $W(T)$ نمایش داده و به صورت $W(T) = \{\langle Tf, f\rangle : \|f\| = 1\}$ تعریف می‌کنیم. در این مقاله، طیف نقطه‌ای برخی از عملگرهای به فرم $C_{\psi_1,\varphi_1} + C_{\psi_2,\varphi_2}$ را در حالتی که φ_1 و φ_2 دارای نقطه ثابت مشترک هستند، مشخص و یک زیر فضای ناوردا برای عملگر $\left(C_{\psi_1,\varphi_1} + C_{\psi_2,\varphi_2}\right)^*$ معرفی می‌کنیم. سپس با استفاده از این مطالب برای عملگرهای فشرده C_{ψ_1,φ_1} و C_{ψ_2,φ_2}، طیف عملگر $C_{\psi_1,\varphi_1} + C_{\psi_2,\varphi_2}$ را پیدا کرده و بعد از آن برد عددی عملگر $C_{\psi_1,\varphi_1} + C_{\psi_2,\varphi_2}$ را که در آن φ_1 و φ_2 دارای نقطه ثابت مشترک باشند را بررسی می‌کنیم.

واژه‌ی کلیدی: فضای فوک، عملگر ترکیبی وزن‌دار، طیف، برد عددی.

1. مقدمه

فرض کنید dA نمایش اندازه لبگ روی فضای مختلط $\mathbb{C}$ باشد. فضای تمام توابع تحلیلی f روی $\mathbb{C}$ که

$$\int_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 e^{-|z|^2} \frac{dA(z)}{\pi} < \infty$$

را فضای فوک نامیده و آن را با نماد $\mathcal{F}^2$ نمایش می‌دهیم. همچنین $\|f\|$ را ریشه دوم مقدار انتگرال فوق تعریف می کنیم. برای هر $f, g \in \mathcal{F}^2$، ضرب داخلی روی این فضا به صورت زیر تعریف می‌شود

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{C}} f(z)\overline{g(z)}e^{-|z|^2} \frac{dA(z)}{\pi}.$$

به سادگی ثابت می‌شود که مجموعه $\left\{e_m = \frac{z^m}{\sqrt{m!}}: m \geq 0\right\}$ یک پایه یکه متعامد برای فضای $\mathcal{F}^2$ می‌باشد. فضای $\mathcal{F}^2$ یک فضای هیلبرت مولد هسته باهسته K_z است که برای هر $z, w \in \mathbb{C}$، $K_z(w) = K(w, z) = e^{\bar{z}w}$. بسته نرمال شده را به صورت $k_z = \frac{K_z}{\|K_z\|}$ تعریف می‌کنیم. همچنین اگر j یک عدد صحیح مثبت باشد، بوضوح برای هر $z, w \in \mathbb{C}$، $K_z^{[j]}(w) := \frac{d^j K_z}{d\bar{z}^j} = w^j e^{\bar{z}w}$.
برای اطلاعات بیشتر در مورد فضای فوک به مرجع [19] مراجعه شود. در این مقاله طیف و طیف نقطه‌ای عملگر T را به ترتیب با $\sigma(T)$ و $\sigma_p(T)$ نمایش می‌دهیم.

در زمینه عملگرهای ترکیبی و عملگرهای ترکیبی وزن دار روی فضاهای مختلف مقالات زیادی وجود دارد که می‌توان به مراجع [3]، [6]، [8]، [9]، [10]، [13]، [14]، [16]، [17] و [18] اشاره کرد. در مرجع [3] توسط کارسول و همکاران، کرانداری و فشردگی عملگرهای ترکیبی روی فضای $\mathcal{F}^2$ مورد مطالعه قرار گرفته است. آنها نشان دادند که C_φ^* از ضرب یک عملگر ترکیبی و یک عملگر ضربی بوجود می‌آید. در [15]، یوکی شرطی لازم و کافی برای کرانداری و فشردگی عملگرهای ترکیبی وزن‌دار $C_{\psi,\varphi}$ بدست آورده است. بعد از آن له در [13] محک ساده‌تری برای کرانداری و فشردگی این عملگرها بیان نموده و بعلاوه شرایطی را برای طولپایی و نرمال بودن این عملگرها روی $\mathcal{F}^2$ بدست آورده است. زائو در [16] عملگرهای ترکیبی وزن دار یکانی و همچنین طیف آنها را مورد بررسی و مطالعه قرار داد. در مراجع [3] و [14] الحاقی عملگرهای ترکیبی وزن‌دار روی این فضا مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین مقالات زیادی در مورد برد عددی عملگرهای ترکیبی و عملگرهای ترکیبی وزن‌دار روی فضاهای مختلف وجود دارد که می‌توان به مراجع [1]، [2]، [7] و [11] اشاره کرد.

در این مقاله به مطالعه مجموع دو عملگر ترکیبی وزن دار روی فضای فوک $\mathcal{F}^2$ پرداخته و برخی از خواص آن نظیر طیف و برد عددی را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

2. دست آوردهای پژوهش

در این بخش طیف دسته ای از عملگرهای به فرم $C_{\psi_1,\varphi_1} + C_{\psi_2,\varphi_2}$ را بدست آورده و سپس به بررسی برد عددی این عملگرها می‌پردازیم.

کارسول و همکاران در مرجع [3] نشان دادند که C_φ یک عملگر کراندار روی فضای فوک $\mathcal{F}^2$ است اگر و فقط اگر $\varphi(z) = \lambda z + b$ جایی که $|\lambda| \leq 1$ و در حالتی که $|\lambda| = 1$، ثابت b برابر با صفر می‌باشد. بعد از آن له در مرجع [13] نشان داد که عملگر ترکیبی وزن دار $C_{\psi,\varphi}$ روی $\mathcal{F}^2$ کران دار است اگر و فقط اگر $\varphi(z) = \varphi(0) + \lambda z$ جایی که $|\lambda| \leq 1$ و $sup\{|\psi(z)|^2 e^{|\varphi(z)|^2-|z|^2}: z \in \mathbb{C}\} < \infty$.
بنابراین از آنجا که در این مقاله به بررسی عملگرهای ترکیبی وزن‌دار کراندار $C_{\psi,\varphi}$ روی $\mathcal{F}^2$ پرداخته‌ایم، فرض خواهیم کرد که φ یک چند جمله‌ای از درجه حداکثر 1 باشد.

گزاره1.2. فرض کنید ψ_1 و ψ_2 دو تابع تام باشند. همچنین فرض کنید $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{C}$،

$|a_1| < 1$، $|a_2| < 1$، $\varphi_1(z) = a_1z + b_1$ و $\varphi_2(z) = a_2z + b_2$. اگر φ_1 و φ_2 دارای نقطه ثابت یکسان w باشند، در اینصورت

$$\sigma_p(C_{\psi_1,\varphi_1} + C_{\psi_2,\varphi_2}) \subseteq \left\{\psi_1(w) + \psi_2(w), \psi_1(w)\acute{\varphi}_1(w) + \psi_2(w)\acute{\varphi}_2(w), \psi_1(w)\left(\acute{\varphi}_1(w)\right)^2 + \psi_2(w)\left(\acute{\varphi}_2(w)\right)^2, \dots\right\}$$

اثبات. فرض کنید λ یک مقدار ویژه غیر صفر برای $C_{\psi_1,\varphi_1} + C_{\psi_2,\varphi_2}$ باشد. در اینصورت تابع تام غیر صفر $f \in \mathcal{F}^2$ وجود دارد، بطوری که

$$\left(C_{\psi_1,\varphi_1} + C_{\psi_2,\varphi_2}\right)\left(f(z)\right) = \lambda f(z) \qquad (1)$$

بنابراین

$$\psi_1(z)f(\phi_1(z)) + \psi_2(z)f(\phi_2(z)) = \lambda f(z). \qquad (2)$$

اکنون فرض کنید f در w صفری از مرتبه n داشته باشد. اگر $n=0$ باشد، با قرار دادن $z=w$ در رابطه (2) داریم

$$\psi_1(w)f(\varphi_1(w))+\psi_2(w)f(\varphi_2(w))=\lambda f(w).$$

از طرفی از آنجا که $\varphi_1(w)=\varphi_2(w)=w$، داریم

$$\lambda=\psi_1(w)+\psi_2(w).$$

حال فرض کنید $n>0$، $f^{(k)}$ مشتق مرتبه kام تابع f و $\alpha_{1,j}$ تابعی شامل ضرب‌های مختلف از مشتق‌های ψ_1 و φ_1 و $\alpha_{2,j}$ تابعی شامل ضرب‌های مختلف ψ_2 و φ_2 باشند. در اینصورت با گرفتن مشتق مرتبه nام از رابطه (2) داریم

$$\sum_{j=0}^{n-1}\alpha_{1,j}(z)f^{(j)}\left(\varphi_1(z)\right) + \sum_{j=0}^{n-1}\alpha_{2,j}(z)f^{(j)}\left(\varphi_2(z)\right) + \psi_1(z)f^{(n)}(\varphi_1(z))(\varphi_1'(z))^n + \psi_2(z)f^{(n)}(\varphi_2(z))(\varphi_2'(z))^n = \lambda f^{(n)}(z) \qquad (3)$$

(مقدار دقیق $\alpha_{1,j}$ و $\alpha_{2,j}$ در روند اثبات مهم نیست).

حال در رابطه (3) به جای z، w را قرار می‌دهیم. از آنجایی که f دارای صفری از مرتبه n در w می‌باشد دو سری بدست آمده در رابطه (3) برابر صفر می‌شوند. لذا

$$\lambda=\psi_1(w)(\varphi_1'(w))^n+\psi_2(w)(\varphi_2'(w))^n$$

و نتیجه مورد نظر حاصل می‌شود.

در لم بعد به معرفی زیر فضایی ناوردا برای عملگر $(C_{\psi_1,\varphi_1} + C_{\psi_2,\varphi_2})^*$ می‌پردازیم.

لم 2.2. فرض کنید ψ_1 و ψ_2 دو تابع تام باشند. همچنین فرض کنید $|a_1| < 1$، $|a_2| < 1$، $b_1, b_2 \in \mathbb{C}$ و توابع $\varphi_1(z) = a_1z + b_1$ و $\varphi_2(z) = a_2z + b_2$ باشند. اگر φ_1 و φ_2 دارای نقطه ثابت یکسان w باشند، در اینصورت برای هر عدد صحیح مثبت m، زیر فضای تولید شده توسط $\{K_w, K_w^{[1]}, \dots, K_w^{[m]}\}$، یک زیر فضای ناوردا برای عملگر $(C_{\psi_1,\varphi_1} + C_{\psi_2,\varphi_2})^*$ می‌باشد.

اثبات. فرض کنید f تابعی دلخواه در $\mathcal{F}^2$ و n عددی صحیح با این خاصیت که $n \le m$. با توجه به آنچه در اثبات گزاره قبل آورده شد، داریم:

$$\begin{aligned}
&\langle f, \left(C_{\psi_1,\varphi_1} + C_{\psi_2,\varphi_2}\right)^* K_w^{[n]}\rangle = \langle\left(C_{\psi_1,\varphi_1} + C_{\psi_2,\varphi_2}\right)f, K_w^{[n]}\rangle = \langle\psi_1.(f \circ \varphi_1) + \psi_2.(f \circ \varphi_2), K_w^{[n]}\rangle = \left(\psi_1.(f \circ \varphi_1) + \psi_2.(f \circ \varphi_2)\right)^{(n)}(w) = \\
&\sum_{j=0}^{n-1}\alpha_{1,j}(w)f^{(j)}(w) + \psi_1(w)\left(\acute{\varphi}_1(w)\right)^n f^{(n)}(w) + \sum_{j=0}^{n-1}\alpha_{2,j}(w)f^{(j)}(w) + \psi_2(w)\left(\acute{\varphi}_2(w)\right)^n f^{(n)}(w) = \\
&\sum_{j=0}^{n-1}\alpha_{1,j}(w)\langle f, K_w^{[j]}\rangle + \psi_1(w)\left(\acute{\varphi}_1(w)\right)^n\langle f, K_w^{[n]}\rangle + \sum_{j=0}^{n-1}\alpha_{2,j}(w)\langle f, K_w^{[j]}\rangle + \psi_2(w)\left(\acute{\varphi}_2(w)\right)^n\langle f, K_w^{[n]}\rangle = \\
&\langle f, \sum_{j=0}^{n-1}\left(\overline{\alpha_{1,j}(w) + \alpha_{2,j}(w)}\right)K_w^{[j]} + \overline{\left(\psi_1(w)\left(\acute{\varphi}_1(w)\right)^n + \psi_2(w)\left(\acute{\varphi}_2(w)\right)^n\right)}\, K_w^{[n]}\rangle.
\end{aligned}$$

از آنجایی که f را دلخواه در نظر گرفتیم، نتیجه می‌گیریم که

$$(C_{\psi_1,\varphi_1} + C_{\psi_2,\varphi_2})^* K_w^{[n]} = \sum_{j=0}^{n-1} \overline{(\alpha_{1,j}(w) + \alpha_{2,j}(w))} K_w^{[j]} + \overline{\left(\psi_1(w)\left(\acute{\varphi}_1(w)\right)^n + \psi_2(w)\left(\acute{\varphi}_2(w)\right)^n\right)} K_w^{[n]}. \quad (4)$$

بنابراین مطلب مورد نظر اثبات می‌شود.

در لم بعد یک مجموعه مستقل خطی پیدا کرده که در گزاره 4.2 برای مشخص کردن طیف $C_{\psi_1,\varphi_1} + C_{\psi_2,\varphi_2}$ مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

لم3.2. برای هر $w \in \mathbb{C}$ و هر عدد صحیح مثبت m $\{K_w, K_w^{[1]}, \dots, K_w^{[m]}\}$ مستقل خطی است.

اثبات. فرض کنید $z, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m \in \mathbb{C}$ باشند. قرار دهید،

$$\alpha_0 K_w(z) + \alpha_1 K_w^{[1]}(z) + \cdots + \alpha_m K_w^{[m]}(z) = 0\,.$$

در اینصورت داریم

$$\alpha_0 e^{\bar{w}z} + \alpha_1 z e^{\bar{w}z} + \cdots + \alpha_m z^m e^{\bar{w}z} = 0. \quad (5)$$

اکنون در رابطه (5) به جای z صفر قرار می‌دهیم. در اینصورت $\alpha_0 = 0$. حال با فاکتورگیری از $e^{\bar{w}z}$ در رابطه (5) و با توجه به اینکه $e^{\bar{w}z}$ در هیچ نقطه صفر نمی‌شود، داریم

$$\alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \cdots + \alpha_m z^m = 0.$$

بنابراین $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_m = 0$ و در نتیجه $\{K_w, K_w^{[1]}, \dots, K_w^{[m]}\}$ مستقل خطی است.

در گزاره زیر برخی از عضوهای طیف $C_{\psi_1,\varphi_1} + C_{\psi_2,\varphi_2}$ را پیدا می‌کنیم.

گزاره 4.2. فرض کنید ψ_1 و ψ_2 دو تابع تام باشند. همچنین فرض کنید $|a_1| < 1$، $|a_2| < 1$، $b_1, b_2 \in \mathbb{C}$ و $\varphi_1(z) = a_1 z + b_1$ و $\varphi_2(z) = a_2 z + b_2$ باشند. اگر φ_1 و φ_2 دارای نقطه ثابت یکسان w باشند، آنگاه برای هر عدد صحیح غیر منفی j، $\psi_1(w)(\varphi_1'(w))^j + \psi_2(w)(\varphi_2'(w))^j$ عضوی از طیف $C_{\psi_1,\varphi_1} + C_{\psi_2,\varphi_2}$ می‌باشد.

اثبات. فرض کنید Q_m زیر فضای تولید شده توسط $\{K_w, K_w^{[1]}, \dots, K_w^{[m]}\}$ باشد. از رابطه (4) برای پیدا کردن نمایش ماتریس $(C_{\psi_1,\varphi_1} + C_{\psi_2,\varphi_2})^*$ روی فضای تحدید شده Q_m استفاده می‌کنیم. با توجه به لم قبل $\{K_w, K_w^{[1]}, \dots, K_w^{[m]}\}$ یک پایه برداری برای فضای Q_m ایجاد می‌کنند. در اینصورت نمایش ماتریس $(C_{\psi_1,\varphi_1} + C_{\psi_2,\varphi_2})^*$ تحت Q_m به فرم زیر می‌باشد.

$$\begin{pmatrix} \overline{\psi_1(w)+\psi_2(w)} & * & \cdots & * \\ 0 & \overline{\psi_1(w)\acute{\varphi}_1(w)+\psi_2(w)\acute{\varphi}_2(w)} & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & * \\ 0 & 0 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \overline{\psi_1(w)(\acute{\varphi}_1(w))^m+\psi_2(w)(\acute{\varphi}_2(w))^m} \end{pmatrix}$$

که آن را ماتریس A_m می‌نامیم. لذا A_m یک ماتریس $(m+1)\times(m+1)$ بالا مثلثی است که * ها نمایش دهنده $\overline{\alpha_{1,j}(w)+\alpha_{2,j}(w)}$ها می‌باشند. از آنجایی که زیر فضای Q_m دارای بعد متناهی است، بنابراین بسته می‌باشد ([4]). بوضوح $\mathcal{F}^2 = Q_m \oplus Q_m^{\perp}$. لذا نمایش ماتریس $(C_{\psi_1,\varphi_1} + C_{\psi_2,\varphi_2})^*$ با این تجزیه به صورت زیر می‌باشد.

$$D = \begin{bmatrix} A_m & B \\ 0 & C_m \end{bmatrix}$$

(چون Q_m تحت $(C_{\psi_1,\varphi_1} + C_{\psi_2,\varphi_2})^*$ ناوردا می‌باشد، بنابراین گوشه سمت چپ پایین ماتریس صفر می‌شود). از آنجا که گوشه سمت چپ پایین ماتریس D، صفر و Q_m یک زیر فضای متناهی البعد است، لذا با توجه به لم 17.7، صفحه 270 از مرجع [5]، طیف عملگر $(C_{\psi_1,\varphi_1} + C_{\psi_2,\varphi_2})^*$ اجتماعی از طیف‌های A_m و C_m می‌باشد. از طرفی A_m یک ماتریس بالا مثلثی متناهی البعد است، لذا طیف آن شامل مقادیر روی‌قطر اصلی‌آن می‌باشد. پس مجموعه

$$\left\{\overline{\psi_1(w)+\psi_2(w)}, \overline{\psi_1(w)\varphi_1'(w)+\psi_2(w)\varphi_2'(w)}, \ldots, \overline{\psi_1(w)(\varphi_1'(w))^m+\psi_2(w)(\varphi_2'(w))^m}\right\}$$

زیر مجموعه طیف $(C_{\psi_1,\varphi_1} + C_{\psi_2,\varphi_2})^*$ می‌باشد. از طرفی چون m عددی دلخواه است، بنابراین می توان نتیجه گرفت که

$$\left\{\overline{\psi_1(w)(\varphi_1'(w))^j + \psi_2(w)(\varphi_2'(w))^j} : j \geq 0\right\} \subseteq \sigma((C_{\psi_1,\varphi_1} + C_{\psi_2,\varphi_2})^*)$$

و لذا برای هر عدد صحیح غیر منفی j، $\psi_1(w)(\varphi_1'(w))^j + \psi_2(w)(\varphi_2'(w))^j$ عضوی از $\sigma\left(C_{\psi_1,\varphi_1} + C_{\psi_2,\varphi_2}\right)$ می‌باشد.
در [13] له بیان می کند که اگر ψ و φ دو تابع تام باشند که ψ تابع صفر نباشد در اینصورت $C_{\psi,\varphi}$ روی $\mathcal{F}^2$ فشرده است اگر و تنها اگر عدد مختلط λ یافت شود بطوریکه $|\lambda| < 1$، $\varphi(z) = \varphi(0) + \lambda z$ و $\lim_{|z|\to\infty} |\psi(z)|^2 e^{|\varphi(z)|^2-|z|^2} = 0$.
در قضیه بعد به بررسی طیف عملگر $C_{\psi_1,\varphi_1} + C_{\psi_2,\varphi_2}$ وقتی که C_{ψ_1,φ_1} و C_{ψ_2,φ_2} فشرده باشند، می‌پردازیم.

قضیه 5.2. فرض کنید C_{ψ_1,φ_1} و C_{ψ_2,φ_2} دو عملگر ترکیبی وزن دار فشرده روی فضای $\mathcal{F}^2$ باشند. اگر φ_1 و φ_2 دارای نقطه ثابت w باشند، آنگاه

$$\sigma\left(C_{\psi_1,\varphi_1} + C_{\psi_2,\varphi_2}\right) = \{0\} \cup \left\{\psi_1(w)\left(\varphi_1'(w)\right)^n + \psi_2(w)\left(\varphi_2'(w)\right)^n : n \geq 0\right\}.$$

اثبات. از آنجا که $C_{\psi_1,\varphi_1} + C_{\psi_2,\varphi_2}$ عملگری فشرده روی فضای نامتناهی البعد $\mathcal{F}^2$ می‌باشد، $C_{\psi_1,\varphi_1} + C_{\psi_2,\varphi_2}$ معکوس پذیر نیست. بنابراین صفر درون طیف آن قرار دارد. از طرفی درگزاره قبل دیدیم که برای‌هر $n \geq 0$، $\psi_1(w)(\varphi_1'(w))^n + \psi_2(w)(\varphi_2'(w))^n$ عضوی از $\sigma\left(C_{\psi_1,\varphi_1} + C_{\psi_2,\varphi_2}\right)$ می‌باشد. این مطلب نشان می‌دهد که

$$\{0\} \cup \{\psi_1(w)(\varphi_1'(w))^n + \psi_2(w)(\varphi_2'(w))^n : n \geq 0\} \subseteq \sigma(C_{\psi_1,\varphi_1} + C_{\psi_2,\varphi_2}).$$

بنابراین با توجه به گزاره 1.2 و قضیه 1.7 صفحه 214 از مرجع [4] به راحتی نتیجه حاصل می‌شود.
فرض کنید H فضای هیلبرت و T یک عملگر خطی از H به H باشد. فشرده‌سازی[1] عملگر T از H به زیر فضای K را به صورت $P_K T_{|K} : K \to K$ تعریف می‌کنیم جایی که P_K تصویر متعامد از فضای هیلبرت H به توی K می‌باشد. دقت کنید که اگر K یک زیر فضای ناوردا برای عملگر T باشد، آنگاه فشرده سازی T روی K در واقع تحدید عملگر T روی K می‌باشد. فشرده سازی یک عملگر نتایج زیادی را به همراه دارد که از آن جمله می‌توان به این مطلب اشاره کرد که برد عددی فشرده‌سازی یک عملگر زیر مجموعه برد عددی آن عملگر می‌باشد که در اثبات قضیه بعد از این مطلب استفاده خواهد شد. در این قضیه به بررسی برد عددی عملگر ترکیبی وزن‌دار $C_{\psi_1,\varphi_1} + C_{\psi_2,\varphi_2}$ در حالتی که φ_1 و φ_2 دارای نقطه ثابت یکسان باشند، می‌پردازیم.

قضیه6.2. فرض کنید ψ یک تابع تام غیر صفر باشد. همچنین فرض کنید $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{C}$، $|a_1| < 1$، $|a_2| < 1$، $\varphi_1(z) = a_1 z + b_1$ و $\varphi_2(z) = a_2 z + b_2$ باشند. در اینصورت اگر دو تابع φ_1 و φ_2 دارای نقطه ثابت یکسان p باشند، آنگاه برد عددی $C_{\psi_1,\varphi_1} + C_{\psi_2,\varphi_2}$، شامل یک بیضی به کانون‌های $\psi_1(p) + \psi_2(p)$ و $a_1\psi_1(p) + a_2\psi_2(p)$، قطر بزرگ

$$\sqrt{|(1-a_1)\psi_1(p) + (1-a_2)\psi_2(p)|^2 + \left|\bar{p}(a_1-1)\psi_1(p) + \bar{p}(a_2-1)\psi_2(p) + \psi_1'(p) + \psi_2'(p)\right|^2}$$

و قطر کوچک

---

[1] Compression

$|\bar{p}(a_1-1)\psi_1(p)+\bar{p}(a_2-1)\psi_2(p)+\acute{\psi}_1(p)+\acute{\psi}_2(p)|$

می‌باشد.

اثبات. با توجه به نتیجه 2.1 از مرجع [16]، $C_{k_p,z-p}$ یکانی می‌باشد. بعلاوه گزاره 1.3 از مرجع [14] یا گزاره 1.3 از مرجع [13] بیان می‌کنند که $C^*_{k_{-p},z+p}=C_{k_p,z-p}$. اکنون قرار می‌دهیم

$$T=C_{k_{-p},z+p}\left(C_{\psi_1,\varphi_1}+C_{\psi_2,\varphi_2}\right)C^*_{k_{-p},z+p}.$$

با کمی محاسبات ساده و اینکه p نقطه ثابت برای φ_1 و φ_2 می‌باشد، داریم

$$T=C_{k_{-p},z+p}\left(C_{\psi_1,\varphi_1}+C_{\psi_2,\varphi_2}\right)C_{k_p,z-p}=C_{q_1,\tilde{\varphi}_1}+C_{q_2,\tilde{\varphi}_2}$$

جایی که

$$\tilde{\varphi}_1(z)=\varphi_1(z+p)-p=a_1(z+p)+b_1-p=a_1z$$

و

$$q_1(z)=k_{-p}(z)k_p\left(\varphi_1(z+p)\right)\psi_1(z+p)=e^{\bar{p}b_1+|p|^2(a_1-1)}e^{\bar{p}(a_1-1)z}\psi_1(z+p)=e^{\bar{p}(a_1-1)z}\psi_1(z+p).$$

مشابه روابط بالا $\tilde{\varphi}_2(z)=a_2z$ و

$$q_2(z)=e^{\bar{p}(a_2-1)z}\psi_2(z+p).$$

از طرفی با توجه به تعریف عملگر T واضح است که q_1 و q_2 متعلق به $\mathcal{F}^2$ می‌باشند. لذا فرض کنید سری نمایش q_1 و q_2 در فضای $\mathcal{F}^2$ بصورت $q_1(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\hat{q}_{1,j}\frac{z^j}{\sqrt{j!}}$ و $q_2(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\hat{q}_{2,j}\frac{z^j}{\sqrt{j!}}$ باشند. دقت کنید که

$$\hat{q}_{1,0}=\langle q_1,1\rangle=\langle q_1,K_0\rangle=q_1(0)$$

و

$$\hat{q}_{1,1}=\langle q_1,\tfrac{z}{\sqrt{1!}}\rangle=\langle q_1,K_0^{[1]}\rangle=\acute{q}_1(0).$$

به همین ترتیب ثابت می شود که $\hat{q}_{2,0}=q_2(0)$ و $\hat{q}_{2,1}=\acute{q}_2(0)$. از آنجا که $C_{\psi_1,\varphi_1}+C_{\psi_2,\varphi_2}$ با $C_{q_1,\tilde{\varphi}_1}+C_{q_2,\tilde{\varphi}_2}$ هم ارز یکانی می‌باشد، داریم

$$W(C_{\psi_1,\varphi_1}+C_{\psi_2,\varphi_2})=W(C_{q_1,\tilde{\varphi}_1}+C_{q_2,\tilde{\varphi}_2}).$$

اکنون فرض کنید Q، زیر فضای تولید شده توسط $\{1,z\}$ باشد. قرار می‌دهیم $e_1(z)=1$ و $e_2(z)=z$. بنابراین

$$(C_{q_1,\tilde{\varphi}_1}+C_{q_2,\tilde{\varphi}_2})(e_1)(z)=q_1(z)+q_2(z)$$

و

$$(C_{q_1,\tilde{\varphi}_1}+C_{q_2,\tilde{\varphi}_2})(e_2)(z)=a_1zq_1(z)+a_2zq_2(z).$$

پس فشرده‌سازی $C_{q_1,\tilde{\varphi}_1}+C_{q_2,\tilde{\varphi}_2}$ تحت Q دارای نمایش ماتریس زیر می‌باشد

$$\begin{bmatrix} q_1(0)+q_2(0) & 0 \\ q_1'(0)+q_2'(0) & a_1q_1(0)+a_2q_2(0)\end{bmatrix}.$$

بنابراین با توجه به لم 1-1-1 صفحه 3 از مرجع [12] برد عددی فشرده‌سازی $C_{q_1,\tilde{\varphi}_1}+C_{q_2,\tilde{\varphi}_2}$ تحت Q یک بیضی با کانون‌های $q_1(0)+q_2(0)$ و $a_1q_1(0)+a_2q_2(0)$، قطر بزرگ

$$\sqrt{|(1-a_1)q_1(0)+(1-a_2)q_2(0)|^2+|q_1'(0)+q_2'(0)|^2}$$

و قطر کوچک $|q_1'(0)+q_2'(0)|$ می‌باشد. همچنین $q_1(0)=\psi_1(p)$، $q_2(0)=\psi_2(p)$،

$$\acute{q}_1(0)=\bar{p}(a_1-1)\psi_1(p)+\acute{\psi}_1(p)$$

و

$$\acute{q}_2(0)=\bar{p}(a_2-1)\psi_2(p)+\acute{\psi}_2(p).$$

بنابراین ازآنجایی که برد عددی فشرده سازی یک عملگر، زیر مجموعه برد عددی آن عملگر می‌باشد، نتیجه مورد نظر بدست می‌آید.

فهرست منابع

[1] P. S. Bourdon and J. H. Shapiro, The numerical ranges of automorphic composition operators, *J. Math. Anal. Appl.* **251** (2000), 839-854.

[2] P. S. Bourdon and J. H. Shapiro, When is zero in the numerical range of a composition operators? *Integral Equations Operator Theory* **44** (2002), 410-441.

[3] B. J. Carswell, B. D. MacCluer and A. Schuster, *Composition operators on the Fock space*, Acta Sci. Math. (Szeged) **69** (2003), 871-887.

[4] J. B. Conway, *A Course in Functional Analysis*, Second Edition, Springer-Verlag, New York, 1990.

[5] C. C. Cowen and B. D. MacCluer, *Composition Operators on Spaces of Analytic Functions*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1995.

[6] M. Fatehi, *Weighted composition operators on the Fock space*, Operators and Matrices, **13** (2019), 461-469.

[7] M. Fatehi, Numerical ranges of weighted composition operators, J. Math. Anal. Appl. **477** (2019), 875-884.

[8] M. Fatehi and M. Haji Shaabani, *Certain nontrivially essentially self-adjoint weighted composition operators on* H^2 *and* A_α^2, *Complex Variables and Elliptic Equations*, **59** (2014), 1626-1635.

[9] M. Fatehi and M. Haji Shaabani, *Some essentially normal weighted composition operators on the weighted Bergman spaces, Complex Variables and Elliptic Equations*, **60** (2015), 1205-1216.

[10] M. Fatehi and M. Haji Shaabani, *Norms of hyponormal weighted composition operators on the Hardy and weighted Bergman spaces, Operators and Matrices*, **12** (2018), 997-1007.

[11] G. Gunatillake, M. Jovovic and W. Smith, Numerical ranges of weighted composition operators, *J. Math. Anal. Appl.* **413** (2014), 458-475.

[12] K. E. Gustafon and K. M. Rao, The Numerical Range, The field of Values of Linear Operators and Matrices, Springer, New York 1997.

[13] T. Le, *Normal and isometric weighted composition operators on the Fock space*, Bull. London Math.Soc.**46**(2014),847-856.

[14] A. Negahdari and M. Fatehi, *Adjoints of some weighted composition operators on the Fock space, Italian Journal of Pure and Applied Mathematics, to appear.*

[15] S. Ueki, *Weighted composition operator on the Fock space*, Proc. Amer. Math. Soc. **135** (2007), 1405-1410.

[16] L. Zhao, *Unitary weighted composition operators on the Fock space of* $\mathbb{C}^n$, Complex Anal. Oper. Theory **8** (2014), 581-590.

[17] L. Zhao, *Invertible weighted composition operators on the Fock space of* $\mathbb{C}^n$, J. Funct Spaces 2015. Art. ID 250358.

[18] L. Zhao and C. Pang, *A class of weighted composition operators on the Fock space*, Journal of Mathematical Research with Applications, **35** (2015), 303-310.

[19] K. Zhu, Analysis on Fock Spaces, Graduate Texts in Mathematics 263, Springer, New York, 2012.