دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال نهم، شماره چهل و پنجم، آذر و دی ۱۴۰۲
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

حساب دیفرانسیل و معادلات دیفرانسیل بولی

سید سیف‌اله موسی‌زاده*

دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه کاشان، کاشان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۱۰/۲۲ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۳/۱۱

چکیده

در این مقاله، ابتدا بخش نظری حساب دیفرانسیل بولی را به همراه مثال‌های کافی تشریح می‌کنیم. سپس به معرفی معادلات دیفرانسیل بولی که شامل مشتقات بولی یک تابع بولی نامعین است، می‌پردازیم و مشاهده می‌شود که متفاوت از یک معادله بولی، جواب یک معادلهٔ دیفرانسیل بولی، مجموعه‌ای از توابع بولی است و در نتیجه یک معادلهٔ دیفرانسیل بولی امکان توصیف و به‌کارگیری مجموعه‌هایی از توابع بولی را فراهم می‌کند.

واژه‌های کلیدی: جبر بولی، تابع منطقی، حساب دیفرانسیل بولی، معادلات دیفرانسیل بولی.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email:s.mosazadeh@kashanu.ac.ir

۱- مقدمه

حساب دیفرانسیل بولی تقریبا از سال ۱۹۷۰ میلادی و بر اساس ایده‌های اصلی رید، هافمن و ایکرز پایه‌گذاری شد [۳و۵و۶]. اولین مرکز تحقیقاتی بزرگ در مواجهه و پرداختن به نظریهٔ حساب دیفرانسیل بولی و کاربردهای آن، دانشگاه صنعتی کمنیتس آلمان بود که در سال ۱۹۸۱، اولین یادداشت‌ها درباره این نوع حساب دیفرانسیل توسط بوچمن و پاستوف [۱] و همچنین به صورت یک رساله دکتری توسط اشتاین‌باخ منتشر شد [۷] و در سال ۲۰۰۴، ارائه جامعی در این‌باره در فصل ۴ از مرجع [۴] انجام گرفت.

حساب دیفرانسیل بولی، یک نظریهٔ قوی مبتنی بر تعاریف دیفرانسیل‌های متغیرهای بولی، دیفرانسیل‌ها و عملگرهای دیفرانسیلی توابع بولی و مشتقات ساده، پاره‌ای و برداری مراتب اول و بالاتر توابع بولی است و به نوعی جبر بولی را گسترش می‌دهد. اگر چه جبرهای بولی به واسطهٔ ارزش‌های توابع بولی مشهورند اما حساب دیفرانسیل بولی این امکان را فراهم می‌کند تا تغییرات مقادیر توابع بولی ارزیابی شوند. روابط و قضایای ارائه شده در این نوع حساب دیفرانسیل، سطح وسیعی از کاربردهای آن را به روی علاقمندان و پژوهشگران می‌گشاید.

به علت شباهت ساختارهای داده‌های اساسی به‌کار رفته در حساب دیفرانسیل بولی با جبرهای بولی، حساب دیفرانسیل بولی می‌تواند در هر کاری که به وسیلهٔ توابع و معادلات بولی همراه با جبر بولی توصیف می‌شود، به‌کار گرفته شود. به این علت، در مطالعه تغییرات مقادیر متغیرهای بولی یا توابع منطقی در مسائلی از قبیل تجزیه و تحلیل و نیز سنتز توابع منطقی، حساب دیفرانسیل بولی نقشی کلیدی ایفا می‌کند و در یافتن یک راه‌حل برای رسیدن به پاسخ مسأله، مفید واقع می‌شود (درباره کاربردهای بیشتر این نوع حساب دیفرانسیل، [۲و۴و۹و۱۰] را ببینید).

در مقالهٔ حاضر، ابتدا در بخش ۲، تعاریف و مفاهیم اصلی از قبیل دیفرانسیل متغیرها و توابع منطقی، مشتق‌های ساده و پاره‌ای، و همچنین مینیمم و ماکزیمم ساده و مراتب بالاتر توابع منطقی که حساب دیفرانسیل بولی بر پایهٔ آن‌ها بنا نهاده شده است را بیان می‌کنیم و برخی قضایا و نتایج مهم را بیان کرده و اثبات آن‌ها را ارائه می‌کنیم و سعی می‌شود با بیان مثال‌های کافی، این مفاهیم به خوبی تبیین و تشریح شوند. به این ترتیب، زمینهٔ لازم برای ورود به بخش ۳ که مبتنی بر این مفاهیم است، فراهم می‌شود. سپس در بخش ۳، به موضوع معادلات دیفرانسیل بولی می‌پردازیم که فصل مهمی از کاربردهای حساب دیفرانسیل بولی به شمار می‌آید. ما در این بخش، کلاس ساده‌ای از معادلات دیفرانسیل بولی که شامل دو عبارت، یکی دارای مشتقات پاره‌ای یک تابع بولی مجهول نسبت به متغیرهایش و دیگری یک تابع منطقی معلوم است را در نظر می‌گیریم و به برخی سوالات دربارهٔ این نوع معادلات دیفرانسیل از جمله وجود و یکتایی جواب برای آن پاسخ می‌دهیم و ماهیت جواب‌های آن در مقایسه با جواب‌های معادلات بولی بررسی می‌شود. از نتایج قابل توجه و تامل‌برانگیز در این بخش دربارهٔ معادلات دیفرانسیل بولی آن است که مشابه آنچه که برای معادلات دیفرانسیل معمولی خطی غیرهمگن از مرتبهٔ دو و بالاتر، جواب عمومی به شکل مجموع جواب عمومی معادلهٔ همگن نظیر با جواب خصوصی معادلهٔ غیرهمگن ارائه می‌شود، برای کلاس وسیعی از معادلات دیفرانسیل بولی نیز این حکم صادق است.

لازم به ذکر است که هدف این مقاله آشنایی خوانندگان با حساب دیفرانسیل بولی و به دنبال آن معادلات دیفرانسیل بولی و کاربردهای آنها است تا به این طریق، فصل جدیدی از حساب دیفرانسیل و نیز معادلات دیفرانسیل به روی علاقمندان و محققان گشوده شود. بنابراین با توجه به فضای

محدود این مقاله، بخش نظری اصلی حساب دیفرانسیل بولی و معادلات دیفرانسیل بولی را بیان کرده و از بیان مطالب و نتایج اضافی در این‌باره صرف‌نظر شده است.

۲- حساب دیفرانسیل بولی

در این بخش، مفاهیمی از قبیل دیفرانسیل متغیرهای بولی، دیفرانسیل توابع بولی، دیفرانسیل‌های پاره‌ای، مشتقات ساده و برداری توابع بولی به همراه مثال‌های کافی و نیز برخی ویژگی‌های مهم بین آن‌ها را بیان می‌کنیم و مقدمات لازم برای ورود به بخش ۳ فراهم می‌شود.

۲-۱ تعاریف و نتایج اولیه

تعریف ۲-۱: یک تابع n-متغیرهٔ بولی، تابعی است مانند f از B^n به توی B، که در آن $B = \{0,1\}$، n عددی طبیعی و B^n نیز ضرب دکارتی n-ام مجموعهٔ B با خودش است. همچنین یک معادلهٔ بولی، یک تساوی بین دو تابع بولی است و جواب آن مجموعه‌ای از بردارهای بولی است، یعنی اگر f و g دو تابع منطقی باشند آن‌گاه $f(x) = g(x)$ یک معادلهٔ منطقی است و جواب آن یک مجموعه از بردارهای بولی b است به طوری که $f(b) = g(b) = 0$ یا $f(b) = g(b) = 1$.

در یک نقطهٔ معین از زمان، یک متغیر بولی x_i می‌تواند یکی از مقادیر 0 یا 1 را اختیار کند. این متغیر، اطلاعاتی دربارهٔ مقدار واقعی نقطهٔ داده‌شده در اختیار ما قرار می‌دهد اما هیچ اطلاعاتی دربارهٔ تغییر این مقدار به ما نمی‌دهد. بنابراین به منظور از بین بردن این فاصله، دیفرانسیلِ بولیِ یک متغیر بولی را تعریف کرده و به دنبال آن، تعریف دیفرانسیل‌های یک تابع منطقی را بیان می‌کنیم.

تعریف ۲-۲: اگر x_i یک متغیر بولی باشد آن‌گاه دیفرانسیل x_i به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$dx_i = \begin{cases} 1 & \text{اگر مقدار متغیر } x_i \text{ تغییر کند} \\ 0 & \text{اگر مقدار متغیر } x_i \text{ تغییر نکند} \end{cases}$$

توجه شود که دیفرانسیلِ یک متغیر منطقی، خود یک متغیر منطقی است. بنابراین تمامی قراردادهای مربوط به متغیرهای منطقی برای دیفرانسیل آن‌ها نیز برقرارند. همچنین فضای بولیِ همهٔ بردارهای دیفرانسیلی dx_i را با dB نمایش می‌دهیم.
در ادامه یادآوری می‌کنیم که $\wedge$، $\vee$ و $\oplus$ به ترتیب عطف منطقی، فصل منطقی و یای مانع جمع هستند.
تعریف ۲-۳: فرض کنید

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

یک تابع منطقی n -متغیره باشد. آن‌گاه دیفرانسیل تابع $f(x)$ نسبت به همهٔ متغیرهای $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ به شکل

$$d_x f(x) = f(x) \oplus f(x \oplus dx)$$

تعریف می‌شود.
با توجه به تعریف فوق، $d_x f(x)$ نگاشتی از $B^n \times dB^n$ به‌توی B است که به متغیرهای (x, dx) وابسته است و بیانگر تغییرات مقادیر تابع $f(x)$ است.
به مثال زیر توجه کنید.
مثال ۲-۴: تابع

$$f(a,b) = a \vee \bar{b}$$

را در نظر بگیرید. با توجه به تعریف قبل داریم

$$d_{(a,b)} f(a,b) = (a \vee \bar{b}) \oplus ((a \oplus da) \vee \overline{(b \oplus db)})$$

$$= (a \oplus \bar{b} \oplus a\bar{b}) \oplus \left((a \oplus da) \oplus \overline{(b \oplus db)} \oplus (a \oplus da)\overline{(b \oplus db)}\right)$$
$$= a \oplus \bar{b} \oplus a\bar{b} \oplus a \oplus da \oplus \bar{b} \oplus db \oplus (a \oplus da)(\bar{b} \oplus db)$$
$$= a\bar{b} \oplus da \oplus db \oplus a\bar{b} \oplus adb \oplus \bar{b}da \oplus dadb$$

$$= \bar{a}db \oplus bda \oplus dadb$$
$$= \bar{a}(da \oplus \overline{da})db \oplus bda(db \oplus \overline{db}) \oplus dadb$$
$$= \bar{a}\,\overline{da}db \oplus bda\overline{db} \oplus (a \oplus b)dadb$$
$$= \bar{a}\,\overline{da}db \vee bda\overline{db} \vee (a \oplus b)dadb.$$

تعریف ۲-۵: فرض کنید

$$f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

یک تابع منطقی n-متغیره باشد. آن‌گاه

$$\mathrm{Min}_x f(x) = f(x) \wedge f(x \oplus dx),$$
$$\mathrm{Max}_x f(x) = f(x) \vee f(x \oplus dx),$$

به ترتیب مینیمم دیفرانسیل و ماکزیمم دیفرانسیل تابع منطقی $f(x)$ نسبت به همه متغیرهای $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$، و

$$F(x, dx) = f(x) \wedge \left(\wedge_{i=1}^{n} \left(dx_i \vee \overline{dx_i}\right)\right)$$

بسط دیفرانسیل تابع $f(x)$ نسبت به همهٔ متغیرهای $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ نامیده می‌شود. برای درک بهتر مفاهیم فوق، به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۲-۶: تابع

$$f(a, b) = a \vee \bar{b}$$

را مجددا در نظر بگیرید. بر اساس تعریف ۲-۵ خواهیم داشت

$$\mathrm{Min}_{(a,b)} f(a, b) = \left(a \vee \bar{b}\right) \wedge ((a \oplus da) \vee \overline{(b \oplus db)})$$
$$= \left(a \vee \bar{b}\right) \wedge (a\overline{da} \vee \bar{a}da \vee \bar{b}\,\overline{db} \vee bdb)$$
$$= a\overline{da} \vee a\bar{b}\,\overline{db} \vee abdb \vee a\bar{b}\,\overline{da} \vee \bar{a}\bar{b}da \vee \bar{b}\,\overline{db}$$
$$= a\overline{da} \vee abdb \vee \bar{a}\bar{b}da \vee \bar{b}\,\overline{db}$$
$$= a\overline{da}\,\overline{db} \vee a\overline{da}db \vee ab\overline{da}db \vee abdadb \vee \bar{a}\bar{b}da\overline{db} \vee \bar{a}\bar{b}dadb \vee \bar{b}\overline{da}\,\overline{db} \vee \bar{b}da\overline{db}$$
$$= a\overline{da}\,\overline{db} \vee a\overline{da}db \vee abdadb \vee \bar{a}\bar{b}dadb \vee \bar{b}\overline{da}\,\overline{db} \vee \bar{b}da\overline{db}$$

$$= \left(a \vee \bar{b}\right)\overline{da}\,\overline{db} \vee a\overline{da}db \vee \bar{b}da\overline{db} \vee (a \oplus b)dadb,$$

$$\mathrm{Max}_{(a,b)} f(a, b) = \left(a \vee \bar{b}\right) \vee ((a \oplus da) \vee \overline{(b \oplus db)})$$
$$= a \vee \bar{b} \vee a\overline{da} \vee \bar{a}da \vee \bar{b}\,\overline{db} \vee bdb$$
$$= a \vee \bar{b} \vee da \vee db$$
$$= \overline{\bar{a}b\overline{da}\,\overline{db}}.$$

همچنین برای تابع F به‌دست می‌آوریم

$$F(a, b, da, db) = f(a, b)\left(da \vee \overline{da}\right)\left(db \vee \overline{db}\right)$$
$$= \left(a \vee \bar{b}\right)\left(da \vee \overline{da}\right)\left(db \vee \overline{db}\right)$$
$$= \left(a\bar{b} \vee ab \vee \bar{a}\bar{b}\right)\left(dadb \vee da\overline{db} \vee \overline{da}db \vee \overline{da}\,\overline{db}\right).$$

با استفاده از تعریف ۲-۵، دو رابطهٔ مهم بین توابع $d_x f(x)$، $\mathrm{Min}_x f(x)$، $\mathrm{Max}_x f(x)$ و $F(x, dx)$ را می‌توان نتیجه گرفت که در قضیهٔ زیر آمده است.

قضیه ۲-۷: برای هر تابع منطقی $f(x)$ رابطه‌های زیر برقرار است:

$$\mathrm{Min}_x f(x) \le F(x, dx) \le \mathrm{Max}_x f(x),$$
$$d_x f(x) \oplus \mathrm{Min}_x f(x) \oplus \mathrm{Max}_x f(x) = 0.$$

۲-۲ دیفرانسیل‌های پاره‌ای

در تعاریف زیر، $x_0 = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ و $x_1 = (x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n)$، $1 \le m < n$،
دو مجموعهٔ مجزا از هم و شامل متغیرهای بولی هستند.

تعریف ۲-۸: هرگاه

$$f(x_0, x_1) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x)$$

یک تابع منطقی n-متغیره باشد آن‌گاه

$$d_{x_0} f(x_0, x_1) = f(x_0, x_1) \oplus f(x_0 \oplus dx_0, x_1)$$

دیفرانسیل پاره‌ای تابع منطقی $f(x_0, x_1)$ نسبت به مجموعهٔ متغیرهای $x_0 = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ نامیده می‌شود. $d_{x_0} f(x)$، یک تابع منطقی وابسته

به متغیرهای (x, dx_0) است که $B^n \times dB^m$ را به توی B می‌نگارد.

مثال۲-۹: تابع منطقی سه متغیرهٔ $f(a,b,c) = \bar{a}\bar{b}\bar{c} \oplus ab$ را در نظر بگیرید. با توجه به تعریف ۲-۸، دیفرانسیل پاره‌ای $d_{(a,b)}f(a,b,c)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$
\begin{aligned}
d_{(a,b)}f(a,b,c) &= \left(\bar{a}\bar{b}\bar{c} \oplus ab\right) \oplus ((\overline{a \oplus da})(\overline{b \oplus db})\bar{c} \oplus (a \oplus da)(b \oplus db)) \\
&= \bar{a}\bar{b}\bar{c} \oplus ab \oplus \bar{a}\bar{b}\bar{c} \oplus \bar{a}\bar{c}db \oplus \bar{b}\bar{c}da \oplus \bar{c}dadb \oplus ab \oplus adb \oplus bda \oplus dadb \\
&= \bar{a}\bar{c}db \oplus \bar{b}\bar{c}da \oplus \bar{c}dadb \oplus adb \oplus bda \oplus dadb \\
&= \bar{a}\bar{c}dadb \oplus \bar{a}\bar{c}\overline{da}db \oplus \bar{b}\bar{c}dadb \oplus \bar{b}\bar{c}da\overline{db} \oplus \bar{c}dadb \oplus adadb \oplus a\overline{da}db \oplus bdadb \oplus bda\overline{db} \oplus dadb \\
&= (\bar{a}\bar{c} \oplus a)\overline{da}db \oplus (\bar{b}\bar{c} \oplus b)da\overline{db} \oplus (\bar{a}\bar{c} \oplus \bar{b}\bar{c} \oplus \bar{c} \oplus a \oplus b \oplus 1)dadb \\
&= (\bar{c} \vee a)\overline{da}db \oplus (\bar{c} \vee b)da\overline{db} \oplus \left(ac \vee \bar{b}c\right)dadb.
\end{aligned}
$$

تعریف۲-۱۰: تابع منطقی n-متغیرهٔ $f(x) = f(x_0, x_1)$ را در نظر بگیرید. مینیمم دیفرانسیل پاره‌ای، ماکزیمم دیفرانسیل پاره‌ای و بسط دیفرانسیل پاره‌ای تابع $f(x)$ نسبت به مجموعهٔ متغیرهای $x_0 = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ به ترتیب به شکل زیر تعریف می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Min}_{x_0} f(x_0, x_1) &= f(x_0, x_1) \wedge f(x_0 \oplus dx_0, x_1), \\
\mathrm{Max}_{x_0} f(x_0, x_1) &= f(x_0, x_1) \vee f(x_0 \oplus dx_0, x_1),
\end{aligned}
$$

$$
F(x_0, x_1, dx_0) = f(x_0, x_1) \wedge \left(\wedge_{i=1}^{n} \left(dx_i \vee \overline{dx_i}\right)\right).
$$

مشابه آنچه برای قضیهٔ ۲-۷ بیان شد، می‌توان رابطه‌های زیر را برای هر تابع $f(x)$ اثبات کرد.

$$\mathrm{Min}_{x_0} f(x_0, x_1) \le F(x_0, x_1, dx_0) \le \mathrm{Max}_{x_0} f(x_0, x_1), \quad (۱)$$

$$d_{x_0} f(x_0, x_1) \oplus \mathrm{Min}_{x_0} f(x_0, x_1) \oplus \mathrm{Max}_{x_0} f(x_0, x_1) = 0. \quad (۲)$$

۲-۳ دیفرانسیل‌های مراتب بالاتر

فرض کنید متغیرهای x_0 و x_1 همان‌هایی باشند که در بخش قبل معرفی شده‌اند.

تعریف۲-۱۱: هرگاه

$f(x) = f(x_0, x_1)$

یک تابع منطقی باشد. آن‌گاه دیفرانسیل مرتبهٔ m تابع f نسبت به مجموعهٔ متغیرهای x_0 به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$
d^m_{x_0} f(x_0, x_1) = d_{x_m}\left(\dots\left(d_{x_2}\left(d_{x_1} f(x_0, x_1)\right)\right)\dots\right).
$$

مثال۲-۱۲: تابع

$f(a,b,c) = \bar{a}\bar{b}\bar{c} \oplus ab$

را در نظر بگیرید. با توجه به تعریف ۲-۱۱، دیفرانسیل پاره‌ای مرتبهٔ دوم تابع $f(a,b,c)$ نسبت به (b,c) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$
\begin{aligned}
d^2_{(b,c)} f(a,b,c) &= d_c\left(d_b\left(\bar{a}\bar{b}\bar{c} \oplus ab\right)\right) \\
&= d_c\left(\bar{a}\bar{b}\bar{c} \oplus ab \oplus \bar{a}(\overline{b \oplus db})\bar{c} \oplus a(b \oplus db)\right) \\
&= d_c\left(\bar{a}\bar{b}\bar{c} \oplus ab \oplus \bar{a}\bar{b}\bar{c} \oplus \bar{a}\bar{c}db \oplus ab \oplus adb\right) \\
&= d_c(\bar{a}\bar{c}db \oplus adb) \\
&= \bar{a}\bar{c}db \oplus adb \oplus \bar{a}(\overline{c \oplus dc})db \oplus adb \\
&= (\bar{a}\bar{b}\bar{c} \oplus \bar{a}b\bar{c} \oplus \bar{a}\bar{b}c \oplus \bar{a}bc)dbdc.
\end{aligned}
$$

تعریف ۲-۱۳: هرگاه

$$f(x) = f(x_0, x_1)$$

یک تابع منطقی باشد، آن‌گاه

$$\mathrm{Min}_{x_0}^{m} f(x_0, x_1) = \mathrm{Min}_{x_m}\left(\dots\left(\mathrm{Min}_{x_2}\left(\mathrm{Min}_{x_1} f(x_0, x_1)\right)\right)\dots\right),$$

$$\mathrm{Max}_{x_0}^{m} f(x_0, x_1) = \mathrm{Max}_{x_m}\left(\dots\left(\mathrm{Max}_{x_2}\left(\mathrm{Max}_{x_1} f(x_0, x_1)\right)\right)\dots\right)$$

به ترتیب مینیمم دیفرانسیل مرتبهٔ m و ماکزیمم دیفرانسیل مرتبهٔ m تابع $f(x)$ نسبت به مجموعهٔ متغیرهای x_0 نامیده می‌شوند.

به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۲-۱۴: تابع منطقی دو متغیرهٔ

$$f(a, b) = \bar{a} \vee b$$

را در نظر بگیرید. با توجه به تعریف ۲-۱۳، مینیمم دیفرانسیل مرتبهٔ دوم این تابع نسبت به (a, b) به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Min}_{(a,b)}^{2} f(a, b) \\
&= \mathrm{Min}_b(\mathrm{Min}_a(\bar{a} \vee b)) \\
&= \mathrm{Min}_b\left((\bar{a} \vee b) \wedge (\overline{(a \oplus da)} \vee b)\right) \\
&= \mathrm{Min}_b\left((\bar{a} \vee b) \wedge (ada \vee \bar{a}\overline{da} \vee b)\right) \\
&= \mathrm{Min}_b\left(\bar{a}\overline{da} \vee \bar{a}b \vee abda \vee \bar{a}b\overline{da} \vee b\right) \\
&= \mathrm{Min}_b\left(\bar{a}\overline{da} \vee b\right) \\
&= (\bar{a}\overline{da} \vee b) \wedge (\bar{a}\overline{da} \vee (b \oplus db)) \\
&= (\bar{a}\overline{da} \vee b) \wedge (\bar{a}\overline{da} \vee b\overline{db} \vee \bar{b}db) \\
&= \bar{a}\overline{da} \vee \bar{a}b\overline{da}\,\overline{db} \vee \bar{a}\bar{b}\overline{da}\,db \vee \bar{a}b\overline{da} \\
&\qquad \vee b\overline{db} \\
&= \bar{a}\overline{da}\,\overline{db} \vee \bar{a}\overline{da}\,db \vee b\overline{da}\,\overline{db} \vee bda\overline{db} \\
&= (\bar{a} \vee b)\overline{da}\,\overline{db} \vee \bar{a}\overline{da}\,db \vee bda\overline{db}.
\end{aligned}$$

به‌طور مشابه به‌دست می‌آوریم

$$\mathrm{Max}_{(a,b)}^{2} f(a, b) = \overline{a\bar{b}\overline{da}\,\overline{db}}.$$

با توجه به تعاریف ۲-۱۰ و ۲-۱۳، برای هر تابع منطقی $f(x) = f(x_0, x_1)$ رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Min}_{x_0}^{m} f(x_0, x_1) &\le F(x_0, x_1, dx_0) \\
&\le \mathrm{Max}_{x_0}^{m} f(x_0, x_1).
\end{aligned}$$

۲-۴ مشتق‌های ساده و برداری توابع منطقی

ابتدا مفاهیم مشتق ساده، مینیمم ساده و ماکزیمم ساده یک تابع منطقی چند متغیره را نسبت به یک متغیر به همراه یک مثال شرح می‌دهیم و برخی روابط مهم بین آن‌ها را بیان می‌کنیم.

تعریف ۲-۱۵: هرگاه

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

یک تابع منطقی n -متغیره باشد. در این صورت

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x_i} &= f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \\
&\qquad \oplus f(x_1, \dots, \overline{x_i}, \dots, x_n),
\end{aligned}$$

مشتق ساده و

$$\begin{aligned}
\min_{x_i} f(x) &= f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \\
&\qquad \wedge f(x_1, \dots, \overline{x_i}, \dots, x_n), \\
\max_{x_i} f(x) &= f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \\
&\qquad \vee f(x_1, \dots, \overline{x_i}, \dots, x_n)
\end{aligned}$$

به ترتیب مینیمم ساده و ماکزیمم ساده تابع $f(x)$ نسبت به متغیر x_i نامیده می‌شوند.

مثال ۲-۱۶: تابع منطقی

$$f(a, b, c) = \bar{a}\bar{b}\bar{c} \oplus ab$$

را در نظر بگیرید. طبق تعریف قبل، مقادیر $\frac{\partial f(a,b,c)}{\partial c}$، $\min_c f(a, b, c)$ و $\max_c f(a, b, c)$ نسبت به متغیر c به صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial f(a, b, c)}{\partial c} = f(a, b, c) \oplus f(a, b, \bar{c}) \\
&= \left(\bar{a}\bar{b}\bar{c} \oplus ab\right) \oplus \left(\bar{a}\bar{b}c \oplus ab\right) \\
&= \bar{a}\bar{b}(\bar{c} \oplus c) = \bar{a}\bar{b},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\min_c f(a, b, c) = f(a, b, c) \wedge f(a, b, \bar{c}) \\
&= \left(\bar{a}\bar{b}\bar{c} \oplus ab\right) \wedge \left(\bar{a}\bar{b}c \oplus ab\right) = ab,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\max_c f(a, b, c) = f(a, b, c) \vee f(a, b, \bar{c}) \\
&= \left(\bar{a}\bar{b}\bar{c} \oplus ab\right) \vee \left(\bar{a}\bar{b}c \oplus ab\right) \\
&= \bar{a}\bar{b}(\bar{c} \vee c) \vee ab = \bar{a}\bar{b} \vee ab.
\end{aligned}$$

روابط متعددی بین مشتقات ساده، مینیمم ساده و ماکزیمم ساده وجود دارد که از بین آن‌ها می‌توان به رابطه‌های بیان شده در قضیهٔ زیر اشاره کرد.

قضیه ۲-۱۷: برای تابع منطقی

$$f(x) = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

رابطه‌های زیر برقرار است:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f(x_i = 0) \oplus f(x_i = 1),$$

(۳)

$$\min_{x_i} f(x) = f(x_i = 0) \wedge f(x_i = 1),$$
$$\max_{x_i} f(x) = f(x_i = 0) \vee f(x_i = 1),$$

$$\min_{x_i} f(x) \le f(x) \le \max_{x_i} f(x),$$
$$\min_{x_i} f(x) \oplus \frac{\partial f}{\partial x_i} \oplus \max_{x_i} f(x) = 0.$$

اثبات. با توجه به تعریف مشتق ساده و تساوی زیر،

$$f(x) = \overline{x_i} f(x_i = 0) \oplus x_i f(x_i = 1),$$

می‌توان نوشت

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \oplus f(x_1, \dots, \overline{x_i}, \dots, x_n)$$
$$= \left(\overline{x_i} f(x_i = 0) \oplus x_i f(x_i = 1)\right) \oplus \left(x_i f(x_i = 0) \oplus \overline{x_i} f(x_i = 1)\right)$$
$$= f(x_i = 0)(\overline{x_i} \oplus x_i) \oplus f(x_i = 1)(\overline{x_i} \oplus x_i)$$
$$= f(x_i = 0) \wedge f(x_i = 1).$$

به این ترتیب رابطهٔ (۳) حاصل می‌شود. بقیهٔ روابط نیز به‌طور مشابه اثبات می‌شوند.

اکنون، تعاریف مشتق برداری، مینیمم برداری و ماکزیمم برداری یک تابع منطقی چند متغیره را بیان می‌کنیم. برای این منظور، مجددا متغیرهای برداری

$x_0 = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ و

$x_1 = (x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n)$، $1 \le m < n$ ، شامل متغیرهای بولی را در نظر می‌گیریم.

تعریف ۲-۱۸: فرض کنید

$$f(x_0, x_1) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x)$$

یک تابع منطقی n -متغیره باشد. آن‌گاه مشتق برداری، مینیمم برداری و ماکزیمم برداری تابع $f(x)$ نسبت به متغیر x_0 به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\frac{\partial f(x_0, x_1)}{\partial x_0} = f(x_0, x_1) \oplus f(\overline{x_0}, x_1),$$

$$\min_{x_0} f(x_0, x_1) = f(x_0, x_1) \wedge f(\overline{x_0}, x_1),$$
$$\max_{x_0} f(x_0, x_1) = f(x_0, x_1) \vee f(\overline{x_0}, x_1).$$

تعریف ۲-۱۹: تابع سه‌متغیرهٔ منطقی $f(a,b,c) = \bar{a}b\bar{c} \oplus ac$ را درنظر بگیرید. در این صورت داریم

$$\frac{\partial f(a,b,c)}{\partial (a,c)} = f(a,b,c) \oplus f(\bar{a},b,\bar{c})$$
$$= (\bar{a}b\bar{c} \oplus ac) \oplus (abc \oplus \overline{ac})$$
$$= \overline{ac}(b \oplus 1) \oplus ac(b \oplus 1)$$
$$= \bar{b}(\bar{a} \oplus c),$$

$$\min_{(a,c)} f(a,b,c) = f(a,b,c) \wedge f(\bar{a},b,\bar{c})$$
$$= (\bar{a}b\bar{c} \oplus ac) \wedge (abc \oplus \overline{ac})$$
$$= \bar{a}b\bar{c} \oplus abc = b(\bar{a} \oplus c),$$
$$\max_{(a,c)} f(a,b,c) = f(a,b,c) \vee f(\bar{a},b,\bar{c})$$
$$= (\bar{a}b\bar{c} \oplus ac) \vee (abc \oplus \overline{ac})$$
$$= (\bar{a}b\bar{c} \vee ac) \vee (abc \vee \overline{ac})$$
$$= \bar{a} \oplus c.$$

با انتخاب $dx_i = 1$ برای هر $x_i \in x_0$، و $dx_j = 0$ برای هر $x_j \in x_1$ در روابط (۱) و (۲)، قضیهٔ زیر نتیجه می‌شود.

قضیه ۲-۲۰: برای هر تابع منطقی $f(x_0, x_1)$، رابطه‌های زیر برقرار است:

$$\min_{x_0} f(x_0, x_1) \le f(x_0, x_1) \le \max_{x_0} f(x_0, x_1),$$

$$\min_{x_0} f(x_0,x_1) + \frac{\partial f(x_0,x_1)}{\partial x_0} + \max_{x_0} f(x_0,x_1) = 0.$$

در ادامه، مشتقات برداری مراتب بالاتر توابع منطقی و مینیمم و ماکزیمم برداری مراتب بالاتر آن‌ها را تعریف کرده و برای ارائهٔ توضیحات بیشتر دربارهٔ این مفاهیم، مثالی بیان می‌کنیم.

تعریف ۲-۲۱: برای تابع منطقی n-متغیرهٔ

$$f(x_0,x_1) = f(x_1,x_2,\dots,x_n) = f(x),$$

مشتق برداری مرتبهٔ m نسبت به مجموعهٔ متغیرهای $x_0 = (x_1,x_2,\dots,x_m)$ به‌صورت

$$\frac{\partial^m f(x_0,x_1)}{\partial x_1\, \partial x_2 \dots \partial x_m} = \frac{\partial}{\partial x_m}\left(\dots\left(\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial f(x_0,x_1)}{\partial x_1}\right)\right)\dots\right),$$

و مینیمم و ماکزیمم برداری مرتبهٔ m نسبت به x_0 به‌صورت

$$\min^m_{x_0} f(x_0,x_1) = \min_{x_m}\left(\dots\left(\min_{x_2}\left(\min_{x_1} f(x_0,x_1)\right)\right)\dots\right),$$

$$\max^m_{x_0} f(x_0,x_1) = \max_{x_m}\left(\dots\left(\max_{x_2}\left(\max_{x_1} f(x_0,x_1)\right)\right)\dots\right)$$

تعریف می‌شوند.

با توجه به تعریف فوق، برای تابع

$$f(x) = f(x_0,x_1)$$

رابطهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$\min^m_{x_0} f(x_0,x_1) \le f(x_0,x_1) \le \max^m_{x_0} f(x_0,x_1).$$

مثال ۲-۲۲: تابع چهار متغیرهٔ

$$f(a,b,c,d) = bd \vee \bar{a}(c \vee \bar{d})$$

را درنظر بگیرید. در این صورت طبق تعریف ۲-۲۱، برای $x_0 = (c,d)$ و $m = 2$ داریم

$$\frac{\partial^2 f(a,b,c,d)}{\partial c\, \partial d} = \frac{\partial}{\partial d}\big(f(a,b,c=0,d) \oplus f(a,b,c=1,d)\big) = f(a,b,c=0,d=0) \oplus f(a,b,c=1,d=0) \oplus f(a,b,c=0,d=1) \oplus f(a,b,c=1,d=1) = (\bar{a}) \oplus (\bar{a}) \oplus (b) \oplus (b \vee \bar{a}) = \bar{a}\bar{b}.$$

همچنین به‌طور مشابه به‌دست می‌آید

$$\min^2_{(c,d)} f(a,b,c,d) = \bar{a}b,$$
$$\max^2_{(c,d)} f(a,b,c,d) = \bar{a} \vee b.$$

۳- معادلات دیفرانسیل بولی

در این بخش، با توجه به تعاریف مشتق یک تابع بولی اعم از ساده و یا برداری در بخش حساب دیفرانسیل بولی، به انواع دیگری از معادلات دیفرانسیل که بر اساس مشتقات یک تابع بولی تعریف می‌شوند، اشاره می‌کنیم و ماهیت چنین معادلاتی به همراه برخی ویژگی‌های جواب‌های آن‌ها را برای حالت ساده‌ای که معادلهٔ دیفرانسیل شامل یک مشتقِ برداریِ یک تابع بولی نسبت به یک بردار بولی است، بررسی خواهیم کرد. ذکر این نکته را ضروری می‌دانیم که هدف ما در این بخش، آشنایی مقدماتی خوانندگان محترم با مفهوم معادلهٔ دیفرانسیل بولی و برخی ویژگی‌های استخراج شده دربارهٔ این دسته از معادلات و ترغیب آن‌ها به مطالعه و تحقیق بیشتر در این زمینه است. لذا سعی شده است با بیان مثالی ساده، این هدف حاصل گردد. برای این منظور، تابع بولی زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x) = f(x_1,x_2,x_3) = x_1 \vee x_2x_3. \tag{۴}$$

با توجه به تعریف ۲-۱۸، مشتق برداری تابع f نسبت به (x_1,x_3) را به‌صورت زیر به‌دست می‌آوریم

$$\frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial(x_1,x_3)} = f(x_1,x_2,x_3) \oplus f(\overline{x_1},x_2,\overline{x_3}) = (x_1 \vee x_2x_3) \oplus (\overline{x_1} \vee x_2\overline{x_3}) = x_1 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_2x_3 \oplus \overline{x_1} \oplus x_2\overline{x_3} \oplus \overline{x_1}x_2\overline{x_3} = (x_1 \oplus \overline{x_1}) \oplus x_2(x_3 \oplus \overline{x_3}) \oplus x_2(x_1x_3 \oplus \overline{x_1}\,\overline{x_3}) = \overline{x_2} \vee (\overline{x_1} \oplus x_3). \qquad (۵)$$

بنابراین حاصل این مشتق برداری، تابع بولی زیر است

$$g(x_1,x_2,x_3) = \overline{x_2} \vee (\overline{x_1} \oplus x_3). \qquad (۶)$$

در نتیجه معادلهٔ زیر، که یک نوع معادلهٔ دیفرانسیلِ بولیِ غیرهمگن تعریف می‌شود، به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial f(x_1,x_2,x_3)}{\partial(x_1,x_3)} = g(x_1,x_2,x_3). \qquad (۷)$$

با استفاده از تابعِ معلومِ $f(x_1,x_2,x_3)$ در (۴)، تعریف مشتق برداری f و با توجه به متغیرهای (x_1,x_3)، تابع $g(x_1,x_2,x_3)$ در (۷) به‌طور یکتا تعیین می‌شود.

همهٔ مراحل محاسبه در (۵) می‌تواند در جهت عکس انجام شود. بنابراین تابع

$f(x_1,x_2,x_3) = x_1 \vee x_2x_3$

یک جواب معادلهٔ دیفرانسیل بولی (۷) است که در آن تابع g به وسیلهٔ رابطهٔ (۶) تعریف می‌شود.

حال در ادامه دو سوال مهم دربارهٔ وجود و یکتایی جواب یک معادلهٔ دیفرانسیل بولی به شکل (۷) را مطرح کرده و به آن‌ها پاسخ می‌دهیم.

سوال اول: آیا می‌توان تابع جواب $f(x_1,x_2,x_3)$ را با استفاده از تابع $g(x_1,x_2,x_3)$ در (۶) و معادلهٔ دیفرانسیل بولی (۷) به‌طور یکتا تعیین کرد؟

پاسخ این سوال، منفی است. زیرا 15 تابع بولی دیگر به شکل $f_i(x_1,x_2,x_3)$ وجود دارد که جواب معادله دیفرانسیل بولی (۷) به ازای

$g(x_1,x_2,x_3) = \overline{x_2} \vee (\overline{x_1} \oplus x_3)$

هستند. همهٔ این 16 تابع جواب عبارتند از:

$$\begin{aligned}
f_1(x_1,x_2,x_3) &= x_1(\overline{x_2} \vee x_3),\\
f_2(x_1,x_2,x_3) &= x_1(\overline{x_2} \vee x_3) \oplus \overline{x_2}(\overline{x_1} \oplus x_3),\\
f_3(x_1,x_2,x_3) &= x_1(\overline{x_2} \vee x_3) \oplus \overline{x_2}(x_1 \oplus x_3),\\
f_4(x_1,x_2,x_3) &= x_1(\overline{x_2} \vee x_3) \oplus \overline{x_2},\\
f_5(x_1,x_2,x_3) &= x_1(\overline{x_2} \vee x_3) \oplus x_2(\overline{x_1} \oplus x_3),\\
f_6(x_1,x_2,x_3) &= x_1(\overline{x_2} \vee x_3) \oplus (\overline{x_1} \oplus x_3),\\
f_7(x_1,x_2,x_3) &= x_1(\overline{x_2} \vee x_3) \oplus (x_1 \oplus x_2 \oplus x_3),\\
f_8(x_1,x_2,x_3) &= x_1(\overline{x_2} \vee x_3) \oplus (\overline{x_2} \vee (\overline{x_1} \oplus x_3)),\\
f_9(x_1,x_2,x_3) &= x_1(\overline{x_2} \vee x_3) \oplus x_2(x_1 \oplus x_3)\\
&= (x_1\overline{x_2}\,\overline{x_3} \oplus x_1\overline{x_2}x_3 \oplus x_1x_2x_3) \oplus (x_1x_2\overline{x_3} \oplus \overline{x_1}x_2x_3)\\
&= x_1 \vee x_2x_3,\\
f_{10}(x_1,x_2,x_3) &= x_1(\overline{x_2} \vee x_3) \oplus (\overline{x_1} \oplus x_2 \oplus x_3),\\
f_{11}(x_1,x_2,x_3) &= x_1(\overline{x_2} \vee x_3) \oplus (x_1 \oplus x_3),\\
f_{12}(x_1,x_2,x_3) &= x_1(\overline{x_2} \vee x_3) \oplus (\overline{x_2} \vee (x_1 \oplus x_3)),\\
f_{13}(x_1,x_2,x_3) &= x_1(\overline{x_2} \vee x_3) \oplus x_2,\\
f_{14}(x_1,x_2,x_3) &= x_1(\overline{x_2} \vee x_3) \oplus (x_2 \vee (\overline{x_1} \oplus x_3)),\\
f_{15}(x_1,x_2,x_3) &= x_1(\overline{x_2} \vee x_3) \oplus (x_2 \vee (x_1 \oplus x_3)),\\
f_{16}(x_1,x_2,x_3) &= x_1(\overline{x_2} \vee x_3) \oplus 1.
\end{aligned}$$

البته بررسی این موضوع به سادگی امکان‌پذیر است و با محاسبهٔ مشتقات برداری 16 تابع فوق بر اساس تعریف ۲-۱۸ درمی‌یابیم که حاصل عبارات به دست آمده، با تابع g در (۶) برابر است. همچنین بررسی اینکه هیچ تابع دیگری بر حسب متغیرهای (x_1,x_2,x_3) در معادلهٔ (۷) با تابع g فوق صدق نمی‌کند، کار دشواری نیست. نکتهٔ قابل توجه دیگر

آن است که تابع f_9 نشان می‌دهد که تابع اولیهٔ به‌کار رفته

$$f(x_1,x_2,x_3)=f_9(x_1,x_2,x_3)$$

در (۴)، عضوی از مجموعهٔ جواب معادلهٔ (۷) است.

با مشاهدهٔ 16 تابع جواب f_1، f_2، ...، f_{16} درمی‌یابیم که همهٔ این توابع دارای ساختار اساسی مشترک زیر هستند:

$$f_i(x_1,x_2,x_3)=g_0(x_1,x_2,x_3)+h_i(x_1,x_2,x_3) \qquad (۸)$$

که در آن،

$$\begin{aligned}g_0(x_1,x_2,x_3)&=x_1(\overline{x_2}\vee x_3)\\&=x_1\overline{x_2}\vee x_1x_3\vee 0\\&=x_1\overline{x_2}\vee x_1x_1x_3\vee x_1\overline{x_1}\overline{x_3}\\&=x_1\wedge(\overline{x_2}\vee x_1x_3\vee\overline{x_1}\overline{x_3})\\&=x_1\wedge\left(\overline{x_2}\vee(\overline{x_1}\oplus x_3)\right)\\&=x_1\wedge g(x_1,x_2,x_3).\end{aligned}$$

همچنین دربارهٔ توابع $h_i(x_1,x_2,x_3)$، یا این توابع وابسته به (x_1,x_3) نیستند که در این صورت داریم

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_i(x_1,x_2,x_3)}{\partial(x_1,x_3)}=\frac{\partial(\overline{x_2})}{\partial(x_1,x_3)}&=\overline{x_2}\oplus x_2\\&=0,\end{aligned}$$

و یا اینکه متغیرهای (x_1,x_3) در تابع $h_i(x_1,x_2,x_3)$ ظاهر شده و به وسیلهٔ یک عمل $\oplus$ با هم مرتبط می‌شوند که در این حالت نیز خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\frac{\partial h_i(x_1,x_2,x_3)}{\partial(x_1,x_3)}&=\frac{\partial\left(\overline{x_2}(\overline{x_1}\oplus x_3)\right)}{\partial(x_1,x_3)}\\&=\overline{x_2}(\overline{x_1}\oplus x_3)\oplus\overline{x_2}(x_1\oplus\overline{x_3})\\&=\overline{x_2}\left(\overline{x_1\oplus x_3}\right)\oplus\overline{x_2}\left(\overline{x_1\oplus x_3}\right)=0.\end{aligned}$$

لذا در هر صورت توابع $h_i(x_1,x_2,x_3)$ در **معادلهٔ دیفرانسیلِ بولیِ همگن** زیر (که همان معادلهٔ دیفرانسیل بولی همگن نظیر معادله (۷) است) صدق می‌کنند:

$$\frac{\partial h_i(x_1,x_2,x_3)}{\partial(x_1,x_3)}=0.$$

سوال دوم: آیا به ازای هر تابع $g(x_1,x_2,x_3)$، معادلهٔ (۷) دارای توابع جواب $f(x_1,x_2,x_3)$ است؟

پاسخ این سوال نیز منفی است. به عنوان مثال می‌توان با استفاده از تعریف مشتق برداری در تعریف ۲-۱۸ بررسی کرد که به ازای

$$g(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2x_3,$$

هیچ‌کدام از 256 تابع $f(x_1,x_2,x_3)$ ممکن، جواب معادلهٔ (۷) نیست.

اکنون شرایط لازم برای وجود جواب برای معادلهٔ دیفرانسیل بولی (۷) با معلوم‌بودن تابع $g(x_1,x_2,x_3)$ را بررسی می‌کنیم.

از آنجایی که

$$\begin{aligned}g(x_0,x_1)=\frac{\partial f(x_0,x_1)}{\partial x_0}\\=f(x_0,x_1)\oplus f(\overline{x_0},x_1),\end{aligned}$$

بنابراین داریم

$$\begin{aligned}g(\overline{x_0},x_1)&=\frac{\partial f(\overline{x_0},x_1)}{\partial x_0}\\&=f(\overline{x_0},x_1)\oplus f(x_0,x_1).\end{aligned}$$

به طور دقیق‌تر،

$$g(x_0,x_1)=g(\overline{x_0},x_1),$$

که می‌تواند به شکل زیر بیان شود:

$$\begin{aligned}&g(x_0,x_1)=g(\overline{x_0},x_1)\\&\Longrightarrow g(x_0,x_1)\oplus g(\overline{x_0},x_1)\\&\qquad=g(\overline{x_0},x_1)\\&\qquad\oplus g(\overline{x_0},x_1)\\&\Longrightarrow g(x_0,x_1)\oplus g(\overline{x_0},x_1)=0\\&\Longrightarrow\frac{\partial g(x_0,x_1)}{\partial x_0}=0. \qquad (۹)\end{aligned}$$

بنابراین به منظور یافتن توابع جواب $f(x_1,x_2,x_3)$ برای معادلهٔ دیفرانسیل بولی (۷) باید تابع $g(x_1,x_2,x_3)$ در شرط (۹) صدق کند. به این دلیل، رابطهٔ (۹)، شرط انتگرال‌پذیری برای مشتقات برداری توابع بولی نامیده می‌شود.

نتیجه۲-۲۳: با توجه به مثال فوق درمی‌یابیم که:
یک معادلهٔ دیفرانسیل بولی به شکل (۷) شامل تابع بولی نامعلوم $f(x_1, x_2, x_3)$ است؛
معادلهٔ دیفرانسیل بولی (۷) تنها در صورتی دارای جواب است که تابع سمت راست این معادله یعنی $g(x_1, x_2, x_3)$ در یک شرط انتگرال‌پذیری خاصی (شرط (۹)) صدق کند؛
با توجه به رابطهٔ (۸)، جواب عمومی یک معادلهٔ دیفرانسیل بولی غیرهمگن با استفاده از یک جواب خصوصی معادله و مجموعهٔ جواب‌های معادلهٔ همگن نظیر، تعیین می‌شود؛
جواب یک معادلهٔ دیفرانسیل بولی، مجموعه‌ای از بردارهای بولی است. این یک تفاوت قابل توجه و معنی‌دار معادلات دیفرانسیل بولی با معادلات بولی است.

نکته۲-۲۴: یک معادلهٔ دیفرانسیل بولی به شکل (۷) که سمت چپ آن شامل یک عمل مشتق از یک تابع بولی نامعلوم $f(x)$ و سمت راست آن نیز به وسیلهٔ عبارتی بر حسب یک تابع معلوم $g(x)$ مشخص شده است، می‌تواند بر اساس هر عمل مشتق بیان شود. در این صورت برای هر یک از این معادلات، هم شرط انتگرال‌پذیری و هم فرمول (۸) برای محاسبهٔ همه جواب‌ها معتبر است. با این حال، این فرمول‌های جواب مستلزم تعیین جواب معادلهٔ دیفرانسیل بولی همگن متناظر هستند.

مطلبی که در پایان این بخش اشاره می‌کنیم آن است که به‌طور کلی، معادلات دیفرانسیل بولی دیگر مشابهی را می‌توان استخراج کرد که به تابع $f(x)$ و همچنین مشتقات ساده و برداری آن وابسته‌اند. این دسته از معادلات دارای ساختار کلی زیر هستند:

$$D_l\left(f(x), \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(x_0, x_1)}{\partial x_0}, \frac{\partial f(x)}{\partial x}\right) = D_r\left(f(x), \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(x_0, x_1)}{\partial x_0}, \frac{\partial f(x)}{\partial x}\right). \quad (۱۰)$$

همهٔ مشتقات در (۱۰)، توابع بولی هستند. بنابراین، بکارگیری نقش جبر بولی این امکان را فراهم می‌کند که معادلهٔ (۱۰) به شکل معادلهٔ دیفرانسیل بولی همگن زیر تبدیل شود:

$$D\left(f(x), \frac{\partial f(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(x_0, x_1)}{\partial x_0}, \frac{\partial f(x)}{\partial x}\right) = 0. \quad (۱۱)$$

جهت بررسی ویژگی‌های بیشتر دربارهٔ معادلهٔ (۱۱)، علاقمندان را به مطالعهٔ [۸و۱۱و۱۲] ارجاع می‌دهیم.

تشکر و قدردانی

نویسندهٔ مقاله، مراتب تشکر خود را از دانشگاه کاشان به خاطر حمایت مالی از این اثر در قالب پژوهانه به شمارهٔ ۱۱۴۳۸۸۸/۴ ابراز می‌دارد.

فهرست منابع

[1] D. Bochmann, C. Posthoff. Binäre Dynamische Systeme. Akademie-Verlag, Berlin (1981)

[2] I. I. Bucur, M. Dragoicea, N. Constantin. Boolean Differential Calculus-Applied in Logic Testing. Studies in Informatics and Control. 16: 209-216 (2007)

[3] D. A. Huffman. Solvability criterion for simultaneous logical equations. Quarterly Progress Report. 1: 87-88 (1958)

[4] C. Posthoff, B. Steinbach. Logic Functions and Equations-Binary Models for Computer Science. Springer, Dordrecht, The Netherlands (2004)

[5] I. S. Reed. A class of multiple-error-correcting codes and the decoding scheme. Transactions of the IRE Professional Group on Information Theory. 4: 38-49 (1954)

[6] J. Sheldon, B. Akers. On a theory of Boolean functions. Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM). 7: 487-498 (1959)

[7] B. Steinbach. Lösung binrer Differentialgleichungen und ihre Anwendung auf binäre Systeme. Dissertation A (PhD-thesis), TH Karl-Marx-Stadt (1981)

[8] B. Steinbach, Ch. Posthoff. The Boolean Differential Calculus-Introduction and Examples. Proceedings–Reed-Muller Workshop 2009, Naha, Okinawa, Japan. 107-117 (2009)

[9] B. Steinbach, Ch. Posthoff. Boolean Differential Calculus. in: Sasao, T. and Butler, J. T. Progress in Application of Boolean Functions. Morgan & Claypool Publishers, San Rafael, CA, USA (2010)

[10] B. Steinbach, Ch. Posthoff. Boolean Differential Calculus–Theory and Applications. Journal of Computational and Theoretical Nanoscience. 7: 933-981 (2010)

[11] B. Steinbach, Ch. Posthoff. Boolean Differential Equations. Proceedings of the 20th International Workshops on Post-Binary ULSI Systems. Tuusula, Finnland. 46-53 (2011)

[12] B. Steinbach, Ch. Posthoff. Boolean Differential Equations–A Common Model for Classes, Lattices, and Arbitrary Sets of Boolean Functions. Facta Universitatis. 28: 51-76 (2015)