دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال نهم، شماره چهل پنجم، آذر و دی ۱۴۰۲
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

نمایش ماتریس مثلثی حلقه‌های سری‌های هرویتس اریب

کمال پایکن [1]، اباصلت بداغی [*2]

[1] دانشکده ریاضی، دانشگاه تفرش، صندوق پستی ۷۹۶۱۱-۳۹۵۱۸، تفرش، ایران
[2] گروه ریاضی، واحد تهران غرب، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۰۶/۰۶ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۹/۰۹

چکیده

فرض کنیم R یک حلقه شرکت‌پذیر، یکدار و α یک همریختی روی R باشد. در این مقاله ثابت می‌کنیم که تحت شرایطی، بعد مثلثی حلقه سری‌های هرویتس اریب (HR,α) و حلقه R یکسان هستند. بعلاوه، ما کلاس توسیع حلقه‌های اول تکه‌ای (به طور خلاصه، حلقه‌های PWP) را گسترش داده‌ایم. به ویژه، برای یک حلقه PWP یک کلاس بزرگی از حلقه سری‌های هرویتیس اریب تعیین می‌شود که دارای یک نمایش ماتریس مثلثی کامل تعمیم یافته است به طوری که حلقه‌های واقع روی قطر اصلی آن، حلقه‌های اول هستند.

واژه‌های کلیدی: حلقه سری‌های هرویتس اریب، نمایش ماتریس مثلثی کامل تعمیم یافته، حلقه PWP، بعد مثلثی.

[*] عهده‌دار مکاتبات: Email: abasalt.bodaghi@gmail.com

۱. مقدمه

یکی از مباحث مهم در نظریه حلقه‌ها و بخصوص در جبر ناجابجایی مبحث پوچسازها می‌باشد. در سال ۱۹۴۶ ریکارت[۱] در بررسی $\mathbb{C}^*-$جبرها به این موضوع پی برد که اگر پوچساز راست هر عضو یک $\mathbb{C}^*-$جبر توسط تصویری تولید شود، می‌توان برخی از ویژگی‌های مهم آن را مشخص نمود. متعاقب آن، در سال ۱۹۵۱ کاپلانسکی[۲] جبرهای AW^* را معرفی نمود. یک AW^*-جبر یک $\mathbb{C}^*-$جبری است که پوچساز راست هر زیر مجموعه ناتهی از آن توسط یک تصویر تولید می شود.

کاپلانسکی در کتاب معروف حلقه‌های عملگرها حلقه‌های بئر را معرفی کرد و از حلقه‌های بئر برای بررسی خواص جبرهای فون نیومن، AW^* و حلقه‌های $*-$منظم کامل استفاده نمود [۱۰]. کلارک[۳] در [۶] حلقه‌های شبه بئر را معرفی کرد و با استفاده از آن مشخص کرد که تحت چه شرایطی جبرهای با بعد متناهی، یکدار روی میدان‌های بسته جبری با نیم گروه جبر ماتریس‌های تاب‌دار یکریخت می‌شوند. در مورد حلقه‌های ریکارت، از [۵] یادآوری می‌کنیم که ویژگی ریکارت راست و ریکارت چپ خاصیت متقارنی ندارند که چیس[۴] در [۵] مثال‌هایی برای اثبات نامتقارن بودن این مفهوم ارائه داد. همچنین، اسمال[۵] در منبع [۱۹] ثابت کرد که یک حلقه ریکارت راست، بئر (در نتیجه ریکارت) است اگر فاقد تعداد نامتناهی عناصر خودتوان دو به دو متعامد باشد.

در سال ۲۰۰۱ بیرکنمیر[۶] و همکارانش [۳]، حلقه‌های شبه بئر اصلی راست و چپ را معرفی کردند. مثال‌هایی برای نامتقارن بودن چپ و راست مفهوم شبه بئر اصلی در [۳] بیان شده است و علاوه بر آن مثال‌های دیگری در [۳] ارایه شده که خانواده حلقه‌های شبه بئر اصلی چپ، خانواده حلقه‌های شبه بئر اصلی راست، خانواده حلقه-های ریکارت چپ (PP چپ) و خانواده ریکارت راست (PP راست) را متمایز می‌سازد که هیچ کدام از این خانواده حلقه‌ها شامل دیگری نیست.

در [۲] نشان داده شده است که حلقه R دارای یک نمایش ماتریس مثلثی تعمیم یافته است، هرگاه یک یکریختی حلقه‌ای

$$\boldsymbol{\theta}: \boldsymbol{R} \rightarrow \begin{pmatrix} \boldsymbol{R_1} & \boldsymbol{R_{12}} & \dots & \boldsymbol{R_{1n}} \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{R_2} & \dots & \boldsymbol{R_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \dots & \boldsymbol{R_n} \end{pmatrix}$$

وجود داشته باشد، به طوری که هر حلقه واقع روی قطر، R_i، حلقه‌ای یکدار، R_{ij} یک R_i-مدول چپ، R_j-مدول راست برای $i < j$ بوده که ماتریس‌ها از قوانین جمع و ضرب معمولی تبعیت می‌کنند. اگر هر R_i

[۱] Rickart

[۲] Kaplansky

[۳] Clark

[۴] Chase

[۵] Small

[۶] Birkenmeier

نیمه مرکزی کاهشی باشد، آن گاه R را دارای یک نمایش ماتریس مثلثی کامل تعمیم یافته می‌گویند که دارای بعد مثلثی n است. بنابر [۲] و [۳] یک حلقه را یک حلقه اول تکه‌ای(به طور خلاصه، حلقه PWP) می‌نامند، هرگاه یک حلقه شبه بئر با بعد مثلثی متناهی باشد. در [۳] نشان داده شده است که خانواده حلقه‌های PWP به طور سره شامل همه دامنه‌های تکه‌ای است که توسط گوردون[۸] و اسمال[۹] در [۸] معرفی شد. بنابراین حلقه‌های PWP شامل همه حلقه‌های موروثی راست می‌باشند که نیمه ابتدایی یا نوتری راست هستند. هر حلقه PWP دارای یک نمایش ماتریس مثلثی کامل تعمیم یافته است که هرحلقه R_i واقع روی قطر اصلی این ماتریس یک حلقه اول می‌باشد. همچنین در [۴] ، در میان بسیاری از نتایج روی حلقه‌های PWP، سوال بازی مبنی بر گسترش خانواده توسیع‌های دیگری از حلقه‌هایی که حلقه PWP هستند و نیز گسترش خانواده توسیع حلقه‌هایی که دارای بعد مثلثی متناهی هستند مطرح شده‌اند.

حلقه سری‌های توانی کاربردهای فراوانی در بیشتر مباحث ریاضی و به ویژه در جبرهای دیفرانسیلی دارد. در مقاله [۱۱] کیگر[۱۰] حلقه سری‌های هرویتس را معرفی و خواص رسته‌ای آن را بررسی کرد. در مقالات [۱۲] و [۱۳] کیگر نشان داد که حلقه سری‌های هرویتس کاربردهای فراوانی در جبرهای دیفرانسیلی و همچنین در مبحث نرمال‌سازی ضعیف دارد. به علاوه، ضرب عناصر این حلقه همراه با یک ضرب دنباله‌ای با استفاده از ضرایب دوجمله‌ای توسط فلیس[۱۱] در [۷] و توسط تفت[۱۲] در [۲۰] مطالعه شد. در حالی که مطالعات فراوانی از این حلقه‌ها روی یک حلقه جابجایی و یکدار انجام شده است، اما اطلاعات کمی درباره حلقه‌های سری‌های هرویتس روی حلقه‌های ناجابجایی و شرکت‌پذیر موجود است.

در این مقاله ثابت می‌کنیم که تحت شرایطی، بعد مثلثی حلقه سری‌های هرویتس اریب $(\boldsymbol{HR},\boldsymbol{\alpha})$ و حلقه R یکسان هستند. به ویژه، اگر $\boldsymbol{R}$ یک حلقه PWP باشد، آن گاه حلقه $(\boldsymbol{HR},\boldsymbol{\alpha})$ نیز یک حلقه PWP خواهد بود. بنابراین حلقه $(\boldsymbol{HR},\boldsymbol{\alpha})$ دارای یک نمایش ماتریس مثلثی کامل تعمیم یافته است به طوری که حلقه‌های واقع روی قطر اصلی، حلقه‌های اول هستند.

۲-تعاریف و پیشنیازها

در این بخش تعاریف و نتایج ابتدایی که برگرفته از مقالات دیگران و مورد استفاده در مقاله جاری است را ارایه می‌دهیم.

---

[۷] Gorden

[۸] Small

[۹] Keigher

[۱۰] Fliess

[۱۱] Taft

تعریف ۲-۱ . حلقه R **بئر** نامیده می‌شود هرگاه پوچساز راست هر زیر مجموعه ناتهی R ، به عنوان یک ایده‌آل راست، توسط یک خودتوان تولید شود. همچنین، R را **شبه بئر** نامید هرگاه پوچساز راست هر ایده‌آل R ، به عنوان یک ایده‌آل راست، توسط یک عنصر خودتوان تولید شود [۶] .

تعریف ۲-۲ . یک حلقه ریکارت راست نامیده می‌شود هرگاه پوچساز راست هر عنصر آن، به عنوان یک ایده‌آل راست، توسط یک عنصر خودتوان تولید شود. حلقه ریکارت راست را یک حلقه PP راست نیز می‌نامند (به طور معادل هر ایده‌آل راست اصلی آن تصویری است). حلقه‌های ریکارت چپ (PP چپ) نیز به طور مشابه تعریف می‌شوند.

اگر یک حلقه هم ریکارت چپ و هم ریکارت راست باشد حلقه ریکارت نامیده می‌شود[۵].

تعریف ۲-۳ . حلقه R شبه‌بئر اصلی راست (چپ) است هرگاه پوچساز راست (چپ) هر ایده‌آل اصلی آن، به عنوان یک ایده‌آل راست (چپ)، توسط یک خودتوان تولید شود. حلقه شبه بئر اصلی چپ نیز به طور مشابه تعریف می‌شود. به طور معادل یک حلقه شبه بئر اصلی راست است هرگاه خارج‌قسمت آن حلقه به پوچساز راست هر ایده‌آل اصلی راست آن، به عنوان یک مدول راست روی آن یک حلقه تصویری باشد [۳]. همچنین حلقه یکدار R *حلقه اول نامیده می شود هرگاه*

$aRb = ۰$ نتیجه دهد $a = ۰$ یا $b = ۰$.

تعریف ۲-۴. [۱] یک عنصر خودتوان e از یک حلقه R نیمه مرکزی چپ (راست) گفته می‌شود هرگاه برای هر عنصر $x \in R$ داشته باشیم $xe = exe$ $(ex = exe)$. مجموعه همه عناصر خودتوان نیمه‌مرکزی چپ(راست) یک حلقه با نماد $S_l(R)$ ($S_r(R)$) نمایش داده می‌شود. همچنین مجموعه عناصر خودتوان مرکزی یک حلقه R را با نماد $B(R)$ نمایش می‌دهند. توجه می‌کنیم که $S_l(R) \cap S_r(R) = B(R)$. یک حلقه R را **نیمه مرکزی کاهشی** می‌نامیم، هرگاه $S_l(R) = \{۰,۱\}$. از آن جایی که e نیمه مرکزی چپ است اگر و فقط اگر $۱ - e$ نیمه مرکزی راست باشد، بنابراین تعریف نیمه مرکزی کاهشی متقارن راست-چپ است. بنابراین R یک حلقه نیمه‌مرکزی کاهشی است اگر و تنها اگر داشته باشیم $S_r(R) = \{۰,۱\}$.

در [۴] بیرکنمیر و پارک[۱۳] ثابت کردند که هرگاه R یک حلقه PWP باشد، آن گاه حلقه‌های زیر نیز PWP هستند.

۱. حلقه تکواره ای $R[G]$ که G یک $u.p-$تکواره است.
۲. حلقه‌های $R[X]$ و $R[[X]]$ که X یک مجموعه از متغیرهای نه به طور ضروری جابجایی است.
۳. حلقه‌های $R[x,x^{-۱}]$ و $R[[x,x^{-۱}]]$ که به ترتیب حلقه چندجمله ی‌های لوران و حلقه سری‌های لوران هستند.
۴. حلقه‌های $R[x;\alpha]$ و $R[[x;\alpha]]$ که به ترتیب حلقه چندجمله ی‌های اریب و حلقه سری‌های اریب، که α یک خودریختی خاصی از R است.

[۱۳] Park

۵. همچنین حلقه های $T_n(R)$ و$M_n(R)$ که به ترتیب حلقه ماتریس‌های بالامثلثی و حلقه ماتریس‌ها روی R نیز یک حلقه PWP هستند.

برای یک زیرمجموعه ناتهی X از یک حلقه R، پوچساز راست X روی حلقه R را با نماد $r_R(X)$ نمایش داده و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$r_R(X) = \{r \in R:\ Xr = \cdot\}.$$

همچنین، مجموعه اعداد طبیعی، مجموعه اعداد صحیح و مجموعه اعداد مختلط را به ترتیب با $\mathbb{N}$، $\mathbb{Z}$ و $\mathbb{C}$ نشان می‌دهیم. برای هر زیرمجموعه ناتهی X از حلقه R، قرار می‌دهیم

$$(HX, \alpha) = \{\ f(n) \in X \cup \{\cdot\}, \qquad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{\cdot\}\}.$$

در سراسر این مقاله، R یک حلقه یکدار، شرکت‌پذیر و نه لزوما جابجایی و $\alpha: R \to R$ نیز یک همریختی است به طوری که $\alpha(۱) = ۱$. حلقه *سری‌های هرویتس[۱۴] اریب* $(\boldsymbol{HR}, \boldsymbol{\alpha})$ روی یک حلقه R شامل توابع $f: \mathbb{N} \cup \{\cdot\} \to \mathrm{R}$ می‌باشد که عمل جمع در حلقه (HR, α) به صورت مولفه‌ای و عمل ضرب برای هر دو عنصر دلخواه $f, g \in (HR, \alpha)$ و هرعنصر $n \in \mathbb{N} \cup \{\cdot\}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$fg(n) = \sum_{k=\cdot}^{n} \binom{n}{k} f(k)\alpha^k\big(g(n-k)\big),$$

که $\binom{n}{k}$ ضریب دو جمله‌ای (ترکیب k از n) است. در حالتی که همریختی α همانی باشد، **به جای** (HR, α) از نماد HR *استفاده می کنیم. در واقع عناصر حلقه های سری‌های هرویتس* (HR, α) همان سری‌های توانی رسمی $\sum_{n=\cdot}^{\infty} a_n x^n \in R[[x; \alpha]]$ است که تابع f به صورت $f(n) = a_n$ تعریف می‌شود. به علاوه، ضرب در حلقه (HR, α) همان ضرب معمولی برای حلقه‌های سری‌های توانی اریب است با این تفاوت که ضرایب دوجمله‌ای در هر جمله همانند تعریف بالا ظاهر می‌شود. برای هر $r \in R$ و $n \in \mathbb{N}$ عناصر $\boldsymbol{h}_r, \boldsymbol{h}'_n \in (HR, \alpha)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.:

$$\boldsymbol{h}_r(x) := \begin{cases} r & x = \cdot \\ \cdot & x \neq \cdot, \end{cases}$$

$$\boldsymbol{h}'_n(x) := \begin{cases} ۱ & x = n \\ \cdot & x \neq n \end{cases}$$

واضح است که نگاشت $r \mapsto h_r$ حلقه R را در حلقه (HR, α) می‌نشاند و $h_۱$ عضو واحد حلقه (HR, α) است.

در مقاله‌های [۱۶] و [۱۷] نشان داده شده است که هر حلقه R که شامل $\mathbb{Q}$ است و α نیز یک همریختی $\mathbb{Q}$-جبر از R باشد آنگاه حلقه‌های (HR, α) و $R\big[[x; \alpha]\big]$ یکریخت هستند. برای جلوگیری از تکرار نتایج گذشته در حلقه‌های سری‌های توانی اریب $R\big[[x; \alpha]\big]$، از این به بعد فرض می‌کنیم که حلقه R ، اعداد گویا را در بر ندارد.

---

[۱۳] Hurwitz

تعریف ۲-۵. [۱۴] فرض کنیم R *حلقه*‌ای دلخواه با یک درون‌ریختی α باشد. درون ریختی α از حلقه R را **صلب** می‌نامند، هرگاه به ازای هر عنصر a در حلقه R از $a\alpha(a) = ۰$ بتوان نتیجه گرفت $a = ۰$. همچنین، حلقه R را $\boldsymbol{\alpha}$**-صلب** نامند، هرگاه α درون‌ریختی صلبی از آن باشد.

تعریف ۲-۶. [۹] حلقه R را $\boldsymbol{\alpha}$**-سازگار** نامند، هرگاه به ازای هر aو b در R داشته باشیم $ab = ۰$ اگر و تنها اگر $a\alpha(b) = ۰$.

تعریف ۲-۷. [۱۵] ایده‌آل I از یک حلقه R را $\boldsymbol{s}$**-یکال چپ** نامند هرگاه برای هر عنصر $a \in I$ یک عنصر $x \in I$ موجود باشد به طوری که داشته باشیم $xa = a$. همچنین حلقه R *را* یک **حلقه** $\boldsymbol{APP}$ **راست** نامیدند، هرگاه پوچساز راست هر ایده‌آل راست اصلی آن یک ایده‌آل s-یکال چپ باشد.

تعریف ۲-۸. [۲] حلقه R دارای یک مجموعه از **خودتوان‌های مثلثی** چپ **(راست)** است هرگاه یک مجموعه $\{b_۱, \dots, b_n\}$ از خودتوان‌های ناصفر موجود باشد به طوری که

۱. $۱ = b_۱ + b_۲ + \cdots + b_n$
۲. $b_۱ \in S_l(R)$ $(b_۱ \in S_r(R))$.
۳. برای هر عدد $۱ \leq k \leq n-۱$،

$b_{k+۱} \in S_l(c_kRc_k)$ $(b_{k+۱} \in S_r(c_kRc_k))$ که $c_k = ۱ - (b_۱ + b_۲ + \cdots + b_k)$.

از قسمت (۳) تعریف بالا، می‌توان نتیجه گرفت که یک مجموعه از خودتوان‌های مثلثی چپ (به ترتیب راست) یک مجموعه از خودتوان‌های دوبه دوبه دو عمود بر هم نیز هستند. یک مجموعه از خودتوان‌های مثلثی را کامل می‌گویند هرگاه هر b_i یک عنصر خودتوان نیمه مرکزی کاهشی باشد. $\{b_۱, \dots, b_n\}$

بنابر $[\![۲, \text{Proposition}۱.۳]\!]$ حلقه R یکریخت با یک حلقه ماتریسی بالا مثلثی تعمیم یافته می‌باشد که حلقه‌های روی قطر اصلی آن حلقه‌های نیمه مرکزی کاهشی است، اگر و تنها اگر R دارای یک مجموعه از خودتوان‌های مثلثی چپ کامل باشد. از $[\![۲, \text{Theorem } ۲.۱۰]\!]$ نتیجه می‌شود که تعداد عناصر یک مجموعه کامل از خودتوان‌های مثلثی چپ همواره منحصر به فرد است و این تعداد برابر تعداد عناصر یک مجموعه کامل از خودتوان‌های مثلثی راست است. با توجه به نکاتی که در بالا ذکر شد، گوییم حلقه R دارای **بعد مثلثی** n است و با $T\,dim(R) = n$ نمایش می‌دهیم، هرگاه حلقه R دارای یک مجموعه کامل n عضوی از حودتوان‌های مثلثی چپ باشد.

یادآوری می‌کنیم R حلقه نیمه مرکزی کاهشی است اگر و فقط اگر $T\,dim(R) = ۱$. همچنین اگر R دارای هیچ مجموعه کامل از خودتوان‌های مثلثی چپ نباشد، آنگاه گوییم R دارای بعد مثلثی بینهایت است و با $Tdim(R) = \infty$ نمایش می‌دهیم.

بنابر$[\![۲, \text{Proposition } ۲.۱۴]\!]$ اگر R دارای ACC روی ایده‌آل‌ها باشد، آنگاه خواهیم داشت

$$\text{Tdim}(R) < \infty.$$

۳-نمایش ماتریس مثلثی حلقه‌های سری‌های هرویتس اریب

در این بخش ثابت می‌کنیم **اگر** R حلقه APP راست، α-سازگار و به عنوان یک $\mathbb{Z}-$مدول بی‌تاب باشد، آن گاه بعد مثلثی حلقه سری‌های هرویتس اریب (HR,α)و حلقه Rیکسان است. به ویژه، اگر $\boldsymbol{R}$ یک حلقه PWP باشد، در این صورت حلقه $(\boldsymbol{HR},\boldsymbol{\alpha})$ نیز حلقه PWP خواهد بود. بنابراین حلقه $(\boldsymbol{HR},\boldsymbol{\alpha})$ دارای یک نمایش ماتریس مثلثی کامل تعمیم یافته است، به طوری که حلقه‌های واقع روی قطر، حلقه‌های اول هستند.

لم‌های زیر ابزارهای اصلی برای رسیدن به اهداف ما در این بخش می‌باشند.

لم ۳-۱. [۹, Lemma ۲.۱, Lemma ۲.۲]

فرض کنیم α *یک همریختی از حلقه* R *باشد. آن گاه:*

الف) *اگر* α *سازگار باشد آن گاه* α *تکریختی است.*

ب) α *سازگار است اگر و تنها اگر* به ازای هر a و b در R داشته باشیم

$$\alpha(a)b=\cdot \Leftrightarrow ab=\cdot.$$

ج) شرایط زیر معادل هستند:

۱. α *صلب است.*

۲. α *سازگار و* R *حلقه کاهشی است.*

۳. *به ازای هر* a *در* R، $a\alpha(a)=\cdot$ *نتیجه می‌دهد* $a=\cdot$.

لم زیر در اثبات گزاره ۳-۴ استفاده می‌شود.

لم ۳-۲. [۱۶, Lemma ۳.۲] فرض کنیم R حلقه APP راست است به طوری که به عنوان یک $\mathbb{Z}$-مدول بی‌تاب می‌باشد. همچنین فرض کنیم R حلقه α-سازگار است. آن گاه به ازای هر $f,g\in(HR,\alpha)$، اگر $f(HR,\alpha)g=\cdot$ در این صورت برای هر $n,m\in\mathbb{N}$ خواهیم داشت:

$$f(n)Rf(m)=\cdot.$$

لم ۳-۳. [۲, Theorems ۲.۹, ۲.۱۰]

فرض کنیم R یک حلقه دلخواه باشد. در این صورت شرایط زیر معادل هستند:

۱. R دارای یک مجموعه کامل از خودتوان‌های مثلثی چپ است؛

۲. مجموعه $\{bR : b\in S_l(R)\}$ یک مجموعه متناهی است؛

۳. R دارای یک مجموعه کامل از خودتوان‌های مثلثی راست است.

به علاوه، اگر $\{b_1,\dots,b_n\}$ و $\{c_1,\dots,c_k\}$ یک مجموعه کامل از خودتوان‌های مثلثی چپ باشد، آن گاه $k=n$. همچنین برای $b\in S_l(R)$ $bR=\sum_{i\in I}b_iR$ که $I\subseteq\{1,2,\dots,n\}$ یک زیرمجموعه دلخواه است.

چون خودتوان‌های نیمه مرکزی از اجزای حیاتی برای نمایش ماتریس مثلثی تعمیم یافته هستند، در گزاره زیر رابطه بین خودتوان‌های نیمه مرکزی حلقه سری‌های هرویتس اریب (HR,α) و حلقه R را بررسی می‌کنیم. این نتیجه در ادامه این مقاله مورد استفاده قرار می‌گیرد.

گزاره ۳-۴. فرض کنیم R یک حلقه APP راست و به عنوان یک $\mathbb{Z}$−مدول بی‌تاب باشد. همچنین فرض کنیم R یک حلقه α-سازگار است.
اگر f عنصر خودتوان نیمه مرکزی چپ حلقه (HR,α) باشد آنگاه $f(\cdot)$ عنصر خودتوان نیمه مرکزی چپ حلقه R است. و به ویژه

$$f(HR,\alpha) = \boldsymbol{h}_{f(\cdot)}(HR,\alpha).$$

برهان. چون f یک عنصر خودتوان نیمه مرکزی چپ حلقه (HR,α) است، لذا *خواهیم داشت*

$$(f-\text{۱})(HR,\alpha)f = \cdot.$$

بنابراین بنابر لم ۳-۲ داریم:

$$(f(\cdot)-\text{۱})Rf(\cdot) = \cdot.$$

در نتیجه برای هر $n \in \mathbb{N}$ خواهیم داشت $f(n)Rf(\cdot) = \cdot$ و همچنین برای هر عدد $n \in \mathbb{N} \cup \{\cdot\}$ داریم

$$(f(\cdot)-\text{۱})Rf(n) = \cdot.$$

روابط اخیر نشان می‌دهند که $f(\cdot) \in S_l(R)$،
$\boldsymbol{h}_{f(\cdot)}f = f$ و لذا داریم $f\boldsymbol{h}_{f(\cdot)} = \boldsymbol{h}_{f(\cdot)}$.
در نتیجه $f(HR,\alpha) = \boldsymbol{h}_{f(\cdot)}(HR,\alpha)$ ■

فرض کنیم B یک مجموعه از عناصر خودتوان مثلثی چپ R و Γ یک توسیع از حلقه R باشد. بنابر [۴]، Γ یک $\boldsymbol{B}$- مثلثی مربوط به R گفته می‌شود، هرگاه $b \in B$ و $\cdot \neq a \in S_l(b\,\Gamma \text{b})$، آن گاه عنصر $\cdot \neq a. \in S_l(b\,\text{Rb})$ موجود باشد، به طوری که $a.\Gamma \subseteq a\Gamma$. همچنین توسیع Γ را یک $\boldsymbol{B}$- مثلثی سازگار با حلقه R گویند، هرگاه B یک مجموعه از عناصر خودتوان مثلثی چپ توسیع Γ نیز باشد. اگر Γ یک B-مثلثی مربوط به حلقه R (B-مثلثی سازگار با R) برای هر مجموعه B از خودتوان‌های مثلثی چپ R باشد، آن گاه گویند Γ مثلثی مربوط به حلقه R (مثلثی سازگار به R) است. همچنین بنابر [۴] یک عنصر $b \in B$ *را* یک عنصر خودتوان مثلثی چپ حلقه R گویند، هرگاه b عنصری از مجموعه
عناصر خودتوان مثلثی چپ R باشد.

لم ۳-۵. فرض کنیم R یک حلقه APP راست است و به عنوان یک $\mathbb{Z}$−مدول بی‌تاب باشد. اگر R یک حلقه α-سازگار باشد آن گاه (HR,α) مثلثی مربوط به حلقه R است.
برهان. فرض کنیم B یک مجموعه دلخواه از عناصر خودتوان مثلثی چپ R باشد. همچنین فرض کنیم $b \in B$ و بعلاوه داشته باشیم:

$$\cdot \neq f \in S_l(\boldsymbol{h}_b(HR,\alpha)\boldsymbol{h}_b).$$

چون R یک حلقه α-سازگار است، داریم $\alpha(b) = b$. بنابراین خواهیم داشت:

$$\boldsymbol{h}_b(HR,\alpha)\boldsymbol{h}_b = (H(bRb),\alpha).$$

چون R یک حلقه APP راست است، بنابر گزاره
[۱۶, Proposition ۳.۷] حلقه bRb نیز یک حلقه APP راست می‌باشد. اکنون از گزاره ۳-۴ نتیجه می‌شود که $\cdot \neq a \in S_l(b\,\text{Rb})$ موجود است که $\boldsymbol{h}_a(HR,\alpha) \subseteq f(HR,\alpha)$.

این نشان می‌دهد که (HR,α) مثلثی مربوط به حلقه R است. ■

لم ۳-۶. فرض کنیم R یک حلقه APP راست است. اگر R یک حلقه α-سازگار باشد آنگاه (HR,α) مثلثی سازگار با حلقه R است.

برهان. فرض کنیم $B=\{b_1,b_2,\dots,b_n\}$ یک مجموعه دلخواه از عناصر خودتوان مثلثی چپ حلقه R *باشد. ثابت می‌کنیم که مجموعه* $\{\boldsymbol{h}_{b_1},\boldsymbol{h}_{b_2},\dots,\boldsymbol{h}_{b_n}\}$ *نیز* یک مجموعه از عناصر خودتوان مثلثی چپ حلقه (HR,α) است. *به آسانی می‌توان نشان داد که برای هر عنصر خودتوان* $b\in B$ عنصر $\boldsymbol{h}_b$ نیز یک عنصر خودتوان حلقه (HR,α) است. همچنین چون $b_1+b_2+\dots+b_n=1$ بنابراین $\boldsymbol{h}_{b_1}+\boldsymbol{h}_{b_2}+\dots+\boldsymbol{h}_{b_n}=\boldsymbol{h}_1$. چون R یک حلقه α-سازگار است می‌توان بررسی نمود که عنصر خودتوان $\boldsymbol{h}_{b_1}$ یک عنصر خودتوان نیمه مرکزی حلقه (HR,α) است. حال چون برای هر $1\le k\le n-1$، $b_{k+1}\in S_l(c_kRc_k)$ که در آن $c_k=1-(b_1+b_2+\dots+b_k)$ و در لذا $(b_{k+1}a_k-a_k)R(a_kb_{k+1})=0$.

از طرف دیگر، R یک حلقه α-سازگار است، بنابر این برای هر $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ داریم

$(b_{k+1}a_k-a_k)R\alpha^n(a_kb_{k+1})=0$.

به علاوه داریم،

$$\boldsymbol{h}_{a_k}=\boldsymbol{h}_1-(\boldsymbol{h}_{b_1}+\boldsymbol{h}_{b_2}+\dots+\boldsymbol{h}_{b_k}).$$

بنابراین برای هر عنصر دلخواه $f\in(HR,\alpha)$ خواهیم داشت:

$$\boldsymbol{h}_{b_{k+1}}\boldsymbol{h}_{a_k}f\boldsymbol{h}_{a_k}\boldsymbol{h}_{b_{k+1}}=\boldsymbol{h}_{a_k}f\boldsymbol{h}_{a_k}\boldsymbol{h}_{b_{k+1}}$$

لذا برای هر $1\le k\le n-1$ نتیجه می‌گیریم $(\boldsymbol{h}_{b_{k+1}}\boldsymbol{h}_{a_k})(\boldsymbol{h}_{a_k}(HR,\alpha)\,\boldsymbol{h}_{a_k})\boldsymbol{h}_{b_{k+1}}=0$.
این نشان می‌دهد که برای هر $1\le k\le n-1$ عنصر $\boldsymbol{h}_{b_{k+1}}$ خودتوان نیمه مرکزی حلقه $\boldsymbol{h}_{a_k}(HR,\alpha)\,\boldsymbol{h}_{a_k}$ است که این برهان را کامل می کند. ■

لم ۳-۷. [۴, Proposition ۴.۳] فرض کنیم Γ یک توسیع حلقه R باشد. اگر Γ یک مثلثی مربوط به R و مثلثی سازگار با R باشد، آنگاه بعد مثلثی Γ و R یکسان هستند.

اکنون بررسی می‌کنیم چه زمانی بعد مثلثی حلقه R و حلقه سری‌های هرویتس اریب (HR,α) یکسان هستند.

قضیه ۳-۸. فرض کنیم R یک حلقه APP راست و به عنوان یک $\mathbb{Z}$-مدول بی‌تاب باشد. اگر R یک حلقه α-سازگار باشد آن گاه:

$$\mathrm{Tdim}(R)=Tdim((HR,\alpha)).$$

برهان. با استفاده از لم‌های ۳-۵، ۳-۶ و نیز ۳-۷ نتیجه مطلوب حاصل می‌شود. ■

نتیجه ۳-۹. فرض کنیم R یک حلقه APP راست و به عنوان یک $\mathbb{Z}$-مدول بی‌تاب باشد، آن گاه $\mathrm{Tdim}(R)=Tdim((HR))$.

نتیجه ۳-۱۰. فرض کنیم R یک حلقه اول و به عنوان یک $\mathbb{Z}$-مدول بی‌تاب است. اگر R یک حلقه α-سازگار باشد، آن گاه حلقه (HR,α) نیز اول می‌باشد.

برهان. بنا بر [۲, Lemma ۴.۲] می‌دانیم که حلقه R اول است اگر و تنها اگر یک حلقه شبه بئر و نیمه مرکزی کاهشی باشد. اکنون نتیجه به آسانی از قضیه ۳-۸ حاصل می‌شود. ■

در قضیه زیر محکی فراهم می‌شود برای این که حلقه سری‌های هرویتس (HR,α) یک حلقه PWP گردد.

قضیه ۳-۱۱. فرض کنیم R یک حلقه شبه بئر، $B=\{b_1,\dots,b_n\}$ یک مجموعه کامل از خودتوان‌های مثلثی چپ R و α یک همریختی روی R باشد. اگر R یک حلقه α-سازگار و به عنوان یک $\mathbb{Z}-$مدول بی‌تاب باشد، آن گاه (HR,α) یک حلقه شبه بئر است به طوری که B یک نمایش کامل ماتریس مثلثی تعمیم یافته برای حلقه (HR,α) تعیین می‌کند که هر حلقه روی قطر اصلی، R_i، اول است.

برهان. *با استفاده از لم ۵،۳،* [۱۶, Theorem ۳.۵] و [۲, Theorem ۴.۴] *نتیجه دلخواه به آسانی حاصل می‌شود.* ■

نتیجه ۳-۱۲. فرض کنیم R یک حلقه PWP و به عنوان یک $\mathbb{Z}-$مدول بی‌تاب است. اگر R یک حلقه α-سازگار باشد آن گاه حلقه (HR,α) نیز PWP می‌باشد.

این مقاله را با یک مثال به پایان می‌رسانیم.

مثال ۳-۱۳. فرض کنیم D یک دامنه و به عنوان یک $\mathbb{Z}-$مدول بی‌تاب می‌باشد و α نیز یک تکریختی روی D است. قرار می‌دهیم:

$$R:=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a\end{pmatrix} : a,b\in D\right\}.$$

با استفاده از [۱۸, Proposition ۹] نتیجه می‌شود که حلقه R شبه بئر است. قرار می‌دهیم $b_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}$ و $b_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$. به آسانی می‌توان بررسی کرد که مجموعه خودتوان‌های $B=\{b_1,b_2\}$ یک مجموعه کامل از خودتوان‌های مثلثی چپ R و نیز حلقه R، $\overline{\alpha}$-سازگار است که $\overline{\alpha}: R\to R$ یک درون‌ریختی با ضابطه $\overline{\alpha}\left(\left(a_{ij}\right)\right)=\left(\alpha(a_{ij})\right)$ می‌باشد. بنابراین قضیه ۳-۱۱ نتیجه می‌دهد که B یک نمایش کامل ماتریس مثلثی تعمیم یافته برای حلقه $(HR,\overline{\alpha})$ تعیین می‌کند که هر حلقه روی قطر اصلی، R_i، اول است.

تشکر و قدردانی:

نویسندگان مقاله، از داوران محترم، که نظرات و پیشنهاداتشان بر کیفیت مقاله افزود، کمال تشکر و قدردانی را دارد.

فهرست منابع

[۱] G. F. Birkenmeier, Idempotents and completely semiprime ideals, *Comm. Algebra* **۱۱** (۱۹۸۳), ٥٦٧-٥٨٠.

[۲] G. F. Birkenmeier, H. E. Heatherly, J. Y. Kim, and J. K. Park, Triangular matrix representations, *J. Algebra* **۲۳۰** (۲۰۰۰), ٥٥٨-٥٩٥.

[۳] G.F. Birkenmeier, J.Y. Kim and J.K. Park, Principally quasi-Baer rings, *Comm. Algebra* **۲۹** (۲) (۲۰۰۱), ٦٣٩-٦٦٠.

[٤] G.F. Birkenmeier and J.K. Park, Triangular matrix representations of ring extensions, *J. Algebra* **٢٦٥** (۲۰۰۳), ٤٥٧-٤٧٧.

[٥] S. U. Chase, A generalization of triangular matrices. *Nagoya Math. J.* ۱۸ (۱۹٦۱), ۱۳–۲٥.

[٦] W. E. Clark, Twisted matrix units semigroup algebras, *Duke Math. J.* (۱۹٦۷), ٤۱۷-٤۲٤.

[۷] M. Fliess, Sur divers produits de series fonnelles, *Bull. Soc. Math. France*, **۱۰۲** (۱۹۷٤), ۱۸۱-۱۹l.

[۸] R. Gordon, L.W. Small, Piecewise domains, *J. Algebra*, ۲۳ (۱۹۷۲), ٥٥۳-٥٦٤.

[۹] E. Hashemi and A. Moussavi, Polynomial extensions of quasi-Baer rings, *Acta Math. Hungar*. **۱۰۷** (۳) (۲۰۰٥), ۲۰۷-۲۲٤.

[۱۰] I. Kaplansky, Rings of operators, Benjamin New York, (۱۹٦٥).

[۱۱] W. F. Keigher, Adjunctions and commands in differential algebra, *Pacific J. Math.* **۲٤۸** (۱۹۷٥), ۹۹-۱۱۲.

[۱۲] W. F. Keigher, On the ring of Hurwitz series, *Comm. Algebra* **۲٥** (٦) (۱۹۹۷), ۱۸٤٥-۱۸٥۹.

[۱۳] W. F. Keigher and F. L. Pritchard, Hurwitz series as formal functions, *J. Pure Appl. Algebra* **۱٤٦** (۲۰۰۰), ۲۹۱-۳۰٤.

[۱٤] J. Krempa, Some examples of reduced rings, *Algebra Colloq.* **۳** (٤) (۱۹۹٦), ۲۸۹-۳۰۰.

[۱٥] Z. K. Liu, R. Zhao, A generalization of PP-rings and p.q.-Baer rings. *Glasg. Math. J.* ٤۸ (۲) (۲۰۰٦), ۲۱۷–۲۲۹.

[۱٦] K. Paykan, Principally quasi-Baer skew Hurwitz series rings, *Boll. Unione Mat. Ital.* **۱۰** (٤) (۲۰۱۷), ٦۰۷-٦۱٦.

[۱۷] K. Paykan, A study on skew Hurwitz series rings. Ric. mat. ٦٦(۲) (۲۰۱۷), ۳۸۳–۳۹۳.

[۱۸] Pollingher, P., Zaks, A., On Baer and quasi-Baer rings. Duke Math. J. ۳۷ (۱۹۷۰) ,۱۲۷–۱۳۸.

[۱۹] L. W. Small, Semihereditary rings. *Bull. Amer. Math. Soc.* ۷۳ (١٩٦٧), ٦٥٦–٦٥٨.

[۲۰] E. T. Taft, Hurwitz invertibility of linearly recursive sequences, *Congressum Numerantium*, ۷۳ (۱۹۹۰), ۳۷-٤۰.