دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره سی و هشتم، مهر و آبان ۱۴۰۱
شماره شاپا: ۵۸۸-۲۵۸۸X

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

نتایجی در جبرهای UP

زهرا پرویزی[۱]، سمیه معتمد[۲*]، فرهاد خاکسار حقانی[۱]، جواد مقدری[۳]

(۱) گروه ریاضی، واحد شهرکرد، دانشگاه آزاد اسلامی، شهرکرد، ایران.
(۲) گروه ریاضی، واحد بندرعباس، دانشگاه آزاد اسلامی، بندرعباس، ایران.
(۳) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه هرمزگان، بندرعباس، ایران.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۹/۰۹/۱۰   تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۲/۰۷

چکیده

در این مقاله، مفهوم پایدارسازهای یک مجموعه را در جبرهای UP معرفی و یک رده‌ی جدید از جبرهای UP را معرفی می‌کنیم. سپس به معرفی و بررسی ویژگی‌های آن‌ها و روابط بین پایدارسازهای چپ و راست یک مجموعه در جبرهای UP می‌پردازیم و شرایط معادلی برای بررسی راحت‌تر و سریع‌تر جبرهای جدید UP ارائه می‌دهیم. هم‌چنین نشان می‌دهیم که با اضافه کردن شرطی، پایدارساز چپ یک مجموعه، یک UP-فیلتر است، در حالی‌که پایدارساز راست یک مجموعه، چنین نیست. در ادامه، مفهوم هم‌اتم و هم‌اتم قوی را روی جبرهای UP تعریف و خواص آن را بررسی می‌کنیم. با پیدا کردن شرایط معادلی برای هم‌اتم‌ها، مطالعه عناصر هم‌اتم را در UP-جبرها ساده‌تر می‌کنیم. نشان می‌دهیم که برای UP-جبر A، $Coatom(A) = A \setminus \{0\}$ اگر و تنها اگر هر زیرمجموعه از A شامل 0، یک UP-فیلتر از A باشد. هم‌چنین رابطه هم‌اتم‌ها را با پایدارسازها مورد بررسی قرار می‌دهیم. در آخر مجموعه‌ی هم‌پوچ‌ساز توسعه‌یافته G نسبت به F را تعریف و ویژگی‌های آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: UP-جبر، UP-فیلتر، پایدارساز، هم‌اتم (قوی)، هم‌پوچ‌ساز (توسعه‌یافته).

* عهده دار مکاتبات: Email :s.motamed63@yahoo.com; somayeh.motamed@iauba.ac.ir

۱- مقدمه

جبرهای منطقی رده‌ی مهمی از ساختارهای جبری هستند. جبرهای BCK، جبرهای BCI، جبرهای BCH، جبرهای SU و جبرهای KU مثال‌هایی از این جبرها هستند. در سال ۲۰۰۹، مفهوم جبر KU، توسط پرابپایاک و لیراوات[2] معرفی شد [1]. در سال ۲۰۱۷، مفهوم جبر UP به‌عنوان توسیعی از جبر KU، برای اولین بار توسط ایمپان[3] مطرح شد [2]. او ثابت کرد که هر جبر KU، یک جبر UP است. ایمپان، مفهوم زیرجبرهای UP و ایده‌آل‌های UP را معرفی و مورد بررسی قرار داد. در ادامه، سامجانتا[4] و همکاران، مفهوم UP-فیلترها را معرفی کردند [3]. جان و ایمپان[5]، مفهوم UP-فیلترهای استلزامی، UP-فیلترهای نسبی و UP-فیلترهای انتقال را در جبرهای UP معرفی کردند [5,4]. از آن‌جا که جبرهای UP در ابتدای راه هستند، بیان و باز کردن هر موضوعی در این زمینه می‌تواند مفید باشد. از این‌رو، هدف این مقاله، توسعه و تعریف مفاهیم جدید برای بررسی بیشتر جبرهای UP می‌باشد. این مقاله از سه بخش تشکیل شده است. در بخش اول، بعضی از مفاهیم اساسی درباره‌ی UP-جبرها و UP-فیلترها که از آن‌ها در سرتاسر مقاله استفاده خواهیم کرد، بیان می‌کنیم. در بخش دوم، ابتدا مفهوم پایدارساز چپ، پایدارساز راست و پایدارساز یک مجموعه را بیان و ویژگی‌های آن‌ها را به‌طور کامل مطالعه می‌کنیم. نشان می‌دهیم که پایدارساز چپ یک مجموعه با اضافه کردن شرطی، یک UP-فیلتر است ولی پایدارساز راست یک مجموعه چنین نیست. هم‌چنین نشان می‌دهیم که پایدارساز راست یک مجموعه تحت عمل دوتایی "." بسته است. بعد از آن، جبر UP RS را تعریف و ویژگی‌ها و خواص این جبر را بیان می‌کنیم. در ادامه شرایط معادلی را برای بررسی سریع‌تر این نوع جبر خاص ارائه می‌کنیم. سپس UP-فیلتر نیم پایدارساز و UP-فیلتر پایدارساز را تعریف و با ارائه‌ی مثال و قضیه‌هایی به بررسی ویژگی‌های آن‌ها می‌پردازیم. در بخش سوم، ابتدا مجموعه‌ی $(F:a)$ را تعریف و با ارئه‌ی مثال و گزاره‌هایی خواص آن را بررسی می‌کنیم. بعد از آن مجموعه‌ی هم‌پوچ‌ساز توسعه‌یافته F نسبت به G را تعریف و به بررسی خواص آن می‌پردازیم.

۲- پیش‌نیازها

در سرتاسر این مقاله، UP-جبر $(A,.,0)$ را با A نشان می‌دهیم. در این بخش، مفاهیم و اصطلاحات موردنیاز در سرتاسر این مقاله را بیان می‌کنیم.

تعریف ۲-۱: [2]. سیستم جبری $A=(A,.,0)$ از نوع $(2,0)$، یک UP-جبر گفته می‌شود، هرگاه به ازای هر $x,y,z\in A$ داشته باشیم:

(۱) $(y.z).((x.y).(x.z))=0$،

(۲) $0.x=x$،

(۳) $x.0=0$،

(۴) اگر $x.y=0=y.x$ آن‌گاه $x=y$.

لم ۲-۲: [2]. به ازای هر $x,y,z\in A$، گزاره‌های زیر برقرار هستند:

(۱) $x.x=0$،

(۲) اگر $x.y=0$ آن‌گاه $(z.x).(z.y)=0$،

(۳) اگر $x.y=0$ آن‌گاه $(y.z).(x.z)=0$،

(۴) $x.(y.x)=0$.

یک رابطه‌ی $\leq$ روی A را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

---

[2] Prabpayak & Leerawat
[3] Iampan
[4] Somjanta
[5] Jun & Iampan

(۵) $x \leq y$ اگر و تنها اگر $x.y = 0$.

تعریف ۲-۳: [3]. زیرمجموعه‌ی F از A، UP-فیلتر گفته می‌شود، هرگاه $0 \in F$ و برای هر $x, y \in A$ اگر $x.y \in F$ و $x \in F$ آن‌گاه $y \in F$.

تعریف ۲-۴: [6,4]. فرض کنید F زیرمجموعه‌ای غیرتهی از A باشد. در این‌صورت

- F، UP-فیلتر اول نامیده می‌شود، هرگاه F، UP-فیلتری از A باشد و برای هر $x, y \in A$، $x.y \in F$ یا $y.x \in F$.
- F، UP-فیلتر استلزامی نامیده می‌شود، هرگاه $0 \in F$ و برای هر $x, y, z \in A$، $x.(y.z) \in F$ و $x.y \in F$ ایجاب کند که $x.z \in F$.
- F، UP-فیلتر نرمال نامید می‌شود، هرگاه F، UP-فیلتری از A باشد و برای هر $x, y, z \in A$، $z.((y.x).x) \in F$ و $z \in F$، ایجاب کندکه $(x.y).y \in F$.

نکته ۲-۵: [4]. به ازای هر $a \in A$،

$[a) \quad \{x \in A : a \leq x\}$.

قضیه ۲-۶: [۴، قضیه ۴]. به ازای هر $a \in A$، مجموعه‌ی $[a)$، UP-فیلتر است، اگر و تنها اگر $\{0\}$، UP-فیلتر استلزامی از A باشد.

قضیه ۲-۷: [۴، قضیه ۷]. فرض کنید به ازای هر $x, y, z \in A$، داشته باشیم $x.(y.z) = y.(x.z)$. اگر F زیرمجموعه‌ای غیرتهی از A باشد، آن‌گاه کوچکترین UP-فیلتر شامل F، به‌صورت زیر می‌باشد:

$$[F) = \{x \in A: a_1.(a_2.(\dots(a_n.x)\dots)) = 0, \exists\, a_1, \dots a_n \in A\}$$

۳- پایدارسازها در جبرهای UP

تعریف ۳-۱: فرض کنید X یک زیرمجموعه‌ی غیرتهی از A باشد. پایدارساز چپ X، پایدارساز راست X و پایدارساز X را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$X_l = \{a \in A: a.x = x, \forall x \in X\},$$
$$X_r = \{a \in A: x.a = a, \forall x \in X\},$$
$$X_s = X_l \cap X_r.$$

پایدارساز، پایدارساز چپ و پایدارساز راست مجموعه‌ی تک‌عضوی $\{x\}$ را به‌ترتیب با S_x ، L_x و R_x نشان می‌دهیم. واضح است که $0 \in X_s$.

مثال ۳-۲: فرض کنید $A = \{a, b, c, 0\}$ یک مجموعه با عمل دوتایی "." باشد، که در جدول (۱) داده شده است. طبق [7]، $(A, ., 0)$ یک UP-جبر است. واضح است که $\{b\}_l = \{c, 0\}$، $\{b\}_r = \{a, c, 0\}$ و $\{b\}_s = \{c, 0\}$. حال UP-فیلتر $F = \{b, 0\}$ را در نظر بگیرید. به‌وضوح $F_r = \{a, c, 0\}$، UP-فیلتر نیست.

جدول (۱):

.	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	0	0	0	0
b	0	a	0	c
c	0	a	b	0

گزاره ۳-۳: فرض کنید X یک زیرمجموعه‌ی غیرتهی از A باشد و به ازای هر $x, y, z \in A$، داشته باشیم $x.(y.z) = y.(x.z)$. در این‌صورت گزاره‌های زیر برقرار هستند:

(۱) X_l یک UP-فیلتر است،

(۲) اگر $a, b \in X_r$، آن‌گاه $a.b \in X_r$.

برهان. (۱) به‌وضوح $0 \in X_l$. حال فرض کنید برای $a, b \in A$، $a \in X_l$ و $a.b \in X_l$. پس به ازای هر $x \in X$، داریم $(a.b).x = x$ و $a.x = x$. حال به ازای هر $x \in X$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} b.x &\leq (a.b).(a.x) \\ &= a.\big((a.b).x\big) \\ &= a.x = x. \end{aligned}$$

از طرفی طبق فرض داریم

$$x.(b.x) = b.(x.x) = 0,$$

بنابراین برای هر $x \in X$، $b.x = x$ و از این‌رو $b \in X_l$. بنابراین X_l یک UP-فیلتر از A است.

(۲) فرض کنید $a, b \in X_r$ و $x \in X$. بنابراین $x.a = a$ و $x.b = b$. حال طبق فرض داریم

$$\begin{aligned} a.b &= (x.a).(x.b) \\ &= x.\big((x.a).b\big) \\ &= x.(a.b). \end{aligned}$$

در نتیجه به ازای هر $x \in X$، داریم $x.(a.b) = a.b$ بنابراین $a.b \in X_r$.

نکته: در UP-جبر مثال ۳-۲، شرط $x.(y.z) = y.(x.z)$ برای هر $x, y, z \in A$، برقرار است، در حالی‌که $\{b\}_r = \{a, c, 0\}$ یک UP-فیلتر نیست.

قضیه ۳-۴: فرض کنید X و Y دو زیرمجموعه‌ی غیرتهی از A باشند. در این‌صورت گزاره‌های زیر برقرار هستند:

(۱) $\{0\}_l = A$ و $A_l = \{0\}$،

(۲) $X_l = \quad {}_{x\in X} L_x$، $X_r = \quad {}_{x\in X} R_x$ و بنابراین $X_s = \quad {}_{x\in X} S_x$،

(۳) $X_l = \{a \in A : (a.x).x = 0, \forall\, x \in X\}$ و $X_r = \{a \in A : (x.a).a = 0, \forall\, x \in X\}$

(۴) اگر $X \subseteq Y$، آن‌گاه $\mathrm{Y_l} \subseteq \mathrm{X_l}$ و $\mathrm{Y_r} \subseteq X_r$. از این‌رو $Y_s \subseteq \mathrm{X_s}$،

(۵) داریم

$(X \cup Y)_r = X_r \cap Y_r \subseteq (X \cap Y)_r$،

$(X \cup Y)_l = X_l \cap Y_l \subseteq (X \cap Y)_l$

و $\mathrm{(X \cup Y)_s = X_s \cap Y_s \subseteq (X \cap Y)_s}$

(۶) داریم

$X \subseteq (X_r)_l \cap (X_l)_r \subseteq (X_r)_l, (X_l)_r$،

(۷) $X_r = ((X_r)_l)_r$ و $X_l = ((X_l)_r)_l$،

(۸) یا $X \cap X_r = \{0\}$ و یا $X \cap X_l = \{0\}$ و یا $X \cap X_s = \{0\}$،

(۹) اگر به ازای هر $x, y, z \in A$، داشته باشیم $x.(y.z) = y.(x.z)$، آن‌گاه

$[X) \cap X_r = \{0\} = [X) \cap X_s$،

(۱۰) $[X)_r \subseteq X_r$، $[X)_l \subseteq X_l$ و از این‌رو $[X)_s \subseteq X_s$،

(۱۱) به ازای هر $x \in A$، $[x)_r = R_x$،

(۱۲) $X = \{0\}$ اگر و تنها اگر

$X_l = X_r = X_s = A$،

(۱۳) $A_r = A_l = A_s = \{0\}$،

$(A_r)_r = (A_l)_l = (A_s)_s = A$،

$(\{0\}_r)_r = (\{0\}_l)_l = (\{0\}_s)_s = \{0\}$.

(۱۴) $(X_r)_r \cap (X_l)_l \subseteq (X_s)_s$،

(۱۵) $X \subseteq (X_s)_s$،

(۱۶) $\mathrm{X_s} = ((X_s)_s)_s$.

برهان: (۱)، (۲) و (۳) به‌راحتی ثابت می‌شوند.

(۴) فرض کنید $X \subseteq Y$ و $a \in Y_l$. در این‌صورت به ازای هر $y \in Y$، $a.y = y$. حال فرض کنید $x \in X$. چون $X \subseteq Y$، بنابراین $a.x = x$ و در نتیجه $a \in X_l$. به‌طور مشابه می‌توان نشان داد که $Y_r \subseteq X_r$ و بنابراین $\mathrm{Y_s \subseteq X_s}$.

(۵) چون $X, Y \subseteq X \cup Y$، طبق قسمت (۴)، داریم $(X \cup Y)_r \subseteq X_r \cap Y_r$. حال فرض کنید $a \in X_r \cap Y_r$. در این‌صورت به ازای هر $x \in X$ و هر $y \in Y$، $x.a = a$ و $y.a = a$. پس به ازای هر $c \in X \cup Y$، $c.a = a$ و در نتیجه $a \in (X \cup Y)_r$.

بنابراین
$(X\cup Y)_r = X_r \cap Y_r$.حال چون $X\cap Y \subseteq X, Y$،
طبق قسمت (۴)، خواهیم داشت $X_r \cap Y_r \subseteq$
$(X\cap Y)_r$. به‌طور مشابه، خواهیم داشت
$(X\cup Y)_l = X_l \cap Y_l \subseteq (X\cap Y)_l$
و در نتیجه
$(X\cup Y)_s = X_s \cap Y_s \subseteq (X\cap Y)_s$.

(۶) فرض کنید $x\in X$. به این ترتیب به ازای هر $a \in X_r$، $x.a = a$ و به ازای هر $a\in X_l$، $a.x = x$. بنابراین $x \in (X_r)_l \cap (X_l)_r$ لذا اثبات کامل است.

(۷) طبق قسمت (۶) داریم $X_l \subseteq ((X_l)_r)_l$ و $X_r \subseteq ((X_r)_l)_r$. هم‌چنین طبق قسمت‌های (۴) و (۶) داریم $((X_r)_l)_r \subseteq X_r$ و $((X_l)_r)_l \subseteq X_l$).
بنابراین $X_r = ((X_r)_l)_r$ و $X_l = ((X_l)_r)_l$.

(۸) فرض کنید $X\cap X_r \neq$ در این‌صورت $x \in X\cap X_r$ وجود دارد. پس $x.x = x$. بنابراین $x = 0$ و در نتیجه $X\cap X_r = \{0\}$. سایر قسمت‌ها به‌طور مشابه ثابت می‌شوند.

(۹) فرض کنید $a\in [X]\cap X_r$. در این‌صورت طبق قضیه‌ی ۷.۲، $x_1,\dots,x_n \in X$ وجود دارند به‌طوری‌که $x_1.\big(x_2.(\dots(x_n.a)\dots)\big) = 0$
علاوه بر این، به ازای هر $x\in X$، $x.a = a$. در نتیجه

$$a = x_1.a = x_1.(x_2.a) = \dots = x_1.\big(x_2.(\dots(x_n.a)\dots)\big) = 0.$$

پس $a = 0$ و در نتیجه $[X]\cap X_r = \{0\}$. لذا $[X]\cap X_r \cap X_l = \{0\}\cap X_l = \{0\}$ و بنابراین $[X]\cap X_s = \{0\}$.

(۱۰) از آن‌جایی‌که $X\subseteq [X]$، طبق قسمت (۴)، خواهیم داشت $[X]_r \subseteq X_r$ و $[X]_l \subseteq X_l$. در نتیجه $[X]_s \subseteq X_s$.

(۱۱) طبق قسمت (۱۰)، $[x]_r \subseteq R_x$. حال فرض کنید $a\in R_x$. پس $x.a = a$. به ازای هر $y\in [x]$، $x \le y$. لذا بنا به لم ۲-۲، $y.a \le x.a = a$ و بنابراین به ازای هر $y\in[x]$، $y.a = a$. پس $a\in [x]_r$ و در نتیجه $R_x \subseteq [x]_r$. بنابراین $[x]_r = R_x$.

(۱۲) و (۱۳) به‌راحتی ثابت می‌شوند.

(۱۴) می‌دانیم $X_s \subseteq X_l, X_r$. حال طبق قسمت (۴)، $(X_r)_r \subseteq (X_s)_r$ و $(X_l)_l \subseteq (X_s)_l$. بنابراین
$(X_r)_r \cap (X_l)_l \subseteq (X_s)_r \cap (X_s)_l = (X_s)_s$.

(۱۵) داریم
$(X_s)_s = \{a\in A : (a.x).x = 0 = (x.a).a,\ \forall x \in X_s\}.$

حال فرض کنید $b\in X$. به این ترتیب به ازای هر $x\in X_s$، $(b.x).x = 0 = (x.b).b$. بنابراین $b\in (X_s)_s$.

(۱۶) طبق قسمت (۱۵)، $X\subseteq (X_s)_s$. لذا طبق قسمت (۴)، $((X_s)_s)_s \subseteq X_s$). حال اگر در قسمت (۱۵)، به‌جای X، X_s را جایگذاری کنیم، خواهیم داشت $X_s \subseteq ((X_s)_s)_s$. پس $X_s = ((X_s)_s)_s$.

مثال ۳-۵: فرض کنید $A = \{1,2,3,0\}$ یک مجموعه با عمل دوتایی "." باشد که در جدول (۲) داده شده است. طبق [۵]، $(A, ., 0)$ یک UP-جبر است. بوضوح $1.(2.3) \neq 2.(1.3)$ و $(1.3).3 \nleq 1$. بنابراین به ازای هر $x, y, z \in A$، ویژگی‌های $x.(y.z) = y.(x.z)$ و $y \le (y.x).x$، در حالت کلی برقرار نیست.

تبصره ۳-۶: فرض کنید به ازای هر $x, y, z\in A$، $x.(y.z) = y.(x.z)$ در این صورت $y.\big((y.x).x\big) = (y.x).(y.x) = 0$. بنابراین $y \le (y.x).x$.

قضیه ۳-۷: فرض کنید X یک زیرمجموعه‌ی غیرتهی از A، X_r یک UP-فیلتر باشد و به ازای هر

$x,y,z \in A$ داشته باشیم $x.(y.z) = y.(x.z)$.
در این‌صورت گزاره‌های زیر برقرار هستند:

(۱) $X_r = X_s$،

(۲) $X \subseteq (X_r)_r$.

برهان: (۱) فرض کنید $a \in X_r$ و $a \in X$. طبق تبصره ۳-۶، $a \leq (a.x).x$ و بنابراین $x \leq (a.x).x$. از آن‌جایی‌که $(a.x).x \in X_r$، لذا $(a.x).x \in [X)$. بنابراین طبق قضیه ۳-۴ قسمت (۹)، $(a.x).x \in X_r \cap [X) = \{0\}$. لذا به ازای هر $x \in X$، $a.x = x$. در نتیجه $a \in X_r \cap X_l = X_s$ و بنابراین $X_r \subseteq X_s$. در نتیجه $X_s = X_r$.

(۳) طبق قضیه ۳-۴ قسمت (۱۵)، $X \subseteq (X_s)_s$. حال طبق قسمت (۱)، داریم

(۴) $X \subseteq (X_r)_s \subseteq (X_r)_r$.

جدول (۲):

.	0	1	2	3
0	0	1	2	0
1	0	0	1	2
2	0	0	0	2
3	0	0	0	0

قضیه ۳-۸: فرض کنید F و G دو UP-فیلتر از A باشند طوری‌که به ازای هر $x,y,z \in A$، $x.(y.z) = y.(x.z)$. در این‌صورت شرایط زیر هم‌ارزند:

(۱) $F \cap G = \{0\}$،

(۲) $F \subseteq G_s$،

(۳) $F \subseteq G_r$،

(۴) $F \subseteq G_l$.

برهان: (۲) (۱) فرض کنید $F \cap G = \{0\}$ و $x \in F$. حال به ازای هر $y \in G$، طبق تبصره۳-۶، داریم $x \leq (x.y).y$ و از طرفی $y \leq (x.y).y$. بنابراین به ازای هر $y \in G$، خواهیم داشت

$(x.y).y \in F \cap G = \{0\}$.

پس به ازای هر $y \in G$، $x.y = y$ و در نتیجه $x \in G_l$. به‌طور مشابه ثابت می‌شود که به ازای هر $y \in G$، $y.x = x$، یعنی $x \in G_r$ و بنابراین $x \in G_s$.

(۱) (۲) واضح است.

(۳) (۱) طبق (۲) (۱) واضح است.

(۱) (۳) فرض کنید $x \in F \cap G$. چون $F \subseteq G_r$، لذا به ازای هر $y \in G$، خواهیم داشت $y.x = x$.بنابراین $x.x = x$.درنتیجه $F \cap G = \{0\}$.

(۴) (۱) مشابه (۳) (۱) اثبات می‌شود.

قضیه ۳-۹: فرض کنید F یک UP-فیلتر از A و به ازای هر $x,y,z \in A$ داشته باشیم $x.(y.z) = y.(x.z)$. در این‌صورت شرایط زیر برقرارند:

(۱) $F_l = F_s \subseteq F_r$. به‌ویژه اگر F_r یک UP-فیلتر از A باشد، آن‌گاه $F_l = F_s = F_r$.

(۲) $F \subseteq (F_l)_l$، $F \subseteq (F_s)_l$ و $F \subseteq (F_s)_r$.

برهان: (۱) از آن‌جایی‌که F_l و F دو UP-فیلتر هستند، طبق قضیه‌های ۳-۴ قسمت (۸) و ۳-۸، خواهیم داشت $F_l \subseteq F_s$. بنابراین $F_l = F_s \subseteq F_r$. به‌ویژه اگر F_r یک UP-فیلتر از A باشد، طبق قضیه ۳-۷، $F_s = F_r$. بنابراین $F_l = F_s = F_r$.

(۲) طبق (۱) و قضیه ۳-۴ قسمت‌های (۴) و (۶)، داریم $F \subseteq (F_r)_l \subseteq (F_l)_l$. حال طبق قضیه‌های ۳-۴ قسمت (۸) و ۳-۸، $F \subseteq (F_s)_l$ و $F \subseteq (F_s)_r$.

تعریف ۳-۱۰: اگر به ازای هر $a \in A$، R_a یک UP-فیلتر باشد، UP-جبر A را یک $RS\quad UP$-جبر نامیم.

مثال ۳-۱۱:

(۱) در مثال ۳-۲، $R_b = \{a, c, 0\}$ و $R_c = \{a, b, 0\}$، UP-فیلتر نیستند. لذا A، UP RS-جبر نیست.

(۲) در مثال ۳-۵، واضح است که $R_1 = R_2 = R_3 = \{0\}$، UP-فیلتر هستند. از این‌رو A یک UP RS-جبر است.

قضیه ۳-۱۲: فرض کنید برای هر $x, y, z \in A$ داشته باشیم $x.(y.z) = y.(x.z)$ همچنین فرض کنید $\{0\}$ یک UP-فیلتر استلزامی از A باشد، آن‌گاه شرایط زیر هم‌ارزند:

(۱) A یک UP RS-جبر است،

(۲) به ازای هر زیرمجموعه‌ی غیرتهی X از A، X_{r} یک UP-فیلتر از A است،

(۳) به ازای هرUP-فیلتر F از A، F_r یک UP-فیلتر از A است،

(۴) هر زیرجبر B از A، یک UP RS-جبر است،

(۵) به ازای هر $a \in A$، $S_a \subseteq R_a \subseteq L_a$،

(۶) به ازای هر $a \in A$، $R_a = L_a = S_a$،

(۷) به ازای هر زیرمجموعه‌ی غیرتهی X از، A $X_r = X_l = X_s$،

(۸) به ازای هر $a, b \in A$، اگر $a.b = b$، آن‌گاه $b.a = a$.

برهان: (۲) $\Leftarrow$ (۱) طبق قضیه ۳-۴ قسمت (۲) و تعریف ۳-۱۰، واضح است.

(۳) $\Leftarrow$ (۱) طبق (۲) $\Leftarrow$ (۱) واضح است.

(۱) $\Leftarrow$ (۳) فرض کنید $a \in A$. در این‌صورت طبق قضیه ۲-۶، $[a)_{\mathrm{r}}$ یک UP-فیلتر است. حال طبق قضیه ۳-۴ قسمت (۱۱)، داریم $[a)_{\mathrm{r}} = R_a$. بنابراین A یک UP RS-جبر است.

(۴) $\Leftarrow$ (۱) فرض کنید B یک زیرجبر از A، $b \in B$ و R_{b} وR'_b به‌ترتیب پایدارسازهای راست b نسبت به B و A باشند، یعنی

$$R_b = \{x \in B : b.x = x\}$$

و

$$R'_b = \{a \in A : b.a = a\}.$$

در این‌صورت $R_b = R'_b \cap B$. نشان می‌دهیم که R_{b} یک UP-فیلتر است. چون $0 \in R'_b$ و $0 \in B$. پس $0 \in R_b$. حال فرض کنید که $x, y \in B$ به‌طوری‌که $y.x \in R_b$ و $y \in R_b$. چون $R_b \subseteq R'_b$ و R'_{b} یک UP-فیلتر A است، لذا $x \in R'_b$. هم‌چنین $x \in R'_b \cap B = R_b$. بنابراین R_b یک UP-فیلتر از B است. در نتیجه B یک RS UP-جبر است.

(۱) $\Leftarrow$ (۴) واضح است.

(۵) $\Leftarrow$ (۱) فرض کنید A یکUP RS-جبر باشد. پس به ازای هر $a \in A$، R_a یک UP-فیلتر از A است. بنابراین طبق قضیه ۳-۹ و قضیه ۳-۴ قسمت‌های (۱۰) و (۱۱)، داریم $R_a = [a)_r = [a)_l \subseteq L_a$. در نتیجه $S_a = R_a \subseteq L_a$.

(۶) $\Leftarrow$ (۵) فرض کنید $x \in L_a$. پس $x.a = a$ و $a \in R_x$. در نتیجه طبق فرض، $a \in L_x$. بنابراین $a.x = x$ و بنابراین $x \in R_a$ و $L_a \subseteq R_a$.

(۷) $\Leftarrow$ (۶) واضح است.

(۸) $\Leftarrow$ (۶) فرض کنید برای هر $a, b \in A$، $a.b = b$ به این ترتیب $b \in R_a = L_a$ و بنابراین به ازای هر $a, b \in A$، خواهیم داشت $b.a = a$.

(۱) $\Leftarrow$ (۸) طبق فرض به ازای هر $a \in A$،

$$\begin{aligned} R_a &= \{x \in A : a.x = x\} \\ &= \{x \in A : x.a = a\} = L_a. \end{aligned}$$

چون L_a یک UP-فیلتر است، پس R_a نیزUP-فیلتر است. بنابراین A یکUP RS-جبر است.

نتیجه ۳-۱۳: فرض کنید برای هر $x, y, z \in A$ داشته باشیم $x.(y.z) = y.(x.z)$ هم‌چنین فرض کنید $\{0\}$ یک UP-فیلتر استلزامی از A باشد و به ازای هر UP-فیلتر F از A، داشته باشیم

$F = (F_r)_r$. آن‌گاه A یک UP RS-جبر است.

برهان: فرض کنید $a \in A$. طبق قضیه ۲-۶ و قضیه ۳-۴ قسمت (۱۱)، $[a) = ([a)_r)_r = (R_a)_r$. حال فرض کنید $x \in R_a$ چون $a \in [a) = (R_a)_r$، به ازای هر $y \in R_a$، $y.a = a$. پس $x.a = a$ و در نتیجه $R_a \subseteq L_a$. از این‌رو طبق قضیه۳-۱۲، A یک UP RS-جبر است.

شرط $x.(y.z) = y.(x.z)$ برای اثبات معادل بودن شرط (۵) در قضیه ۳-۱۲ لازم است و برای اثبات معادل بودن سایر قسمت‌ها لازم نیست. لذا قضیه زیر را داریم:

قضیه ۳-۱۴: فرض کنید $\{0\}$ یک UP-فیلتر استلزامی از A باشد. آن‌گاه شرایط زیر هم‌ارزند:
(۱) A یک UP RS-جبر است،
(۲) به ازای هر زیرمجموعه‌ی غیرتهی X از A، X_r یک UP-فیلتر از A است،
(۳) به ازای هر UP-فیلتر F از A، F_r یک UP-فیلتر از A است،
(۴) هر زیرجبر B از A، یک UP RS-جبر است،
(۵) به ازای هر $a \in A$، $R_a = L_a = S_a$،
(۶) به ازای هر زیرمجموعه‌ی غیرتهی X از A، $X_r = X_l = X_s$،
(۷) به ازای هر $a, b \in A$، اگر $a.b = b$، آن‌گاه $b.a = a$.

لم ۳-۱۵: اگر به ازای هر $x, y, z \in A$، $(x.y).x = x$ و $x.(y.z) = y.(x.z)$ و $\{0\}$ یک UP-فیلتر استلزامی از A باشد. آن‌گاه A یک UP RS-جبر است.

برهان: طبق تبصره ۳-۶، $y \le (y.x).x$. حال طبق لم ۲-۲، داریم

$$(x.y).y \le (x.y).((y.x).x) = (y.x).((x.y).x) = (y.x).x.$$

فرض کنید F یک UP-فیلتر از A باشد و $x \in F_r$ در این‌صورت به ازای هر $a \in F$، $a.x = x$. از طرفی، $0 = (a.x).x \le (x.a).a$، پس به ازای هر $a \in F$، $x.a = a$ بنابراین $x \in F_l$ و $F_r \subseteq F_l$. از این‌رو طبق قضیه ۳-۹، نتیجه می‌گیریم که $F_l = F_r$. بنابراین F_r یک UP-فیلتر و A یک UP RS-فیلتر است.

تعریف ۳-۱۶: فرض کنید F یک UP-فیلتر از A باشد. اگر $(F_s)_s = F$، آن‌گاه F را یک UP-فیلتر نیم‌پایدارساز می‌نامیم.

مثال ۳-۱۷: در مثال ۳-۲، UP-فیلترهای $F = \{c, 0\}$ و $G = \{b, c, 0\}$ را در نظر بگیرید. واضح است که $(G_s)_s = A$ و $(F_s)_s = F$. لذا F، UP-فیلتر نیم‌پایدارساز A است و بنابراین G، UP-فیلتر نیم‌پایدارساز نیست.

نکته ۳-۱۸: $\{0\}$ کوچکترین UP-فیلتر نیم‌پایدارساز و A بزرگترین UP-فیلتر نیم‌پایدارساز است.

قضیه ۳-۱۹: فرض کنید X یک زیرمجموعه‌ی غیرتهی از A و F یک UP-فیلتر نیم‌پایدارساز A باشد و به ازای هر $x, y, z \in A$، داشته باشیم $x.(y.z) = y.(x.z)$ در این‌صورت $F = (F_r)_l$.

برهان: طبق قضیه ۳-۴ قسمت (۶)، $F \subseteq (F_r)_l$. از طرفی طبق قضیه۳-۹، $F_l = F_s \subseteq F_r$. بنابراین

$$(F_r)_l \subseteq (F_s)_l = (F_s)_s = F.$$

در نتیجه $F = (F_r)_l$.

تعریف ۳-۲۰: فرض کنید F یک UP-فیلتر از A باشد. اگر $F_s = \{0\}$، آن‌گاه F را یک UP-فیلتر پایدارساز می‌نامیم.

مثال ۳-۲۱: در مثال۳-۲، $G = \{b, c, 0\}$ UP-فیلتر پایدارساز است در حالی‌که $F = \{b, 0\}$، UP-فیلتر پایدارساز نمی‌باشد.

نکته ۳-۲۲: A بزرگترین UP-فیلتر پایدارساز است.
طبق قضیه ۳-۴ قسمت (۱۶) داریم:

نتیجه ۳-۲۳: فرض کنید F یک UP-فیلتر از A باشد. در این‌صورت F، UP-فیلتر پایدارساز است اگر و تنها اگر $(F_s)_s = A$.
طبق قضیه ۳-۹ داریم:

نتیجه ۳-۲۴: فرض کنید F یک UP-فیلتر A باشد و به ازای هر $x, y, z \in A$، $x.(y.z) = y.(x.z)$. در این‌صورت F یکUP-فیلتر پایدارساز است اگر و تنها اگر $F_l = \{0\}$.
طبق قضیه ۳-۷ داریم:

نتیجه ۳-۲۵: فرض کنید F و F_r، UP-فیلترهایی از A باشند و به ازای هر $x, y, z \in A$، $x.(y.z) = y.(x.z)$ در این‌صورت F یک UP-فیلتر پایدارساز است اگر و تنها اگر $F_r = \{0\}$.
طبق قضیه ۳-۴ داریم:

نتیجه ۳-۲۶: فرض کنیدF و G دو UP-فیلتر از A باشند به‌طوری‌که $F \subseteq G$ و F یک پایدارساز باشد. در این‌صورت G نیز پایدارساز است.

تعریف۳-۲۷: فرض کنید X یک زیر مجموعه ناتهی از UP–جبر A باشد. عنصر غیر صفر a از مجموعه X را هم‌اتم گوییم، اگر برای $b \in X$، داشته باشیم $a \leq b$، آنگاه $b \in \{a, 0\}$، یعنی $b = a$ یا $b = 0$. مجموعه هم‌اتم‌های مجموعه X را با نماد $Coatom(X)$ نشان می‌دهیم.

مثال ۳-۲۸: (۱) در مثال ۳-۵، بوضوح داریم $Coatom(A) = \{a, 0\}$.
(۲) مجموعه $A = \{a, b, c, 0\}$ با عملگر دوتایی " " تعریف شده در جدول (۳)، یک UP–جبر است ([۴]). بوضوح $Coatom(A) = \{a, 0\}$.

جدول (۳):

.	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	0	0	b	c
b	0	0	0	c
c	0	0	a	0

قضیه ۳-۲۹: فرض کنید هر عضو غیر صفر ازUP-جبر A یک هم‌اتم باشد، آنگاهبرای هر دو عضو غیر قابل مقایسه x و y از A داریم $x \in y_s$ و $y \in x_s$.

برهان: فرض کنید x و y دو عضو غیر قابل مقایسه از A باشند. از این‌رو $x, y \neq 0$. از آنجایی که $x \leq y$، x. طبق فرض، نتیجه می‌گیریم که $x = 0$ y یا $x = x$ y. از طرفی چون x و y غیر قابل مقایسه هستند، لذا $x \neq 0$ y. بنابراین $x = x$ y. پس $x \in y_r$. از طرفی چون $y \leq x$ y، به‌طور مشابه نتیجه می‌گیریم که $y = y$ x. بنابراین $x \in y_l$. در نتیجه $x \in y_s$. به‌طور مشابه ثابت می‌شود $y \in x_s$.

گزاره ۳-۳۰: فرض کنید A یک UP-جبر باشد. اگر $a \in Coatom(A)$، آنگاه برای هر $x\ \ a$، داریم $x \in a_l$ و $a \in x_r$.

برهان: فرض کنید که $a \in Coatom(A)$. برای هر $x \in A$، $a \le x\ \ a$. لذا طبق فرض نتیجه می‌گیریم که $x\ \ a = 0$ یا $x\ \ a = a$. از آنجایی که $x\ \ a$، لذا $x \in a_l$ و $a \in x_r$.

نتیجه ۳-۳۱: فرض کنید A یک UP-جبر باشد. اگر $a, b \in Coatom(A)$ و $a \neq b$، آنگاه $a \in b_s$ و $b \in a_s$.

برهان: فرض کنید $a, b \in Coatom(A)$ و $a \neq b$. آنگاه $a\ \ b$ (اگر $a < b$، آنگاه طبق $a \in Coatom(A)$ و $a \neq b$، نتیجه می‌گیریم $b = 0$، که تناقض است). حال طبق گزاره ۳-۳۰، $a \in b_l$ و $b \in a_r$. به‌طور مشابه چون $a, b \in Coatom(A)$ و $a \neq b$، داریم $b\ \ a$ (اگر $b < a$، آنگاه طبق $b \in Coatom(A)$ و $a \neq b$، نتیجه می‌گیریم $a = 0$، که تناقض است). حال طبق گزاره ۳-۳۰، $a \in b_r$ و $b \in a_l$. لذا اثبات کامل است.

لم ۳-۳۲: فرض کنید X زیرمجموعه‌ای از UP-جبر A باشد و برای $x, y \in X$ داشته باشیم $x \le y < 0$. اگر $x \in Coatom(X)$ آنگاه $y \in Coatom(X)$.

برهان: فرض کنید برای $a \in A$، داشته باشیم $y \le a$. آنگاه طبق فرض $x \le y \le a$. از آنجایی که $x \in Coatom(X)$، لذا $a = 0$ یا $a = x$. بنابراین $a = 0$ یا $a = y$. از این‌رو $y \in Coatom(X)$.

گزاره ۳-۳۳: فرض کنید A یک UP-جبر و $a \in A\ \ \{0\}$. اگر $[a) = \{a, 0\}$ آنگاه $a \in Coatom(X)$.

برهان: فرض کنید برای $x \in A$، داشته باشیم $a \le x$. آنگاه طبق تعریف ۲-۵ داریم $[x) \subseteq [a)$. از آنجایی که $x \in [x)$، بنابراین $x \in \{a, 0\}$. لذا نتیجه می‌گیریم که $a \in Coatom(X)$.

گزاره ۳-۳۴: فرض کنید A یکUP-جبر باشد. $Coatom(A) = A\ \ \{0\}$ اگر و تنها اگر هر زیر مجموعه از A شامل 0، یک UP-فیلتر از A باشد.

برهان: فرض کنید $Coatom(A) = A\ \ \{0\}$ و X زیر مجموعه‌ای از A شامل 0 باشد. همچنین فرض کنید که برای $x, y \in A$، داشته باشیم $x \in X$ و $x\ \ y \in X$. حالت‌های زیر را داریم:

حالت اول) اگر $x = y = 0$، آنگاه اثبات واضح است.

حالت دوم) اگر $x, y \neq 0$، آنگاه $x, y \in Coatom(A)$. حال از آنجایی که $y \le x\ \ y$، نتیجه می‌گیریم که $x\ \ y = y$ یا $x\ \ y = 0$. حال دو حالت داریم: اگر $x\ \ y = y$، آنگاه $y \in X$. و اگر $x\ \ y = 0$، آنگاه $x \le y$. از طرفی طبق فرض $x \in Coatom(A)$، لذا $y = 0$ یا $y = x$. بنابراین $y \in X$ و از این‌رو اثبات کامل است.

حالت سوم) اگر $x = 0$ و $y \neq 0$ یا $y = 0$ و $x \neq 0$. آنگاه اثبات واضح است.

برعکس، فرض کنید $a \in A\ \ \{0\}$ و برای $x \in A$، داشته باشیم $a \le x$. طبق فرض مجموعه $\{a, 0\}$ یک UP فیلتر از A می‌باشد. لذا از آنجایی که $a \le x$ و $a \in \{a, 0\}$، نتیجه می‌گیریم $x \in \{a, 0\}$ بنابراین $a \in Coatom(A)$.

تذکر ۳-۳۵: تمام اعضای یک UP-جبر، هم اتم هستند اگر و تنها اگر UP-جبر، دو عضوی باشد یا اعضای UP-جبر، قابل مقایسه نباشند.

تذکر ۳-۳۶: اگر UP-جبر، خطی باشد، آنگاه بزرگترین عضو مخالف صفر آن، هم اتم است.

قضیه ۳-۳۷: فرض کنید UP-جبر A، برای هر $x,y,z \in A$، در شرط $x.(y.z) = y.(x.z)$ صدق کند و a عضو غیر صفر از A باشد. آنگاه شرایط زیر معادل هستند:

(۱) $a \in Coatom(A)$،

(۲) برای هر $x\ \ a_r$، داشته باشیم $a = (a\ \ x)x$،

(۳) برای هر $x\ \ a_r$ و $y \in A$، داشته باشیم $(a\ \ x)\ \ (y\ \ x) = y\ \ a$.

(۴) برای هر $x\ \ a_r$ و $z \in A$، داشته باشیم $(z\ \ x)\ \ a \geq (a\ \ x)\ \ z$.

(۵) برای هر $x\ \ a_r$ و $y,z \in A$، داشته باشیم $(z\ \ x)\ \ (y\ \ a) \geq (a\ \ x)\ \ (y\ \ z)$.

(۶) برای هر $x\ \ a_r$ و $y \in A$، داشته باشیم $((y\ \ a)\ \ x)\ \ x = y\ \ a$.

برهان: (۱)   (۲) فرض کنیم $a \in Coatom(A)$ و $x\ \ a_r$. طبق تبصره ۳-۶ داریم $a \leq (a\ \ x)\ \ x$. حال از آنجایی‌که $a \in Coatom(A)$، نتیجه می‌گیریم که $(a\ \ x)\ \ x = 0$ یا $(a\ \ x)\ \ x = a$. از طرفی $x\ \ a_r$، بنابراین $(a.x).x \neq 0$ و در نتیجه $(a\ \ x)\ \ x = a$.

(۲)   (۳) فرض کنید $x\ \ a_r$ و $y \in A$. طبق فرض و قسمت (۲)، برای هر $x\ \ a_r$ داریم:

$$(a\ \ x)\ \ (y\ \ x) = y\ \ \left((a\ \ x)\ \ x\right) = y\ \ a$$

بنابراین اثبات کامل است.

(۳)   (۴) فرض کنید $x\ \ a_r$ و $z \in A$. طبق تبصره۳-۶ داریم $z \leq (z\ \ x)\ \ x$. آنگاه طبق قسمت (۳) داریم:

$$(a\ \ x)\ \ z \leq (a\ \ x)\ \ \left((z\ \ x)\ \ x\right) = (z\ \ x)\ \ a\ .$$

(۴)   (۵) فرض کنید $x\ \ a_r$ و $y,z \in A$. طبق فرض و قسمت (۴) داریم:

$$(a\ \ x)\ \ (y\ \ z) = y\ \ \left((a\ \ x)\ \ z\right) \leq y\ \ ((z\ \ x)\ \ a) = (z\ \ x)\ \ (y\ \ a)$$

و بنابراین اثبات کامل است.

(۵)   (۶) فرض کنید $x\ \ a_r$ و $y \in A$. طبق قسمت (۵) و طبق فرض، داریم

$$\left(((y\ \ a)\ \ x)\ \ x\right)\ \ (y\ \ a) \geq (a\ \ x)\ \ \left(y\ \ ((y\ \ a)\ \ x\right) = (a\ \ x)\ \ \left((y\ \ a)\ \ (y\ \ x)\right) \geq (a\ \ x)\ \ (a\ \ x) = 0$$

از این‌رو $((y\ \ a)\ \ x)\ \ x \leq y\ \ a$. از طرفی طبق تبصره ۳-۶ داریم

$$y\ \ a \leq \left((y\ \ a)\ \ x\right)\ \ x$$

بنابراین برای هر $x\ \ a_r$ و $y \in A$، خواهیم داشت $((y\ \ a)\ \ x)\ \ x = y\ \ a$.

(۶)   (۲) برای اثبات قسمت (۲)، کافی است در قسمت (۶)، قرار دهیم $y = 0$.

(۲)   (۱) فرض کنید $0 \neq w \in A$ و $a \leq w$. آنگاه $(a\ \ w)\ \ w = 0\ \ w = w \neq 0$ و از این‌رو $w\ \ a_r$. لذا طبق قسمت (۲) داریم $a = (a\ \ w)\ \ w$. بنابراین $a = w$، یعنی $a \in Coatom(A)$.

گزاره ۳-۳۸: فرض کنید F و G دو زیرمجموعه ناتهی از UP-جبر A باشند. آنگاه داریم:

(۱) $Coatom(F \cup G) \subset Coatom(F) \cup Coatom(G)$،

(۲) $Coatom(F) \cap Coatom(G) \subset Coatom(F \cap G)$.

برهان: (۱) فرض کنید $z \in Coatom(F \cup G)$ آنگاه $z \in F \cup G$. فرض کنید عضو غیر صفری از F یا G، مانند x وجود دارد به‌طوری‌که $z \leq x$. لذا $x \in F \cup G$ ازآنجایی‌که $z \in Coatom(F \cup G)$، نتیجه می‌گیریم که $z = x$. بنابراین $z \in Coatom(F) \cup Coatom(G)$ و اثبات کامل است.

(۲) فرض کنید $z \in Coatom(F) \cap Coatom(G)$. لذا $z \in Coatom(F)$ و $z \in Coatom(G)$ از این‌رو $z \in F$ و $z \in G$ یعنی $z \in F \cap G$. فرض کنید عضو غیر صفری از $F \cap G$، مانند x وجود دارد به‌طوری‌که $z \leq x$. از آنجایی‌که $x \in F$، $x \in G$ و $z \in Coatom(F)$، $z \in Coatom(G)$ نتیجه می‌گیریم که $z = x$. بنابراین $z \in Coatom(F \cap G)$ و اثبات کامل است.

تعریف ۳-۳۹: فرض کنید A یک UP-جبر باشد. تعریف می‌کنیم:

$(Coatom(A))^+ = Coatom(A) \cup \{0\}$.

طبق نتیجه ۳-۳۱، داریم:

نتیجه ۳-۴۰: فرض کنید A یک UP-جبر باشد. اگر $a, b \in (Coatom(A))^+$ و $a \neq b$، آنگاه $a \in b_s$ و $b \in a_s$.

زیر مجموعه ناتهی S از یک UP-جبر را بالایی گوییم، اگر $x \in S$ و $x \leq y$ آنگاه $y \in S$.

قضیه ۳-۴۱: فرض کنید S یک مجموعه بالایی از UP-جبر A باشد. آنگاه $S = (Coatom(S))^+$ اگر و تنها اگر برای هر $a, b \in S$، به‌طوریکه $a \neq b$، آنگاه $a \in b_s$ و $b \in a_s$.

برهان: فرض کنید که $S = (Coatom(S))^+$ آنگاه طبق نتیجه ۳-۴۰، برای هر $a, b \in S$، که $a \neq b$، خواهیم داشت $a \in b_s$ و $b \in a_s$. برعکس، فرض کنید $b \in S \quad \{0\}$، به‌طوریکه عضوی ناصفر مانند x از S موجود باشد که $b \leq x$. کافی است نشان دهیم که $b \in Coatom(S)$. دو حالت داریم:

حالت اول) اگر $x \neq b$، آنگاه طبق فرض، $x \in b_s$ و بنابراین $b \quad x = x$. حال از آنجایی که $b \leq x$، لذا $b \quad x = 0$. از این‌رو $x = 0$، که با فرض در تناقض است.

حالت دوم) اگر $x = b$، آنگاه $b \in Coatom(S)$ و اثبات کامل است.

قضیه ۳-۴۲: فرض کنید A یک UP-جبر متناهی و $x \in A \quad (Coatom(A))^+$. آنگاه عضوی از $Coatom(A)$ مانند a وجود دارد به‌طوریکه $x < a$.

برهان: فرض کنید $x \in A \quad (Coatom(A))^+$. آنگاه عضوی مانند x_1 از A موجود است بقسمی که $x < x_1 < 0$. اگر $x_1 \in A \quad (Coatom(A))^+$ آنگاه عضوی مانند x_2 از A موجود است بقسمی که $x < x_1 < x_2 < 0$. اگر

$x_2 \in A \quad (Coatom(A))^+$

آنگاه عضوی مانند x_3 از A موجود است بقسمی که $x < x_1 < x_2 < x_3 < 0$. با ادامه این روند،

چون A یک UP-جبر متناهیاست، لذا عضوی مانند a از $Coatom(A)$ موجود است بقسمی که $x < a$.

تعریف ۳-۴۳: فرض کنید A یک UP-جبر باشد. یک هم‌اتم b از A را هم‌اتم قوی نامیم اگر برای هر $x \in A \ \ \{b,0\}$، داشته باشیم $x \in b_l$ و $b \in x_r$. مجموعه $(SC(A))^+$، را به‌شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$\{b \in Coatom(A):$ هم اتم قوی باشد b یا $b = 0\}$

مثال ۳-۴۴:

(۱) در مثال ۳-۲، هم‌اتم b قوی نیست.

(۲) مجموعه $A = \{a, b, c, 0\}$ با عملگر دوتایی " " تعریف شده درجدول (۴)، یک UP-جبر است ([۸]). به وضوح a یک هم‌اتم قوی هست.

جدول (۴):

.	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	0	0	b	c
b	0	a	0	c
c	0	a	b	0

قضیه ۳-۴۵: فرض کنید A یک UP-جبر باشد که برای هر $x, y, z \in A$ در شرط $x.(y.z) = y.(x.z)$ صدق کند و همچنین فرض کنید $0 \neq u \in A \ \ (SC(A))^+$. آنگاه برای هر $b \in (SC(A))^+$، $b \in u_l$ و $u \in b_r$.

برهان: فرض کنید $b \in (SC(A))^+$. آنگاه b یک هم‌اتم قوی است یا $b = 0$. اگر $b = 0$، که اثبات کامل است. حال اگر $b \neq 0$ یک هم‌اتم قوی باشد، آنگاه $(b \ \ u) \ \ u = 0$ یا $(b \ \ u) \ \ u = b$، زیرا طبق تبصره ۳-۶، $b \le (b \ \ u) \ \ u$. لذا دو حالت داریم:

حالت اول) اگر $(b \ \ u) \ \ u = 0$ آنگاه $b \ \ u = u$. در نتیجه $b \in u_l$ و $u \in b_r$ و اثبات کامل است.

حالت دوم) اگر $(b \ \ u) \ \ u = b$ آنگاه

$$\begin{aligned} u \ \ b &= u \ \ ((b \ \ u) \ \ u) \\ &= (b \ \ u) \ \ (u \ \ u) = 0 \end{aligned}$$

لذا $u \ \ b = 0$ که با فرض در تناقض است. زیرا b یک هم‌اتم قوی و $b \neq 0$ است و همچنین $u \in A \ \ \{b,0\}$، لذا اثبات کامل است.

۴- هم‌پوچ‌سازها

طبق تعریف مجموعه بالایی که در بخش سه، به آن اشاره شد، داریم:

لم ۴-۱: [۵]. هر UP-فیلتر F از A، یک مجموعه‌ی بالایی است.

مثال ۴-۲: در مثال ۳-۵، $F = \{1,0\}$ یک مجموعه‌ی بالایی است ولی UP-فیلتر نیست.

تعریف ۴-۳: فرض کنید F یک مجموعه‌ی غیرتهی بالایی از A باشد و هم‌چنین فرض کنید $a \in A$. تعریف می‌کنیم

$$(F: a) = \{x \in A: (a.x).x \in F\}.$$

مثال ۴-۴: فرض کنید $A = \{a, b, c, 0\}$ یک مجموعه با عمل دوتایی "." باشد که در جدول (۵) نشان داده شده است. طبق [۵]، $(A, ., 0)$ یک UP-جبر است. واضح است که $F = \{b, 0\}$ یک مجموعه‌ی بالایی است و

$$(F: c) = \{a, b, 0\}$$
$$(F: a) = \{b, c, 0\}(F: 0) = \{a, b, c, 0\}$$
$$(F: b) = \{a, b, c, 0\}$$

واضح است که $(F:c)$، UP-فیلتر نمی‌باشد.

جدول (۵):

.	0	a	b	c
0	0	a	b	c
a	0	0	0	c
b	0	a	0	c
c	0	a	b	0

گزاره ۴-۵: فرض کنید F و G دو مجموعه‌ی غیرتهی بالایی از A و هم‌چنین فرض کنید $x, y \in A$. در این‌صورت شرایط زیر برقرار هستند:

(۱) $F \subseteq (F:x)$،

(۲) اگر به ازای هر $x, y, z \in A$، داشته باشیم $x.(y.z) = y.(x.z)$، آن‌گاه $x \in F$ اگر و تنها اگر $(F:x) = A$،

(۳) اگر $F \subseteq G$، آن‌گاه $(F:x) \subseteq (G:x)$،

(۴) اگر $x \leq y$، آن‌گاه $(F:x) \subseteq (F:y)$،

(۵) $(F \cap G:x) = (F:x) \cap (G:x)$.

برهان: (۱) فرض کنید $y \in F$. از آن‌جایی‌که $y \leq (x.y).y$، لذا خواهیم داشت $(x.y).y \in F$ و در نتیجه $y \in (F:x)$.

(۲) فرض کنید $x \in F$ و $r \in A$. طبق تبصره۳-۶، داریم $x \leq (x.r).r$. لذا $(x.r).r \in F$. بنابراین $r \in (F:x)$، یعنی $(F:x) = A$. برعکس، واضح است.

(۳) اثبات واضح است.

(۴) فرض کنید $x \leq y$ و $a \in (F:x)$. بنابراین داریم $(x.a).a \in F$. از طرفی طبق فرض $(x.a).a \leq (y.a).a$. لذا $(y.a).a \in F$. بنابراین $a \in (F:y)$.

(۵) اثبات واضح است.

مثال زیر نشان می‌دهد که عکس قسمت‌های (۱) و (۳) از گزاره ۴-۵، در حالت کلی برقرار نیست.

مثال ۴-۶: در مثال ۴-۴، $F = \{b, 0\}$ را در نظر بگیرید. در این‌صورت $(F:a) = \{b, c, 0\}$ و $F \quad (F:a)$.

فرض کنید $A = \{a, b, c, d, 0\}$ یک مجموعه با عمل دوتایی "." باشد که در جدول (۶) نشان داده شده است. طبق [۲]، $(A, ., 0)$ یک UP-جبر است. مجموعه‌های $F = \{a, c, 0\}$ و $G = \{a, b, 0\}$ را در نظر بگیرید. به‌راحتی به‌دست می‌آید که $(F:b) = \{a, c, d, 0\}$ و $(G:b) = \{a, b, c, d, 0\}$. لذا $(F:b) \subseteq (G:b)$ اما $G \quad F$.

تعریف ۴-۷: فرض کنید X یک زیرمجموعه‌ی غیرتهی از A باشد. هم‌پوچ‌ساز X را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$^{\perp}X = \{a \in A: (a.x).x = 0, \forall x \in X\}.$$

تذکر. هم‌پوچ‌ساز با پایدارساز چپ معادل است.

جدول (۶):

.	0	a	b	c	d
0	0	a	b	c	d
a	0	0	b	c	d
b	0	0	0	c	d
c	0	0	b	0	d
d	0	0	0	0	0

تعریف ۴-۸: فرض کنید F یک مجموعه‌ی غیرتهی بالایی و G یک زیرمجموعه‌ی غیرتهی از A باشد. در این صورت مجموعه‌ی هم‌پوچ‌ساز توسعه یافته G نسبت به F را به‌صورت زیرتعریف می‌کنیم:

$$(F:G) = \{x \in A: (a.x).x \in F, \forall a \in G\}.$$

به‌وضوح $0 \in (F:G)$، لذا $(F:G) \neq \quad$.

مثال ۴-۹: مثال ۴-۴ را در نظر بگیرید. $F = \{c, 0\}$ یک مجموعه‌ی غیرتهی بالایی و

$G=\{a,b,0\}$ یک زیرمجموعه از A است. واضح است که $(F:G)=\{c,0\}$.

گزاره ۴-۱۰: فرض کنید F، UP-فیلتر نرمال و G زیرمجموعه‌ی غیرتهی از A باشد. در این‌صورت $(F:G)=\{x\in A : G\subseteq (F:x)\}$.

برهان: فرض کنید $x\in (F:G)$. در این‌صورت به ازای هر $a\in G$، $(a.x).x\in F$. حال فرض کنید $g\in G$. پس $(g.x).x\in F$. از آن‌جایی‌که F، یک UP-فیلترنرمال است،خواهیم داشت $(x.g).g\in F$. از این‌رو $g\in (F:x)$. در نتیجه $(F:G)\subseteq \{x\in A : G\subseteq (F:x)\}$. حال فرض کنید $x\in \{x\in A : G\subseteq (F:x)\}$ و $a\in G$. در این‌صورت $(x.a).a\in F$. از آن‌جایی‌که F، UP-فیلتر نرمال است، لذا $(a.x).x\in F$. بنابراین $x\in (F:G)$. در نتیجه $\{x\in A: G\subseteq (F:x)\}\subseteq (F:G)$.

مثال زیر نشان می‌دهد که در گزاره ۴-۱۰، شرط نرمال بودن لازم است.

مثال ۴-۱۱: مثال ۳-۲ را در نظر بگیرید. $F=\{b,0\}$، UP-فیلتر نرمال نیست، زیرا $(c.a).a\in F$ در حالی‌که $(a.c).c \quad F$. زیرمجموعه‌ی غیرتهی $G=\{a,c,0\}$ را در نظر بگیرید. واضح است که $(F:G)=\{b,0\}$، ولی $\{x\in A : G\subseteq (F:x)\}=\{b,c,0\}$.

تعریف ۴-۱۲: اگر F و G دو زیرمجموعه‌ی غیرتهی از A باشند، آن‌گاه

$$(F.G).G=\{(a.b).b : a\in F, b\in G\}\ .$$

اگر $F=\{0\}$ یا $G=\{0\}$، آن‌گاه $(F.G).G=\{0\}$.

مثال ۴-۱۳: دو زیرمجموعه‌ی $F=\{b,0\}$ و $G=\{a,b,0\}$ را در مثال ۴-۴ در نظر بگیرید. به‌وضوح $(F.G).G=\{b,0\}$.

لم ۴-۱۴: اگر F و G دو مجموعه‌ی غیرتهی بالایی از A باشند و به ازای هر $x,y,z\in A$، داشته باشیم $x.(y.z)=y.(x.z)$، آن‌گاه $F\cap G=(F.G).G$.

برهان: فرض کنید $x\in F\cap G$. پس $x\in F$ و $x\in G$. لذا $x=(x.x).x\in (F.G).G$. از این‌رو $F\cap G\subseteq (F.G).G$. حال فرض کنید $x\in (F.G).G$. لذا $a\in F$ و $b\in G$ وجود دارند به‌طوری‌که $x=(a.b).b$. از آن جایی که $b\le (a.b).b$، بنابراین $(a.b).b\in G$. از طرفی طبق تبصره ۳-۱۳، $(a.b).b\in F$. در نتیجه $x=(a.b).b\in F\cap G$.

بنابراین $(F.G).G\subseteq F\cap G$ و اثبات کامل است.

نتیجه ۴-۱۵: اگر F و G دو UP-فیلتر از A باشند و به ازای هر $x,y,z\in A$، $x.(y.z)=y.(x.z)$، آن‌گاه $(F.G).G$، یک UP-فیلتر است.

قضیه ۴-۱۶: فرض کنید F، G و H مجموعه‌های غیرتهی بالایی و B و C دو زیرمجموعه‌ی غیرتهی از A باشند. در این‌صورت شرایط زیر برقرار هستند:

(۱) $F\subseteq (F:B)$،

(۲) اگر $B\subseteq C$، آن‌گاه $(F:C)\subseteq (F:B)$،

(۳) اگر $F\subseteq G$، آن‌گاه $(F:B)\subseteq (G:B)$،

(۴) اگر F، UP-فیلتر نرمال باشد، آن‌گاه $B\subseteq (F:(F:B))$،

(۵) اگر F، UP-فیلتر نرمال باشد، آن‌گاه $(F:B)=(F:(F:(F:B)))$،

(۶) $(F:B)\cap B\subseteq F$،

(۷) اگر به ازای هر x,y,z متعلق به A، $x.(y.z)=y.(x.z)$ آن‌گاه $H \subseteq (F:G)$ اگر و تنها اگر $G \cap H \subseteq F$،

(۸) اگر $F \subseteq B$، آن‌گاه $(F:B) \cap B = F$،

(۹) $(F:A) = A$،

(۱۰) اگر به ازای هر $x,y,z \in A$، داشته باشیم $x.(y.z)=y.(x.z)$ آن‌گاه $B \subseteq F$ اگر و تنها اگر $(F:B) = A$. به‌ویژه $(F:F) = A$،

(۱۱)اگر به ازای هر $x,y,z \in A$، داشته باشیم $x.(y.z)=y.(x.z)$آن‌گاه $\big(F:(F:F)\big) = F,$

(۱۲) اگر به ازای هر $x,y,z \in A$، داشته باشیم $x.(y.z)=y.(x.z)$آن‌گاه $\big(F:(F:A)\big) = A,$

(۱۳) $(F:B) = \cap_{b\in B} (F:b)$.

برهان: (۱)، (۲) و (۳) واضح هستند.

(۴) فرض کنید F یک UP-فیلتر نرمال باشد. هم‌چنین $b \in B$ و $a \in (F:B)$. بنابراین $(b.a).a \in F$. چون F، UP-فیلتر نرمال است، بنابراین به ازای هر $b \in B$، $(a.b).b \in F$. لذا $b \in (F:(F:B))$ و از این‌رو $B \subseteq (F:(F:B))$.

(۵) طبق قسمت (۴) داریم $(F:B) \subseteq (F:\big(F:(F:B)\big))$. از طرفی چون $B \subseteq (F:(F:B))$، طبق قسمت (۲)، نتیجه می‌گیریم که $\Big(F:\big(F:(F:B)\big)\Big) \subseteq (F:B)$. بنابراین اثبات کامل است.

(۶) فرض کنید $x \in (F:B) \cap B$. پس $x \in B$ و $x \in (F:B)$ لذا $x = (x.x).x \in F$ و بنابراین $(F:B) \cap B \subseteq F$.

(۷) فرض کنید $G \cap H \subseteq F$. طبق لم ۴-۱۴، $(G.H).H = G \cap H \subseteq F$. درنتیجه $H \subseteq (F:G)$. برعکس، فرض کنید $H \subseteq (F:G)$. طبق قسمت (۶)، $G \cap H \subseteq (F:G) \cap G \subseteq F$.

(۸) فرض کنید $F \subseteq B$. طبق قسمت (۶)، $(F:B) \cap B \subseteq F$. از طرفی، چون $F \subseteq (F:B)$، پس $F = F \cap B \subseteq (F:B) \cap B$. بنابراین $(F:B) \cap B = F$

(۹) در قسمت (۸)، قرار می‌دهیم $B = A$. واضح است که $(F:A) = (F:A) \cap A = F$.

(۱۰) فرض کنید $B \subseteq F$، $y \in B$ و $x \in A$. طبق تبصره ۳-۱۳، $y \leq (y.x).x$. پس به ازای هر $y \in B$، $(y.x).x \in F$. بنابراین $x \in (F:B)$. در نتیجه $(F:B) = A$. برعکس، فرض کنید $(F:B) = A$. لذا به ازای $b \in B$، خواهیم داشت $b = (b.b).b \in F$ و به این ترتیب $B \subseteq F$.

(۱۱) و (۱۲) از قسمت‌های (۹) و (۱۰) نتیجه می‌شوند.

(۱۳) واضح است.

لم ۴-۱۷: فرض کنید F، UP-فیلتر نرمال و اول از A باشد. در این‌صورت به ازای هر $x,y \in A$، $(x.y).y \in F$ ایجاب می‌کند $x \in F$ یا $y \in F$.

برهان: فرض کنید برای $x,y \in A$، $(x.y).y \in F$. از آنجایی‌که F، UP-فیلتر اول است، طبق تعریف ۲-۴، برای هر $x,y \in A$، $x.y \in F$ یا $y.x \in F$. اگر $x.y \in F$، آنگاه طبق فرض نتیجه می‌گیریم که $y \in F$. حال فرض کنید $y.x \in F$. طبق فرض داریم $(x.y).y \in F$. لذا طبق تعریف ۲-۴ و UP-فیلتر نرمال بودن F، داریم $(y.x).x \in F$. بنابراین $x \in F$.

گزاره ۴-۱۸: فرض کنید F، UP-فیلتر، P، UP-فیلتر اول و نرمال از A باشد به‌طوری‌که $F \subseteq P$. در این‌صورت شرایط زیر برقرار هستند:

(۱) اگر B زیرمجموعه‌ی غیرتهی از $A \quad P$ باشد، آن‌گاه $(F:B) \subseteq P$.

(۲) اگر B زیرمجموعه‌ای از A باشد به‌طوری‌که $B \cap (A \quad P) \neq$، آن‌گاه $(F:B) \subseteq P$.

برهان: (۱) فرض کنید B زیرمجموعه‌ی غیرتهی از $A \quad P$ باشد و$x \in (F:B)$. به این ترتیب به ازای هر $b \in B$، $(b.x).x \in F \subseteq P$. طبق لم ۴-۱۷، $b \in P$ یا $x \in P$. چون $B \subseteq A \quad P$، بنابراین $x \in P$ در نتیجه $(F:B) \subseteq P$.

(۲) قرار می‌دهیم $C = B \cap (A \quad P)$. در این صورت $C \subseteq B$ و $C \subseteq A \quad P$. حال طبق قسمت (۱) و با توجه به قضیه ۴-۱۶، $(F:B) \subseteq (F:C) \subseteq P$.

طبق قضیه ۴-۱۶ و گزاره ۴-۱۸، داریم:

گزاره ۴-۱۹: فرض کنید P، UP-فیلتر اول و نرمال A باشد. در این‌صورت شرایط زیر برقرار هستند:

(۱) اگر B زیرمجموعه‌ی غیرتهی از $A \quad P$ باشد، آن‌گاه $(P:B) = P$،

(۲) اگر B زیرمجموعه‌ای از A باشد به‌طوری‌که $B \cap (A \quad P) \neq$، آن‌گاه $(P:B) = P$.

۵- نتیجه‌گیری و برخی کارهای آینده

در این مقاله، در ابتدا مفهوم پایدارساز (پایدارساز راست و پایدارساز چپ) را تعریف کردیم و خصوصیات آن‌ها را مورد بررسی قرار دادیم. با مثالی نشان دادیم که پایدارساز راست در حالت کلی UP-فیلتر نیست و تحت شرایطی نشان دادیم که پایدارساز چپUP-فیلتر است و پایدارساز راست تحت عملگر دوتایی "." بسته است. هم‌چنین نشان دادیم که اشتراک هر مجموعه با پایدارسازش (پایدارساز راستش، پایدارساز چپش) مجموعه‌ی $\{0\}$ یا است. همچنین در این مقاله برای مطالعه بیشتر $UP-$ جبرها، مفاهیم هم‌اتم، هم‌اتم قوی را معرفی و مورد بررسی قرار دادیم. نتایج ما در این مقاله، بینش جدیدی را برای علاقه‌مندان به مطالعه و توسعه UP-فیلترها در UP-جبرها بوجود می‌آورد. در ادامه مفهوم $UP \quad RS$-جبر را تعریف و مورد بررسی قرار دادیم و شرایط معادلی را برای بررسی سریع‌تر این این نوع جبر جدید ارائه دادیم. در آخر مفهوم هم‌پوچ‌ساز توسعه‌یافته F نسبت به G را تعریف و با ارائه‌ی قضیه‌ها و گزاره‌هایی، به بیان برخی خصوصیات آن پرداختیم.

باتوجه به این‌که، جبرهایUP به تازگی تعریف شده‌اند، مفاهیم زیادی را می‌توان در این جبرها تعریف کرد که ارتباط زیادی با مفاهیم تعریف شده در این مقاله داشته باشند. از جمله این مفاهیم، می‌توان پایدار ساز (چپ و راست) مجموعه X را نسبت به مجموعه دیگری مانند Y تعریف ($(X,Y)_r, (X,Y)_l$) و جبرهای UP متناظر با آنها را نیز تعریف و بررسی کرد.همچنین می‌توان مفهوم $({}^{\perp}X)^{\perp}$ را (برای یک زیرمجموعه ناتهی X از A) تعریف و مورد بررسی قرار داد. هنوز سوالات زیادی‌برای کارهای آینده مطرح هست، از جمله:

- اگر $m \in Coatom(A)$ آنگاه هم‌پوچ‌ساز m (یعنی ${}^{\perp}m$)،UP-فیلتر می‌شود؟ آیا نوع خاصی از UP-فیلترها می‌شود؟

- مفهوم هم‌مولکول‌ها در UP-جبرها را به چه صورت می‌توان تعریف کرد؟ و چه ارتباطی بین هم مولکول‌ها و هم‌اتم‌ها در این ساختار جبری وجود دارد؟

- هم پوچ سازهای توسعه‌یافته UP-فیلترهای مختلف، به چه شکل است؟ و آیا ویژگی خاصی دارد؟

فهرست منابع

[1] C. Prabpayak and U. Leerawat, On ideals and congruences in KU-algebra, Scientia Magna, 5. 1, 54-57, (2009).

[2] A. Iampan, A new branch of the logical algebra, UP-algebras, J. AlgebraRelat, Topics 5, 35-54, (2017).

[3] J. Somjanta, N. Thuekaew, P. Kumpeangkeaw and A. Iampan, Fuzzy sets inUP-algebra. Ann. Fuzzy Math. Inf, 12, 739-756, (2016).

[4] Y. Jun and A. Iampan, Implicative UP-filters, Afrika Mathematica, 30, 1093-1101, (2019).

[5] Y. Jun and A. Iampan, Shift UP-filters and the compositions of UP-filters inUP-algebras. Missokrij of Math. Sci., 31(1), 36-45, (2019).

[6] Z. Parvizi, S. Motamed and F. Khaksar Haghani, Some type of filters inUP-algebra, Submitted.

[7] A. Iampan, The UP-isomorphism theorems for UP-algebras, Discussiones Mathematica General Algebra and Applications, 39, 113-123, (2019).

[8] A. Iampan, Derivations of UP-algebras by means of UP-endomorphisms, Journal of Algebraic Structures and Their Applications, 3(2), 1-20, (2016).