دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره سی و ششم، خرداد و تیر ۱۴۰۱
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

کاهش تفاوت بین پروفایل وزن‌ها در کارایی متقاطع تصادفی

سمیه رحمانی[۱]، محسن خون سیاوش[*۲]، رضا کاظمی متین[۳]، زهره مقدس[۴]

[(۱و۲و۴)] گروه ریاضی، واحد قزوین، دانشگاه آزاد اسلامی قزوین، قزوین، ایران
[(۳)] گروه ریاضی، واحد کرج، دانشگاه آزاد اسلامی کرج، کرج، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۰۶/۲۳ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۰۶/۱۱

چکیده

ارزیابی کارایی متقاطع یک رویکرد موثر در عین حال معمول برای ارزیابی واحدهای تصمیم‌گیرنده (DMU) در تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) است. منحصربفرد نبودن وزن‌ها در کارایی متقاطع باعث می‌شود نمره کارایی متقاطع منحصر به فرد نبوده و به مقدار اوزان بستگی داشته باشد و این ضعف بزرگی برای روش کارایی متقاطع است. این مقاله به پروفایل‌های وزنی که در ارزیابی کارایی متقاطع تصادفی مورد استفاده قرار می‌گیرند، می‌پردازد. برای جلوگیری از وزن‌های غیر واقعی، یکی از موضوعات مورد توجه اصلی که ما در اینجا به آن می‌پردازیم دوری از وزن صفر است، زیرا استفاده از وزن صفر دلالت بر این دارد که برخی از متغیرهای مورد نظر از ارزیابی حذف شده‌اند. علاوه بر اجتناب از وزن‌های صفر، انتخاب وزن‌ها را طوری انجام می‌دهیم تا تفاوت بین وزن‌ها را تا جایی که ممکن است کاهش دهیم. بنابراین، در ارزیابی کارایی متقاطع تصادفی محدود شده مجموعه مشترکی از وزن‌ها را با استفاده از ایده شباهت بین مجموعه وزن‌ها استخراج کنیم. با استفاده از مثال‌های عددی نشان می‌دهیم مدل مورد نظر در مقایسه با مدل مشابه آن تفاوت بین وزن‌ها را بیشتر کاهش می‌دهد و محاسبات کمتری دارد.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، کارایی متقاطع، کارایی متقاطع تصادفی، تفاوت بین وزن‌ها.

* عهده‌دار مکاتبات: Email:mfsiavash@gmail.

۱. مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) توسط چارنز و همکارانش [۱] مطرح گردید، که مبتنی بر روش برنامه‌ریزی خطی برای ارزیابی واحدهای تولیدی با ورودی‌ها و خروجی‌های چندگانه است. مدل‌های متنوع زیادی در راستای ارزیابی عملکرد سیستم‌های چند ورودی-چند خروجی در ادبیات DEA ابداع گردیده است، از جمله می‌توان به برخی فعالیت‌های اخیر مانند وو و همکاران [۲]، معینی و همکاران [۳]، زو و همکاران[۴] اشاره کرد. به علت کاربردهای بسیار زیاد تحلیل پوششی داده‌ها در چند سال اخیر، این تکنیک رشد بسیار روز افزونی داشته است که می‌توان به ارزیابی کارایی شعب بانک (یانگ، [۵]و امروزی نژاد و همکاران [۶]) ورتبه‌بندی متغیرهای تصمیم‌گیری لیو و همکاران [۷] و... اشاره نمود.

به منظور توسعه‌ی توان DEA در تمایز قائل شدن بین واحدهای کارا، سکستون و همکاران [۸] مفهوم ارزیابی هم درجه را وارد DEA کردند و روش ارزیابی کارایی متقاطع راپیشنهاد نمودند. نمره کارایی متقاطع نسبت به نمره به دست آمده با استفاده از روش‌های قبلی DEA واقعی‌تر است. مهمترین مزیت این روش ارائه یک رتبه‌بندی کامل برای تمامی DMUها است. مزیت بعدی کارایی متقاطع این است که جنبه‌های وزنی غیر منطقی را بدون هیچ گونه اعمال محدودیت‌های وزنی حذف می‌کند (اندرسون و همکاران، [۹]). با توجه به مزیت‌های کارایی متقاطع، ارزیابی کارایی متقاطع در برنامه های کاربردی و در زمینه‌های مختلف گسترش یافت. از جمله این فعالیت‌ها می‌توان به رتبه‌بندی متغیرهای تصمیم‌گیری لیو و همکاران [۷]، ارزیابی سبد سهام در بازار سهام کره لیم و همکاران [۱۰]، ارزیابی کارایی برای خطوط هوایی استان‌های چین (چو و لی[۱۱])، اشاره کرد.

ارزیابی کارایی متقاطع DEA، در کنار مزایای و گستردگی کاربردی که دارد، دارای یک سری نقاط ضعف نیز می‌باشد. وجود وزن‌های چندگانه در کارایی متقاطع باعث می‌شود نمره کارایی متقاطع منحصر به فرد نبوده و به مقدار اوزان بستگی داشته باشد و این ضعف بزرگی برای روش کارایی متقاطع است. برای حل این مشکل سکستون و همکاران در[۸] اهداف ثانویه‌ای را برای ارزیابی کارایی متقاطع مطرح کردند. بر پایه این ایده بسیاری از مدل‌های مربوط به هدف ثانویه پیشنهاد شده‌اند. در میان مدل‌های ثانویه رایج‌ترین مدل‌ها عبارتند از مدل‌های خوشبینانه و بدبینانه که توسط دویل و گرین [۱۲] پیشنهاد شد. کوک و زو [۱۳] استفاده از یک مدل DEA مضربی دارای واحدهای ثابت برای محاسبه کارایی متقاطع پیشنهاد کردند. مدل آنها می‌توانست به طور مستقیم بیشینه کارایی DMU و نمرات کارایی متقاطع منحصر بفرد را تولید کند، که نیاز به مجموعه منحصر بفرد از وزن‌های بهینه DMU را مرتفع می‌سازد. وو و همکارانش [۱۴] رویکرد ارزیابی کارایی متقاطع را بر مبنای بهبود پارتو پیشنهاد کردند. لیو و همکارانش[۱۵] کارایی متقاطع را بصورت بازه‌ای مطرح کردند. کائو و لیو [۱۶] کارایی متقاطع را در شبکه مطرح نمودند. در سال‌های اخیر مطالعاتی در زمینه کارایی متقاطع با اهداف ثانویه مطرح گردید که از جمله می‌توان به کارهای وو و همکاران [۱۷]، رامون و همکاران[۱۸] مهدی سلطانی فر و همکاران [۱۹] اشاره نمود.

همانطور که در قسمت‌های قبل بیان شد به منظور ارزیابی کارایی واحدهای تصمیم‌گیری DMU در DEA وزن‌های ورودی و خروجی واحد تحت ارزیابی آزادانه انتخاب می‌شود. این آزادی وزن در DEA منجر به بروز مشکلاتی در ارزیابی کارایی خواهد شد. برای اجتناب از مشکلات ناشی از آن کنترل وزن اولین بار توسط تامسون و همکاران [۲۰] ر DEA معرفی شد. کنترل وزن در کارایی

متقاطع نیز تحت عنوان اهداف ثانویه مطرح شد، براین اساس مدل‌های ثانویه‌ای پیشنهاد داده شد، رویز و همکاران [۲۱و۱۸] انتخاب وزن‌های مفید را در کارایی متقاطع مطرح کردند. جهانشاهلو و همکاران [۲۲]هدف ثانویه‌ای ارائه دادند که بهینه سازی وزن‌های متناسب برای DMUها را مطرح نمودند. وو و همکاران[۲۳] مفهوم درجه رضایت از DMUها را به مجموعه ای از وزن‌های مطلوب برای دیگر DMU پیشنهاد دادند.

در اکثر تحقیقات ذکر شده و مدل‌های کلاسیک DEA مربوطه، فرض بر قطعی بودن داده‌های ورودی و خروجی DMUs و تعدیل این فرض از جمله مباحثی است که در بهره‌وری می‌تواند مورد توجه قرار بگیرد. همانطور که می‌دانیم در اکثر مجموعه داده‌های تصادفی به جای داده‌های قطعی امکان ارائه‌ی مدل‌های با قابلیت تطبیق بیشتر با محیط واقعی را فراهم می‌نماید. از سوی دیگر مدل‌های اولیه DEA برای محاسبه کارایی با وجود داده‌های تصادفی نیازمند تعدیل هستند. از این مفهوم در ادبیات DEA تحت عنوان تحلیل پوششی داده‌های تصادفی نام برده می‌شود. به عنوان مثال چارلز و همکارش [۲۴] به بررسی مزایای بالقوه حل یک مدل DEA تصادفی بر روی حل یک مدل DEA قطعی پرداختند. سابقه روش‌های با داده‌های تصادفی در ادبیات DEA را به نمونه مقالات کوپر و همکاران [۲۵و۲۶] و خدابخشی [۲۷] زو و همکاران [۲۸] می‌توان اشاره نمود.

رویز و سیروانت[۲۱] رویکرد جدیدی برای ارزیابی کارایی متقاطع پیشنهاد دادند که بر انتخاب پروفایل وزن‌ها تمرکز دارد. در ادبیات مذکور وزن‌های غیر واقعی را در محاسبه کارایی متقاطع حذف می‌کند، از پروفایل وزنی استفاده می‌کند که تفاوت کمتری دارند و همچنین وزن غیر صفر را تضمین می‌کند. معیار مورد استفاده در مقاله رویزو سیروانت[۲۱] انتخاب پروفایل‌های وزن مورد نظر برای جلوگیری از تفاوت‌های بزرگ در وزن‌ها می‌باشد. هدف آنها کاهش تفاوت بین وزن‌هاست. در نهایت، این رویکرد را گسترش دادند تا مجموعه مشترکی از وزن‌ها را با استفاده از ایده شباهت بین مجموعه وزن‌ها استخراج کنند. که واحدهای مختلف در ارزیابی همتا مورد ارزیابی قرار می‌گیرند که مجموعه وزن‌های برخی از DMUها نا کارا را در نظر نمی‌گیرد. این روش به‌عنوان "ارزیابی کارایی متقاطع محدود شده " نامیده می‌شود.

همانطور که در بالا اشاره کردیم رویز و سیرونت [۲۱] از ایده رامون [۱۸] استفاده نمودند، یعنی پروفایل وزن‌ها را که در رامون و همکاران [۱۸] بیان شده است انتخاب می‌کنند، سپس ارزیابی کارایی متقاطع محدود شده را براساس این پروفایل وزن انتخاب شده انجام می‌دهند. در این مقاله از ایده رویز و همکاران [۲۱] استفاده می‌کنیم، با این تفاوت که کارایی متقاطع را بدون انتخاب پروفایل وزن و فقط با در نظر گرفتن یک ε و همچنین بدون میانگین گرفتن از متغیرها (در محاسبات فقط وزن ها مد نظر است نه میانگین متغیر ورودی) انجام می‌دهیم. همچنین این ایده را برای واحدهای نا کارا نیز گسترش بکار می‌بریم. ایده‌مان را با داده‌های تصادفی برای نخستین بار انجام می‌دهیم. با یک مثال روش پیشنهادی را با ایده رویز و همکاران [۲۱] مقایسه می‌کنیم.

بقیه این مقاله به شرح زیر است: مدل کارایی متقاطع در بخش ۲ بطور خلاصه بیان شده است. بخش ۳ شامل کارایی متقاطع محدود شده بدون انتخاب پروفایل وزن می‌باشد. در بخش چهار حالت تصادفی مدل پیشنهادی و در پایان نتیجه‌گیری بیان شده است.

۲- مفاهیم پایه مطالعات

۲-۱- کارایی متقاطع

فرض کنید مجموعه‌ای از n واحد تصمیم‌گیری

موجود باشد $(DMU_j, j = 1, \dots, n)$ و فرض کنید i امین ورودی و r امین خروجی به صورت و $x_{ij}(i = 1, \dots, m)$ و $y_{rj}(r = 1, \dots, s)$ باشد. مدل خطی با بازده به مقیاس ثابت چارنز و همکاران [۲۴] بصورت زیر است:

$$\begin{aligned} &max E_{dd} = \sum_{r=1}^{s} u_{rd} y_{rd} \\ &\sum_{i=1}^{m} v_{id} x_{id} = 1 \\ &\sum_{r=1}^{s} u_{rd} y_{rj} \quad \sum_{i=1}^{m} v_{id} x_{ij} \le 0 \\ &j = 1. \dots . n \\ &u_{rd}, v_{id} \ge 0 \end{aligned} \qquad (۱)$$

جایی که v_{id} و u_{rd} وزن‌های i امین ورودی و r امین خروجی واحد تحت ارزیابی (DMU_d) می‌باشد.

اگر (u , v) وزن‌های بهینه مدل (۱) باشد آنگاه کارایی متقاطع DMU_j با توجه به وزن‌های بهینه DMU_d عبارت است از:

$$E_{dj} = \frac{\sum_{r=1}^{s} u_{rd} y_{rj}}{\sum_{i=1}^{m} v_{id} x_{ij}} \quad d. j = 1. \dots . n \qquad (۲)$$

برای هر واحد با توجه به مدل (۱) یک دسته وزن بهینه ورودی و یک دسته وزن خروجی بدست می‌آید پس اگر n، DMU موجود باشد برای DMU_k، n-1کارایی با توجه به وزن آن بدست می‌آید و یک کارایی بهینه واحد تحت ارزیابی. سر انجام برای هر $DMU_j, j = 1, \dots, n$ یک میانگین از همه‌ی $E_{dj}, d = 1, \dots, n$ می‌گیریم داریم:

$$\bar{E}_j = \frac{1}{n} \sum_{d=1}^{n} E_{dj} \quad (d = 1.2. \dots . n) \qquad (۳)$$

$\bar{E}_j$ عدد کارایی متقاطع برای هر $DMU_j, j = 1, \dots, n$ می‌باشد.

۲-۲- کاهش تفاوت بین پروفایل وزن‌ها با توجه به ایده رویز و همکاران

رویز وهمکاران [۲۱] با توجه به وزن‌های بهینه بدست آمده از معادله (۱) DMUهایی که پروفایل وزن آنها متعلق به NZ (وزن‌های غیر صفر) است انتخاب کردند (رامون و همکاران [۱۸]). هدف آنها محدودیت وزن در ارزیابی کارایی متقاطع بود. با توجه به انتخاب وزن DMUهایی که در NZ انجام دادند تلاش نمودند تا هر چه بیشتر اختلاف بین پروفایل وزن انتخاب شده را کاهش دهند (DMU هایی که بیشترین همبستگی را دارند انتخاب نمودند). هدف انتخاب معیار وزن رویز و همکاران [۲۱] جلوگیری از پراکندگی وزن‌ها در نمونه‌ها می‌باشد. تابع هدف آنها بصورت زیر است:

$$\begin{aligned} &min \sum_{\substack{d,d' \in NZ \\ d<d'}} \left(\sum_{i=1}^{m} \left| v_i^d \quad v_i^{d'} \right| \bar{x}_i + \right. \\ &\left. \sum_{r=1}^{s} \left| u_r^d \quad u_r^{d'} \right| \bar{y}_r \right) \end{aligned} \qquad (۴)$$

$\bar{x}_i$ میانگین ورودی iام و $\bar{y}_r$ میانگین خروجی r ام است که در NZ قرار دارند. مدل پیشنهادی آنها از میانگین متغیرهای ورودی و خروجی استفاده شده است این در حالی است که می‌توانستند از میانگین متغیرها استفاده نکنند زیرا با پروفایل وزنی سرو کار داشتند همچنین در روش آنها فقط کارایی متقاطع DMUهایی که متعلق به NZ هستند محاسبه می‌شود.

۳- تکنولوژی جدید محدودیت وزن‌ها با داده‌های تصادفی

برای تحلیل مسایل جهان از مدل‌های DEA استفاده می‌کنیم، ولی داده‌ها در محیط واقعی قطعی نیستند بلکه تصادفی‌اند (کوپر و همکاران [۲۵و۲۶] را ببینید). واحدهایی را که کارا می‌نامیم در حالت تصادفی ممکن است ناکارا باشد. اخیراً داده‌های تصادفی نیز در DEA وارد شده‌اند. در اینجا ما محدودیت وزن‌ها درکارایی متقاطع را با داده‌های غیر قطعی یا تصادفی بیان می‌کنیم. در مدل پیشنهادی ما (مدل۵) بر خلاف ایده رویز و همکاران از دو رویکرد استفاده می‌نماییم. رویکرد اول بدون توجه به انتخاب وزن DMUهایی که در NZ قرار دارد (نیاز به محاسباتی برای انتخاب

پروفایل دارد) با در نظر گرفتن یک ε هم از وزن صفر و هم از پراکندگی وزن‌ها جلوگیری می‌شود. رویکرد دوم بدون میانگین گرفتن از متغیرهای ورودی و خروجی تلاش شده است تا هر چه بیشتر اختلاف بین پروفایل وزن را در محیط تصادفی کاهش دهیم.

فرض کنیم $\tilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{j}} = (\tilde{x}_{1j}. \dots . \tilde{x}_{mj})^t$, $\tilde{\boldsymbol{y}}_{\boldsymbol{j}} = (\tilde{y}_{1j}. \dots . \tilde{y}_{sj})^t$. بترتیب نشان دهنده m ورودی وs خروجی باشد. همچنین فرض می‌کنیم متغیرهای ورودی و خروجی دارای توزیع نرمال با واریانس معلوم هستند. از ایده کوپر و همکاران[۲۶] و از حالت تصادفی مدل CCR، استفاده نموده و حالت تصادفی مدل محدودیت وزن کارایی متقاطع را بصورت زیر می‌نویسیم:

$$
\begin{aligned}
& min \sum_{d<d'} (\sum_{i=1}^{m} \left| v_i^d \quad v_i^{d'} \right| + \\
& \sum_{r=1}^{s} \left| u_r^d \quad u_r^{d'} \right|) \\
& \sum_{i=1}^{m} v_i^d \tilde{x}_{ij} + \sum_{r=1}^{s} u_r^d \tilde{y}_{rj} \\
& \Phi^{-1}(\alpha)\delta_j \le 0, j = 1, \dots, n \\
& \theta_d \sum_{i=1}^{m} v_i^d x_{id} + \sum_{r=1}^{s} u_r^d y_{rd} = 0 \\
& v_i^d, u_r^d \ge \varepsilon, \forall\, i, r, d, \qquad (۵) \\
& \delta_j = \sum_{r=1}^{s} \sum_{t=1}^{s} u_r u_t \, Cov(\tilde{y}_{rj}, \tilde{y}_{tj}) + \\
& \sum_{i=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} v_i v_l \, Cov(\tilde{x}_{ij}, \tilde{x}_{lj}) + \\
& 2 \sum_{r=1}^{s} \sum_{i=1}^{m} u_r v_i Cov(\tilde{y}_{rj}, \tilde{x}_{ij}),
\end{aligned}
$$

جایی که Φ تابع توزیع نرمال استاندارد هست و Φ^{-1} معکوس آن است. θ_d کارایی CCR برای DMU_d می‌باشد. مدل (۵) غیرخطی است اگر ورودی و خروجی‌ها و دارای توزیع نرمال باشند حالت غیر خطی به حالت خطی تبدیل می‌شود.

برای درک بیشتر مثالی می‌زنیم و مدل پیشنهادی خود را در حالت قطعی و تصادفی با مدل رویز و همکاران [۲۱] مقایسه می‌کنیم:

مثال ۱. فرض کنیم ۶ واحد تصمیم‌گیری با دو ورودی و دو خروجی داریم داده‌ها در جدول ۱ نمایش داده شده‌اند. جدول ۲ نتایج حاصل از مدل رویز و همکاران [۲۱] را نشان می‌دهد همانطور که در جدول می‌بینید فقط واحدهای ۱ تا ۴ که کارای CCR هستند بررسی شده‌اند و فقط این واحدها در مجموعه NZ قرار دارند. جدول ۳ و ۴ مدل پیشنهادی را به ترتیب با داده‌های قطعی و تصادفی نمایش می‌دهند. ورودی و خروجی داده‌های جدول ۴ با میانگین معلوم و توزیع نرمال بصورت زیر در نظر گرفته شده است:

جدول۱. داده‌ها و کارایی CCR

DMU	x1	x2	y1	y2	E ccr
۱	۱/۵	۰/۲	۱/۴	۰/۳۵	۱
۲	۴	۰/۷	۱/۴	۲/۱	۱
۳	۳/۲	۱/۲	۴/۲	۱/۰۵	۱
۴	۵/۲	۲	۲/۸	۴/۲	۱
۵	۳/۵	۱/۲	۱/۹	۲/۵	۰/۹۷۷۵
۶	۳/۲	۰/۷	۱/۴	۱/۵	۰/۸۶۷۵

جدول ۲. مدل رویز و همکاران

DMU	v_1	v_2	u_1	u_2
۱	۰	۰/۳۳۶۱	۰/۷۸۴۳	۰
۲	۰/۲۰۳۲	۰/۰۰۹۷	۰	**۰/۲۵۱۶**
۳	۰	۰/۳۱۱۵	۰	**۰/۲۵۱۶**
۴	۰/۲۰۹۶	۰	۰	**۰/۲۵۱۶**

جدول ۳. مدل پیشنهادی با داده‌های قطعی

DMU	v_1	v_2	u_1	u_2
۱	۰/۰۰۱۰	۰/۰۰۱۱	۰/۰۰۲۲	**۰/۰۰۱۰**
۲	۰/۰۰۲۸	۰/۰۰۱۰	۰/۰۰۴۷	**۰/۰۰۱۰**
۳	۰/۰۰۱۰	۰/۰۰۱۰	۰/۰۰۱۰	**۰/۰۰۱۳**
۴	۰/۰۰۱۶	۰/۰۰۱۰	۰/۰۰۱۰	**۰/۰۰۱۵**
۵	۰/۰۰۲۸	۰/۰۰۱۰	۰/۰۰۴۷	**۰/۰۰۱۰**
۶	۰/۰۰۱۰	۰/۰۰۱۰	۰/۰۰۱۰	**۰/۰۰۱۰**

جدول ۴. مدل پیشنهادی با داده‌های تصادفی

DMU	v_1	v_2	u_1	u_2
۱	۰/۰۰۱۰	۰/۰۰۱۹	۰/۰۰۱۱	۰/۰۰۱۰
۲	۰/۰۰۱۰	۰/۰۰۴۱	۰/۰۰۱۰	۰/۰۰۲۶
۳	۰/۰۰۱۳	۰/۰۰۱۰	۰/۰۰۱۰	۰/۰۰۱۰
۴	۰/۰۰۱۴	۰/۰۰۱۰	۰/۰۰۱۰	۰/۰۰۱۵
۵	۰/۰۰۱۱	۰/۰۰۱۸	۰/۰۰۱۰	۰/۰۰۱۶
۶	۰/۰۰۱۰	۰/۰۰۶۷	۰/۰۰۱۲	۰/۰۰۳۵

$y_1 \sim N(\mu, 0.001)$, $y_2 \sim N(\mu, 0.001)$, در بازه اطمینان ۹۵٪ در نظر گرفته شده است. مدل ۵ را با $\alpha = 0.05$ و $\Phi^{-1}(\alpha) = 1.645$ حل می‌نماییم. در این جداول مقدار ε را ۰.۰۰۱ در نظر گرفته‌ایم. جدول ۲ و ۳ را با هم مقایسه کنید. بعنوان مثال واحد۲ را در هر دو جدول درنظر بگیرید. در جدول۲

(v_1, v_2, u_1, u_2)
$=(0.2032,0.0097,0,0.2516)$

در جدول ۳ واحد ۲ دارای وزن‌های بهینه

$(v_1, v_2, u_1, u_2) =$
$(0.0028,0.001,0.0047,0.001)$

می‌باشد. اختلاف بین پروفایل وزن در هر دو کم است. و اختلاف بین پروفایل وزن‌ها در مدل پیشنهادی کمتر از مدل رویز و همکاران می‌باشد. همچنین در مدل رویز و همکاران وزن صفر وجود دارد در حالی که در مدل پیشنهادی وزن صفر وجود ندارد. جدول ۳و ۴ را ببینید و واحد ۴ را در هر دو جدول با هم مقایسه کنید. در جدول ۳ وزنهای بهینه برابر است با:

$(v_1, v_2, u_1, u_2) =$
$(0.0016,0.001,0.001,0.0015)$

و در جدول ۴ وزن های بهینه برابر است با:

$$(v_1, v_2, u_1, u_2) = (0.0014, 0.001, 0.001, 0.0015)$$

وزن‌های بدست آمده در مدل پیشنهادی حالت قطعی (تصادفی) بسیار بهم نزدیک هستند. وزن‌های بدست آمده در هر دو جدول اختلاف بسیار کمی با هم دارند.

جدول ۵ و ۶ ماتریس کارایی‌های متقاطع داده‌های مثال ۱ را نشان می-دهند. جدول ۵ ماتریس کارایی متقاطع مدل رویز و همکاران [۲۱] و رتبه‌بندی آن را نشان می‌دهد. جدول ۶ ماتریس کارایی متقاطع مدل پیشنهادی بالا و رتبه‌بندی آن را نشان می‌دهد. جدول ۵و۶ را ببینید. واحد ۴ و ۱ را در هر دو جدول که واحدی کاراست در نظر بگیرید، در جدول ۵ کارایی متقاطع واحد ۴ برابر با ۰.۸۰۲۶ و رتبه آن ۱ و کارایی متقاطع واحد ۱ برابر با ۰.۷۴۹۶ و رتبه آن ۳ است. در جدول ۶ کارایی متقاطع واحد۴ برابر ۰.۹۱۵۹ و رتبه آن ۳ و کارایی متقاطع واحد ۱ برابر ۰.۹۹۳۱ و رتبه آن ۲ است. همانطور که می‌بینید رتبه‌بندی در هر دو جدول تغییر نموده و در ۸۰ درصد مواقع رتبه‌بندی متفاوت است؛ فقط واحدهای ۲ و ۶ در هر دوجدول ۵و ۶ دارای رتبه یکسان هستند. از اینرو می‌توان گفت که مدل پیشنهادی ما بهتر از مدل رویز و همکاران[۲۱] می‌باشد. محاسبات کمتری دارد در محیط تصادفی بیان شده و مشکل انتخاب پروفایل وزن‌ها را ندارد.

جدول ۵. ماتریس کارایی متقاطع مدل رویز و همکاران و رتبه بندی آن

رتبه	۶	۵	۴	۳	۲	۱	رویز
۴	۰/۴۰۹۹	۰/۴۳۰۱	۰/۴۰۵۶	۱	۰/۳۵۰۵	۱	**۱**
۵	۰/۸۰۲۷	۰/۹۵۰۶	۱	۰/۴۱۲۹	۱	۰/۴۹۷۷	**۲**
۱	۰/۳۳۳۳	۰/۴۱۳۶	۰/۴۱۰۳	۱	۰/۲۶۶۷	۰/۷۱۱۱	**۳**
۳	۰/۵۸۰۴	۰/۸۸۴۴	۱	۰/۴۰۶۳	۰/۶۵	۰/۲۸۸۹	**۴**
۲	۰/۸۶۷۵	۰/۹۷۷۵	۱	۰/۸۲۹۵	۱	۱	**۵**
۶	۰/۸۶۷۵	۰/۹۷۷۵	۱	۰/۸۲۹۵	۱	۱	**۶**
	۰/۶۴۳۵	۰/۷۷۲۳	۰/۸۰۲۶	۰/۷۴۶۴	۰/۷۱۱۲	۰/۷۴۹۶	

جدول ۶. ماتریس کارایی متقاطع تصادفی مدل پیشنهادی و رتبه بندی آن

رتبه	۶	۵	۴	۳	۲	۱	
۳	۰/۶۰۷۶	۰/۷۰۷۲	۰/۷۱۲۸	۱	۰/۶۰۱۹	۱	**۱**
۱	۰/۸۹۱۹	۱	۱	۰/۹۷۰۳	۱	۱	**۲**
۴	۰/۶۵۵۳	۰/۷۶۹۹	۰/۷۸۲۸	۱	۰/۶۶۹۲	۰/۹۸۶۹	**۳**
۵	۰/۸۰۲۲	۰/۹۶۷۹	۱	۱	۰/۸۵۳۹	۱	**۴**
۲	۰/۷۹۱۸	۰/۹۷۷۵	۱	۱	۰/۸۳۷۷	۰/۹۷۱۶	**۵**
۶	۰/۸۶۷۵	۰/۹۹۹۷	۱	۱	۰/۹۵۱۲	۱	**۶**
	۰/۷۶۹۴	۰/۹۰۳۷	۰/۹۱۵۹	۰/۹۹۵۰	۰/۸۱۹۰	۰/۹۹۳۱	

۴- نتیجه گیری

رویز و همکاران[۲۱] رویکردی برای ارزیابی کارایی متقاطع پیشنهاد کردند که بر انتخاب پروفایل وزن‌ها تمرکز دارد. در ادبیات مذکور وزن‌های غیر واقعی را در محاسبه کارایی متقاطع حذف می‌کند. همچنین از پروفایل وزنی استفاده می‌کند که تفاوت کمتری دارند و از وزن غیر صفر اجتناب می‌کند. معیار مورد استفاده در مقاله رویز و همکاران[۲۱] انتخاب پروفایل‌های وزن مورد نظر برای جلوگیری از تفاوت‌های بزرگ در وزن‌ها می‌باشد. در این مقاله ایده رویز و همکاران استفاده می‌کنیم با این تفاوت که برای جلوگیری از وزن صفر نیاز به انتخاب پروفایل وزن نداریم. بلکه با در نظر گرفتن یک ابسیلون از وزن صفر جلوگیری می‌نماییم. همچنین روش پیشنهادی ما برای تمام واحدها مورد استفاده قرار می‌گیرد. در روش پیشنهادی نیازی به میانگین گرفتن از متغیرهای ورودی نیست. این روش را برای ورژن تصادفی گسترش می‌دهیم. سپس با یک مثال عددی نشان می‌دهیم روش ارائه شده تفاوت بین وزن‌ها را کم می‌کند.

فهرست منابع

[1] Charnes, A., Cooper, W.W., & Rhodes, E., (1978), Measuring the efficiency of decision making units, European journal of operational Research, 2, 429-444.

[2] Wu, J., Chu, J.F., Sun, J.S., & Zhu, Q.Y., (2016), DEA cross efficiency evaluation based on Pareto improvement, European Journal of Operational Research, 248 (2),571-579.

[3] Moeini, M., Karimi, B., and Khorram, E., (2015) Modelling, Computation and Optimization in Information Systems and Management Sciences. Springer International Publishing. 487-498.

[4] Zhou, Z., Lin, L., Xiao, H., Ma, C., Wu, S., (2017), Stochastic network DEA models for two-stage systems under the centralized control organization mechanism, Doi : http://dx.doi.org/ 10.1016/j.cie.2017.06.005.

[5] Yang, C. C., (2014), An enhanced DEA model for decomposition of technical efficiency in banking, Journal of the Annals of Operations Research, 167-185.

[6] Emrouznejad, A., & Yang, G. L., (2018), A survey and analysis of the first 40 years of scholarly literature in DEA, Socio-Economic Planning Sciences, 61, 4–8.

[7] Liu, S.T., (2018), A DEA ranking method based on cross efficiency intervals and signal-to-noise ratio, Annals of Operations Research, 261(1-2), 207-232.

[8] Sexton, T. R., Silkman, R. H., and Hogan, A. J., (1986), Data envelopment analysis: critique and extensions. In: Silkman R H (Ed.) Measuring Efficiency: An Assessment of data Envelopment Analysis, Jossey-Bass San Francisco, Pp: 73–105.

[9] Anderson, T.R.., Hollings Worth, K.B., & Inman, L. B., (2002), The fixed weighting nature of a cross evaluation model, Journal of Productivity Analysis, 18, 249-255.

[10] Lim, S., and Zhu, J., (2014), DEA cross-efficiency evaluation under variable returns to scale, Journal of the Operational Research Society, 1-12.

[11] Cui, Q., & Li, Y., (2015), Evaluating energy efficiency for airlines: an application of VFB-DEA, Journal of Air Transport Management, 44, 34–41.

[12] Doyle, J. R., and Green, R. H., (1994), Efficiency and cross-efficiency in DEA: derivations, meanings and uses, Journal of the Operational Research Society, 45 (5): 567–578.

[13] Cook, W. D., and Zhu, J., (2014), DEA Cobb–Douglas frontier and cross-efficiency, Journal of the Operational Research Society, 65(2): 265–268.

[14] Wu, J., Chu, J.F., Sun, J.S., & Zhu, Q.Y., (2016), DEA cross efficiency evaluation based on Pareto improvement, European Journal of Operational Research, 248 (2), 571-579.

[15] Liu, S.T., (2018), A DEA ranking method based on cross efficiency intervals and signal-to-noise ratio, Annals of Operations Research, 261(1-2), 207-232.

satisfaction degree: an application to technology, (2016).

[24] Charles, V., Cornillier, F., (2017), Value of the Stochastic Efficiency in Data Envelopment Analysis, Expert Systems With Applications, doi: 10.1016/j.eswa. 2017.03.061.

[25] Cooper, W.W., Honghui, D., Huang, Z. & Li, S.X., (2004), Chance constrained programming approaches to congestion in stochastic data envelopment analysis, European Journal of Operational Research,155 (2), 487-501.

[26] Cooper, W.W., Deng, H., Huang, Z., & Li, S.X., (2002), Chance constrained programming approaches to technical efficiencies and inefficiencies in stochastic data envelopment analysis, Journal of the Operational Research Society, 53, 1347–1356.

[27] Khodabakhshi, M., (2009), Estimating most productive scale size with stochastic data in data envelopment analysis, Economic Modelling, doi: 10. 1016.j. econmod.2009.03.002.

[28] Zhou, Z., Lin, L., Xiao, H., Ma, C., Wu, S., (2017), Stochastic network DEA models for two-stage systems under the centralized control organization mechanism, Doi : http://dx.doi.org/ 10.1016/j.cie.2017.06.005

[16] Kao, C., Liu, S. (2018), Cross efficiency measurement and decomposition in two basic network systems, Omega, 1-10.

[17] Wu, J., Chu, J. F., Sun, J. S., Zhu, Q. Y., & Liang, L., (2016), Extended secondary goal models for weights selection in DEA cross-efficiency evaluation, Computers & Industrial Engineering, 93, 143-151.

[18] Ramón, N., Ruiz, J. L., and Sirvent, I., (2010), On the choice of weights profiles in cross efficiency evaluations, European Journal of Operational Research, 207 (3):1564-1572.

[19] Soltanifar, M., Shahghobadi, S., (2013), Selecting a benevolent secondary goal model in data an envelopment analysis cross-efficiency evaluation by a voting, Socio-Economic Planning Sciences, 159-167.

[20] Thompson, R. G., Singleton, F. D., Thrall, R. M., and Smith, B. A., (1986), Comparative site evaluations for locating a high-energy physics lab in Texas, Interfaces 16 (6): 35–49.

[21] Ramón, N., Ruiz, J. L., Sirvent, I., (2011), Reducing differences between profiles of weights: A ‘‘peer-restricted’’ cross-efficiency evaluation, Omega, 39 (6): 634–641.

[22] Jahanshahloo, G. R., Hosseinzadeh Lofti, F., Yafari, and Maddahi, R., (2011), Selecting symmetric weights as a secondary goal in DEA cross efficiency evaluation, Applied Mathematical Modelling, 35(1): 544–549.

[23] Wu, J., Chu, J. F., Sun, J. S., Zhu, Q. Y., & Liang, L., (2016), DEA cross-efficiency evaluation based on