دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال نهم، شماره چهل یکم، فروردین و اردیبهشت ۱۴۰۲
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

پوش انژکتیو $G-AF-$جبرها

علی محمودی[1]، محمدرضا مردان بیگی[2*]

[1] گروه ریاضی، واحد بین‌الملل ماکو، دانشگاه آزاد اسلامی، ماکو، ایران.
[2] گروه ریاضی محض، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات، تهران، ایران.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۰۲/۳۰   تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۱۲/۱۶

چکیده

در این مقاله، فرض می‌کنیم G یک گروه گسسته باشد که روی C^*-جبر A عمل می‌کند. ثابت می کنیم که اگر $G-AF-$جبر A متناهی البعد باشد، آنگاه A، $G-$انژکتیو است. همچنین نشان خواهیم داد که اگر A یک $G-C^*-$جبر ساده اساسی جدایی‌پذیر و $\overline{A}_G$، فضای کاملاً منظم یکنوای A و $I_G(A)$، $G-$پوش انژکتیو A باشد، آنگاه گزاره‌های زیر معادلند:

(۱) $\overline{A}_G$ یک $G-W^*-$جبر است.

(۲) $I_G(A)$ یک $G-W^*-$جبر است.

(۳) A، $G-$یکریخت با مجموع مستقیم شمارا از جبرهای با فرم $K(H_n)$ است، که در آن H_n یک فضای هیلبرت می‌باشد. بعلاوه نشان خواهیم داد که این $G-C^*-$جبر باید $G-AF-$جبر باشد.

واژه‌های کلیدی: $G-AF-$جبر، $G-W^*-$جبر، $G-$پوش‌انژکتیو، $G-$فضای کاملا منظم یکنوا، $G-C^*-$جبر ساده اساسی، $G-C^*-$جبر لیمینال و پست‌لیمینال.

* عهده‌دار مکاتبات:
Email: mrmardanbeigi@iau-tnb.ac.ir

۱- مقدمه

C^*-جبر A را یک AF-جبر[۲] نامیم هرگاه شامل یک دنباله صعودی از C^*-زیر جبرهای با بعد متناهی A_n ها باشد بطوریکه اجتماع A_n ها در A چگال است $i.a$؛ $A=\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_m}$. اگر تمام A_n ها C^*-زیر جبرهایی ساده باشند، آن‌گاه AF-جبر A را UHF-جبر نامیم. با تعریف $A_0=Ce$، که در آن e عضو یک C^*- جبر A است، می‌توان تمام A_n ها را C^*-زیر جبرهای یکدار در نظر گرفت.

اگر G یک گروه گسسته باشد. $G-C^*$-جبر در واقع یک C^*-جبر همراه با عمل پیوسته α از G است. بطور خاص α یک همریخت از گروه گسسته G بتوی گروه خود ریخت‌های A یعنی $Aut(A)$ است. بطوریکه برای هر $a\in A$، نگاشت $g\mapsto \alpha_g(a)=g.a$ نرم پیوسته باشد.

$G-C^*$- جبر A را $G-W^*$-جبر گوییم اگر A یک فضای $G-C^*$-جبر با ساختار $L^1(G)$-مدول و اینکه نگاشت $x\to f\cdot x$ در A دارای خاصیت مثبت و نرمال برای هر $f\in L^1(G)^+$ باشد.

$G-C^*$-جبر A را $G-AW^*$-جبر گوییم اگر فضای پایه‌اش W^*-جبر باشد.

در سال ۲۰۱۱ هامانا وجود G-پوش انژکتیو یکتای $(I_G(A),\kappa)$ برای هر G-سیستم عملگری A را ثابت می کند، بطوریکه اگر (B,κ') یک G-پوشش انژکتیو دیگری از A، باشد آن‌گاه یک G- یکریخت $\varphi: I_G(A)\to B$ با خاصیت $\varphi o\kappa=\kappa'$ وجود دارد. لازم است بدانیم که در آن G یک گروه گسسته است که روی A عمل می‌کند.

در این مقاله هامانا H را یک فضای هیلبیرت و A را یک سیستم عملگری از $B(H)$ فرض می‌کند، در این صورت $l^\infty(G,A)$ یک G-سیستم عملگری از $B\left(H\otimes l^2(G)\right)$ با عمل G است. بطوریکه

$$(gf)(h)=f\left(g^{-1}h\right),\ g,h\in G,\ f\in l^\infty(G,A)$$

که در آن $f\in l^\infty(G,A)$ روی $B\left(H\otimes l^2(G)\right)$ چنین عمل می‌کند، برای هر $\xi\in H, g\in G$ داریم

$$f(\xi\otimes\partial_g)=f(g)\xi\otimes\partial_g.$$

هامانا نشان می دهد که اگر A یک سیستم عملگری انژکتیو باشد، آنگاه $l^\infty(G,A)$ یک G-انژکتیو است و هر G-انژکتیو G-سیستم عملگری یک انژکتیو می‌باشد.

در این مقاله ثابت می کنیم که $G-AF$-جبرهای نامتناهی البعد در رسته ی $G-AF$-جبرها و نگاشت‌های کاملا مثبت G-همورد دارای G- پوش‌انژکتیو نمی باشند در حالیکه $G-AF$-جبرهای متناهی البعد G-انژکتیو هستند. همچنین ثابت می‌کنیم که اگر $G-C^*$-جبر کاملا منظم، $\overline{A}_G$، یا بطور هم ارزی G-پوش انژکتیو از یک $G-C^*$-جبر ساده اساسی جدایی‌پذیر A، $G-W^*$-جبر باشد، آنگاه $G-C^*$-جبر A با مجموع مستقیم $G-C^*$-جبرهای مقدماتی G- یکریخت است.

در نتیجه، چون $K(H_n)$ ها $G-AF$-جبر هستند و از آنجائیکه می‌دانیم رسته $G-AF$-جبرها نسبت به مجموع مستقیم شمارا بسته است. بنابراین $G-C^*$-جبر بدست آمده باید $G-AF$-جبر باشد. سرانجام در بخش آخر نشان می‌دهیم که اگر G-C^*-جبر ساده اساسی جدایی‌پذیر پست لیمینال باشد، آنگاه لیمینال است.

2- Approximately Finite Dimensional Algebra

۲- پوش انژکتیو $AF-G$-جبرها

تعریف ۲-۱: $G-C^*$-جبر A را $AF-G$-جبر خوانیم اگر و فقط اگر آن حد استقرائی[3] دنباله شمارا از $G-C^*$-جبرهای با بعد متناهی باشد.

در حقیقت $G-C^*$-جبر A یک $AF-G$-جبر است اگر دنباله صعودی $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ از G-زیر جبرهای با بعد متناهی موجود باشد به طوری که $A=\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_m}$. واضح است که این با تعریف بالا هم‌ارز است. زیرا $G-C^*$-جبرهای با بعد متناهی جدایی‌پذیر هستند، لذا $AF-G$- جبرها جدایی پذیر هستند.

ملاحظه ۲-۲: اگر $G-C^*$-جبر A جدایی‌پذیر نباشد، آن‌گاه $AF-G$-جبر A حد مستقیم دلخواه از $G-C^*$-زیر جبرهای متناهی‌البعد از A است.

گردایه $\{(A_n,\varphi_n)\}_{n=1}^{\infty}$ را در یک دنباله مستقیم[4] از $G-C^*$- جبرها خوانیم اگر به ازای هر $n\geq 1$، A_n ها $G-C^*$- جبر و $\varphi_n : A_n \to A_n+1$ ها، G-*-همریخت باشند. اغلب بدین ترتیب نشان می‌دهیم که

$$A_1 \xrightarrow{\varphi_1} A_2 \xrightarrow{\varphi_2} A_3 \xrightarrow{\varphi_3} \ldots.$$

حد استقرایی $A=\lim_{x\to\infty}(A_n,\varphi_n)$ از $G-C^*$-جبرهای با بعد متناهی A_n، یک $AF-G$-جبر است.

مثال۲-۳: $G-C^*$-جبر $C([0,1])$، $AF-G$-جبر نیست. چون $[0,1]$ همبند است، آن‌گاه تنها تصویر روی $G-C^*$- جبر $C([0,1])$، ۰ و ۱ هستند، در نتیجه تنها دارای دو C^*-زیر جبر با بعد متناهی $\{0\}$و ϕ در $C([0,1])$ وجود دارد. از این رو $G-C^*$-جبر $C([0,1])$ نمی‌تواند بستار اجتماع این دو $G-C^*$- زیر جبر باشد. پس $C([0,1])$، $AF-G$-جبر نیست.

مثال ۲-۴: $K(H)$، $G-C^*$- جبر عملگرهای فشرده روی G- فضای هیلبرت جدایی‌پذیر نامتناهی البعد یک $AF-G$-جبر با بعد نامتناهی است. فرض می‌کنیم $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ پایه‌های یکه متعامد در G- فضای هیلبرت H و P_n یک تصویر به روی فضای تولید شده از بردارهای $\{e_1,e_2,e_3,\ldots e_n\}$ باشد.

قرار می‌دهیم $A_n=P_nK(H)P_n$ و فرض می‌کنیم $\varphi_n : A_n \to A_{n+1}$، G-نگاشت شمول باشد، در این صورت $\bigcup_{n\geq 1} A_n$ شامل G-عملگرهای با رتبه متناهی روی H است و $K(H)$ حد استقرایی $G-C^*$-جبرهای A_n می‌باشند.

مثال ۲-۵: $K(H)+CI\subseteq B(H)$ یک $AF-G$- جبر است، که در آن C مجموعه اعداد مختلط است. فرض می‌کنیم p_n یک دنباله‌ی صعودی از تصویرها با خاصیت $rank(p_n)=n$، بطوریکه همگرای قوی به G- نگاشت همانی است. گیریم

$$A_n = CP_n^{\perp} + p_nK(H)p_n \cong C\oplus M_n$$

نشان می‌دهیم $K(H)+CI$ در $\bigcup_{n\geq 1} A_n$ چگال است. با استفاه از تعریف A_n، به ازای هر x متعلق به A_n، x مجموع یک G-عملگرهای با رتبه

3- Direct Limit
4- Direct Sequence

متناهی و یک مضربی از G–نگاشت همانی است.
از این رو داریم $A_n \subseteq K(H)+CI$.
برعکس، همانطور که می‌دانیم G–عملگرهای با رتبه متناهی در $K(H)$ چگال هستند و چون ترکیب متناهی از $e_1 e_2 \dots$ در H چگال هستند، لذا داریم $K(H)+CI \subseteq \bigcup_{n\geq 1} A_n$. با این توضیحات ثابت می‌شود که $A=\overline{\bigcup_{n\geq 1} A_n}$. این بدین معناست که A یک $AF-G$– جبر است و $K(H)+CI$ اجتماع شمارا از دنباله صعودی $G-C^*$–زیر جبرهای با بعد متناهی $\{A_n\} n \geq 1$ از A، که هر A_n شامل عضو یکه می‌باشد، است.
قرار دهیم $A_0 = Ce$، بطوریکه $A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots$، آن‌گاه $A=\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n}$ یک $AF-G$–جبر یکدار است و e عضو یکه A خواهد بود.
گیریم $A=\overline{\bigcup_{n\geq 1} A_n}$ و $B=\overline{\bigcup_{n\geq 1} B_n}$ هر دو $AF-G$–جبر باشند، در این صورت $A\oplus B=\overline{\bigcup_{n\geq 1}(A_n\oplus B_n)}$ و $A\otimes B=\overline{\bigcup_{n\geq 1}(A_n\otimes B_n)}$، هر دو $AF-G$–جبر هستند. این نشان می‌دهد که رسته $AF-G$–جبرها G–ریخت‌های کاملا مثبت، نسبت به مجموع متناهی و ضرب تانسوری بسته است. در ضمن اگر $A=\overline{\bigcup_{n\geq 1} A_n}$ و ρ یک G–ریخت از A بتوی $G-C^*$–جبر B باشد. چون برای هر $x\in A$، $\|\rho(x)\|\leq\|x\|$، آنگاه $B=\overline{\bigcup_{n\geq 1}\rho(A_n)}$. بدین‌ترتیب چون $G-C^*$–جبرهای A_n متناهی البعد هستند، آن‌گاه $G-C^*$–زیر جبرهای $B_n=\rho(A_n)$ از B نیز متناهی‌البعد هستند و چون ρ عضو واحد A را به عضو واحد B تصویر می‌کند، از این رو B یک $AF-G$–جبر است.

گزاره ۲-۶: هر $AF-G$–جبر یکدار یک $G-C^*$–جبر متناهی است.

اثبات. فرض می‌کنیم که B یک $AF-G$–جبر یکدار و $b\in B$ یک ایزومتری دلخواه باشد. چون B جدایی‌پذیر است، با استفاده از [۵، قضیه ۳.۴]، $G-C^*$–زیرجبری مانند A از B و $x\in A$ وجود دارد به طوری که $\|b-x\|\leq 1$. در این حالت خواهیم داشت:

$$\|1-b^*x\|=\|b^*b-b^*x\|\leq\|b^*\|\|b-x\|$$

این نشان می‌دهد که b^*x در B معکوس پذیر و بعلاوه، x معکوس‌پذیر چپ است. بنابراین x^*x معکوس‌پذیر خواهد شد. لذا x^*x در A، بدلیل موروثی بودن معکوس‌پذیری، در $G-C^*$–زیرجبرها نیز معکوس‌پذیر است. و این یعنی x معکوس‌پذیر چپ در A است. اما همانطور که می‌دانیم A با بعد متناهی است و این هم ارز است با اینکه x معکوس‌پذیر در A، بالاخره در B است. چونکه $b^*b=1$. لذا باید $b^{-1}=b^*$ باشد و این نشان می‌دهد که b یکانی است. از این رو با استفاده از [۵، گزاره ۱.۴]، اگر هر ایزومتری در $G-C^*$–جبر A یکانی باشد، آن‌گاه $G-C^*$–جبر A متناهی است. در نتیجه B یک $G-C^*$–جبر متناهی است.

ملاحظه ۲-۷: همانطور که می‌دانیم و هامانا نشاد داده است، G–پوش‌انژکتیو هر $G-C^*$–جبر مشمول در رسته $G-C^*$–جبرها و نگاشت‌های خطی کاملاً مثبت G–همورد است.

تعریف ۲-۸: $G-C^*$–جبر از یک $AF-G$–جبر را G–پوش انژکتیو نامیم اگر و فقط اگر

$I_G\left(A\right)$، G–انژکتیو باشد و تنها نگاشت خطی کاملاً مثبت G– همورد $f:I_G\left(A\right)\to I_G\left(A\right)$ بطوریکه $f|_A=id_A$ است، نگاشت همانی $id_{I_G(A)}$ باشد. اکنون با توجه به گزاره [۵، IV.۲.۱.۷]، می‌خواهیم ثابت کنیم که همه $AF-G$–جبرها G–انژکتیو از بعد متناهی هستند.

قضیه ۲-۹: در رسته C^*-G–جبرها و نگاشت‌های خطی کاملاً مثبت G–همورد، $AF-G$–جبرهای G–انژکتیو، متناهی البعد هستند.

اثبات. فرض کنیم A یک $AF-G$–جبر انژکتیو باشد. آنگاه A با استفاده از [۵، IV.۲.۱.۷]، AW^*-G–جبر است. از طرف دیگر، چون A یک $AF-G$–جبر است، پس داریم $A=\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n}$. چون هر A_n متناهی البعد است و گردایه A_nها شماراست، لذا A یک AW^*-G–جبر جدایی‌پذیر می‌باشد. حال، یک C^*-G–زیرجبر آبلی ماکزیمال یکدار از AW^*-G–جبر A بصورت $C\left(X\right)$ است که در آن X یک فضای به شدت ناهمبند فشرده است. چون A جدایی‌پذیر است، بنابراین $C\left(X\right)$ نیز جدایی‌پذیر است. این ثابت می‌کند X باید متری‌پذیر باشد و می‌دانیم که هر فضای متری‌پذیر و بشدت ناهمبند باید گسسته باشد. در نتیجه X متناهی است و از این نتیجه خواهد شد که $C\left(X\right)$ متناهی البعد است. حال، با استفاده از [۱۲]، A نیز متناهی البعد است و حکم ثابت می‌شود.

نتیجه ۲-۱۰: پوش‌انژکتیو یک $AF-G$–جبر نامتناهی البعد، نمی‌تواند یک $AF-G$–جبر باشد. زیرا اشیاء انژکتیو در رسته $AF-G$–جبرها و نگاشت‌های خطی کاملاً مثبت G–همورد متناهی البعد هستند.

در این مرحله نمی‌دانیم که آیا اشیا انژکتیو در رسته $AF-G$–جبرها و نگاشت‌های خطی کاملاً مثبت G–همورد باید AW^*-G–جبر باشند یا خیر؟ همچنین هنوز نمی‌دانیم که آیا رسته همه $AF-G$–جبر (حتی شامل غیر جدایی‌پذیرها) شامل G– پوش‌انژکتیو اشیاء خود هستند یا خیر؟

۳- ایده‌آل‌های اساسی $AF-G$– جبرها

هدف ما در این بخش، بحث روی مفهوم G–پایا ایده‌آل اساسی[5] $AF-G$–جبرهاست. نشان می‌دهیم برای هر $AF-G$– جبرساده اساسی بهتر است مطالعات را روی ایده‌آل‌های اساسی لیمینال متمرکز کنیم.

ایده‌آل G–پایای I از C^*-G–جبر A را اساسی خوانیم اگر برای هر ایده‌آل G–پایای غیر صفر K از A داشته باشیم $K\bigcap I\neq\{\circ\}$. بطور هم ارزی برای هر $a\in A$ اگر $aI=\circ$، آن‌گاه $a=\circ$. ایده‌آل‌های اساسی لزوماً غیر صفر هستند.

مثال ۳-۱: (۱) اگر Y یک G–فضای هاسدورف و موضعاً فشرده باشد، آن‌گاه برای هر زیر مجموعه چگال باز $X\subseteq Y$، $I=C_\circ\left(X\right)$ تنها ایده‌آل اساسی G–پایا از C^*-G–جبر $C_\circ\left(Y\right)$ است.

(۲) فرض کنیم A یک AW^*-G–جبر نوع I و P یک تصویر آبلی از A باشد ، آن‌گاه ایده‌آل $I=\langle p\rangle$ یک ایده‌آل اساسی G–پایا در A است.

تعریف ۳-۲: C^*-G–جبر ساده اساسی [6]گوییم اگر دارای هیچ ایده‌آن اساسی G–پایای بسته سره نداشته باشد.

بطور آشکارا هر C^*-G–جبر ساده یک C^*-G–جبر ساده اساسی است. اما همانطور که

5- Essential Ideal
6- Essentially Simple

در مثال زیر دیده می‌شود عکس این موضوع درست نیست. اگر A جبر $-C^*-G$ یکدار نباشد، آنگاه هیچ یک از $G-$جبر ضربی $M_G\left(A\right)$ و کمترین تقسیم[۷]، $A+C\subseteq M_G\left(A\right)$، $G-$ساده اساسی نیستند. زیرا در هر دو حالت، A دارای یک ایده‌آل اساسی $G-$پایای بسته سره می‌باشند. از آنجایی که ما در این رساله با C^*-G $-$جبرهای جدایی‌پذیر سر کار داریم، حالت قبلی چندان نمونه قابل توجه‌ی نیست، زیر $M_G\left(A\right)$ معمولاً در حالت نامتناهی‌العبد جدایی‌پذیر نیست. با این حال $K\left(H\right)+CI\subseteq B\left(H\right)$ یک نمونه خوبی از C^*-G $-$جبرهای غیر ساده اساسی جدایی پذیر است که در مثال ۲-۵ اشاره شده است.

مثال ۳-۳: (۱) C^*-G $-$جبرهای متناهی‌البعد $G-$ساده اساسی هستند. فرض کنیم B یک C^*-G $-$ جبر متناهی‌البعد و I یک ایده‌آل بسته $G-$پایا در B باشد. در این صورت B مجموع تقسیم متناهی از جبر ماتریس‌هاست و از آن‌جائیکه جبر ماتریس‌های کامل ساده هستند، آن‌گاه I دارای یک مجموع مستقمی از زیرخانواده متناهی است. حال اگر I غیر بدیهی باشد، آن‌گاه یک جمعوند کامل که در I نیست، وجود دارد. یک عضو غیر صفر a در این جمعوند کامل را انتخاب و فرض می‌کنیم یک عضوی B باشد. بطور واضح $aI=0$، در حالیکه $a\neq 0$. این نشان می‌دهد که I نمی‌تواند اساسی باشد.

(۲) در حالت کلی، هر مجموع مستقیم از C^*-G $-$جبرهای ساده (با بیش از یک عامل اما غیر ساده)، با همان استدلال در مثال بالا، $G-$ساده اساسی است.

فرض کنیم I یک ایده‌آل $G-$پایای دو طرفه در $AF-G$ $-$جبر A آنگاه I نیز یک $AF-G$ $-$جبر خواهد بود. و داریم:

$$I=\overline{\bigcup_{n\geq 1}\left(I\bigcap A_n\right)}$$

که در آن $A=\overline{\bigcup_{n\geq 1}\left(A_n\right)}$ و هر A_n، C^*-G $-$زیر جبرهای از A با بعد متناهی است.

بهتر آن است که بتوان از توصیف فوق بعنوان توصیف جایگزین با استفاده از نمودار براتلی[۸] برای هر توصیف $AF-G$ $-$ جبرهای ساده اساسی استفاده کرد. همچنین بهتر است یک توصیف از این $AF-G$ $-$جبرها با یک ایده‌آل اساسی بسته سره منحصر به فرد (شبیه حالت: کمترین تقسیم) داشته باشیم. در نهایت برای $AF-G$ $-$جبرهای ساده غیراساسی، بهتر است که روی ایده‌آل‌های اساسی $G-$پایای مینمال اشراف داشته باشیم. W^*-G $-$جبر $B\left(H\right)$، پوش انژکتیو $AF-G$ $-$جبر $K\left(H\right)$ است. ما نتیجه‌ای از قضیه [۲، قضیه ۲-۲] را زمانی که گروه گسسته G را بعنوان یک عمل وارد قضیه می‌کنیم، برای نشان دادن اینکه C^*-G $-$جبر $K\left(H\right)$ و مجموع مستقیم آن تنها مورد اساسی است که چنین پدیده‌ای ممکن است رخ دهد، استفاده خواهیم کرد.

گزاره ۳-۴: اگر A یک C^*-G $-$جبر ساده اساسی جدایی‌پذیر و $\overline{A}$، فضای کاملاً منظم یکنوا A و $I_G(A)$، $G-$پوش‌انژکتیو A باشد، آنگاه گزاره‌های زیر معادلند:

(۱) $\overline{A}$ یک W^*-G $-$جبر است.

(۲) $I_G\left(A\right)$ یک W^*-G $-$جبر است.

7-Minimal Unitization

8- Bratteli Diagram

(۳) A G-یکریخت با مجموع مستقیم شمارا از جبرهای با فرم $K(H_n)$ می‌باشد، که در آن H_n یک فضای هیلبرت است.

اثبات: $(۳)\Rightarrow(۱)$. چون A جدایی‌پذیر است، پس $\overline{A}$ دارای زیر مجموعه چگال مرتب شمارش‌پذیر است. در نتیجه با استفاده از گزار A [۱۶]، مجموعه تابعک‌های حالت محض از $\overline{A}$ با توپولوژی ضعیف ستاره ابرجدایی‌پذیر است. چون ابرجدایی‌پذیری بر جدایی‌پذیری دلالت دارد، لذا با استفاده [۱۵، قضیه ۷]، $\overline{A}$، بازای هر H_n جدایی‌پذیر، با $\Pi_n B(H_n)$ یکریخت است. بنابراین چون $\Pi_n B(H_n)$، G-انژکتیو است، آن‌گاه داریم

$$I(A)=\overline{A}=\prod_n B(H_n).$$

درنتیجه بنابه [۱۱، لم۳.۱]، چون $\overline{A}$، $G-W^*$-جبر است، پس A شامل یک ایده‌آل اساسی G-پایا مانند K در $\prod_n B(H_n)$ می‌باشد، از این رو داریم

$$\bigoplus_n K(H_n)\subseteq A\subseteq\prod_n B(H_n).$$

از طرفی بنا به فرض، چون A یک جبر ساده است و $\oplus_n K(H_n)$ می‌نیمال می‌باشد، پس داریم
$A=\oplus_n K(H_n).$

$(۲)\Rightarrow(۳)$. چون $A=\oplus_n K(H_n)$. بنابراین با توجه به [۱، لم۱.۲.۱]،

$$\begin{aligned}M_G(A) &= M_G\Big(\bigoplus_n K(H_n)\Big)\\ &= \prod_n M_G\big(K(H_n)\big)\\ &= \prod_n B(H_n)\end{aligned}$$

و این نشان می‌دهد $M_G(A)=M_G^{loc}(A)$، $G-W^*$-جبر است. لذا کاملاً یکنوا است و بنا به [۲، گزاره ۲.۱]،

$$M_G^{\mathrm{loc}}(A)=\overline{M_G^{loc}(A)}=\overline{A}$$

که این نشان می‌دهد $\overline{A}$، $G-W^*$-جبر است. از طرفی با توجه به اثبات $(۳)\Rightarrow(۱)$، چون $\overline{A}$ ضرب مستقیم از عوامل انژکتیو است، در نتیجه انژکتیو است. اما می‌دانیم که $\overline{A}\subseteq I_G(A)$. که با توجه به می‌نیمال انژکتیو بودن $I_G(A)$، خواهیم داشت $I_G(A)$، $G-W^*$-جبر است.

$(۱)\Rightarrow(۲)$. چون $G-C^*$-زیر جبر بسته یکنوا از یک فان- نیومن $G-C^*$-جبر است، لذا $\overline{A}$، $G-W^*$-جبر می‌باشد.

نتیجه ۳-۵: یک $G-C^*$-جبر ساده اساسی جدایی‌پذیر که G-پوش انژکتیو آن یک فان-نیومن $G-C^*$-جبر باشد، لزوما یک $G-AF$-جبر است.

۴- لیمینال و پست لیمینال $G-C^*$-جبرها

حال ما از $G-C^*$-جبرهای‌لیمینال[۹] و پست لیمینال[۱۰] $G-C^*$-جبر در مفهوم G-پوش انژکتیو استفاده خواهد کرد. مثال‌هایی از $G-AF$-جبرهایی که پست‌لیمینال هستند اما لیمینال نیستند و همچنین مثال‌هایی که پست لیمینال نیستند، وجود دارند.

تعریف ۴-۱: فرض کنیم A یک $G-C^*$-جبر باشد.

9- Liminal
10- Post Liminal

(۱) $G-C^{*}-$جبر A را لیمینال گوییم اگر $\varphi(A)\subseteq K(H)$ که در آن (H,φ)یک $G-$ نمایش تحویل‌پذیر[11] ناصفر از A است، (بطور هم ارزی $\varphi(A)\subseteq K(H)$).

(۲) $G-G^{*}-$جبر A را پست‌لیمینال نامیم اگر $\varphi(A)\supseteq K(H)$ که درآن (H,φ) یک نمایش تحویل پذیر نا صفر از A است، (بطور هم ارزی $K(H)\cap\varphi(A)\neq\phi$).

جبرهای لیمینال را CCR[12] و جبرهای پست‌لیمینال را GCR[13] ($G-C^{*}-$ جبر نوع I) $G-C^{*}-$جبر نیز می‌نامند. مفهوم $G-C^{*}-$ نوع I نباید با جبرهای $G-$فان‌- نیومن اشتباه گرفته شود، زیرا جبرهای $G-$فان-نیومن لزوماً $G-C^{*}-$جبر نیستند.

هر $G-C^{*}-$جبر لیمنیال بطور واضح پست‌لیمینال است، اما برعکس ممکن است درست نباشد.

مثال ۴-۲: (۱) هر $G-C^{*}-$جبر A آبلی، لیمینال است. برای اثبات این چنین عمل می‌کنیم. فرض می‌کنیم (H,φ) یک نمایش تحویل‌پذیر ناصفر از A باشد، آنگاه $\varphi(A)'=C1$. بعلاوه، چون A آبلی است، $\varphi(A)\subseteq\varphi(A)'$. از این رو $\varphi(A)=C1$. در نتیجه H یک بعدی است. چون $\varphi(A)$ دارای هیچ زیرفضای برداری پایای غیربدیهی نیست، لذا $\varphi(A)=K(H)$. پس $G-C^{*}-$جبر A لیمینال است.

(۲) فرض کنیم A یک $G-C^{*}-$ جبر متناهی‌البعد باشد، آن‌گاه A لیمینال است. برای اینکه اگر (H,φ) یک نمایش تحویل‌پذیر غیر صفر از A باشد، آن‌گاه برای هر برادر غیر صفر $x\in H$ داریم $H=\varphi(A)x$ لذا H متناهی البعد است و بنابراین $\varphi(A)\subseteq K(H)=B(H)$.

همانطور که می‌دانیم با استفاده از [۱۶، قضیه ۱-۶-۵] هر $G-C^{*}-$زیر جبر از یک $G-C^{*}-$جبر لیمینال و خارج قسمت آن نیز لیمینال است. همچنین با استفاده از [۱۶، قضیه ۲-۶-۵] اگر I یک ایده‌آل بسته $G-$پایا دریک $G-C^{*}-$جبر A باشد، آن‌گاه $G-C^{*}-$جبر A پست لیمینال است اگر و فقط اگر I و $\frac{A}{I}$ پست‌لیمینال باشند.

مثال ۴-۳: جبر توپلیتز[14] T، با عمل گروه G، پست لیمینال است، اما لیمینال نیست. چون ایده‌آل $K:=K(H^{2})$ جابجایی است و از آن‌جایی که خارج قسمت $\frac{T}{K}$، $*-$یکریخت با $C(\omega)$ است، که در آن $\omega=\{\lambda\in C;\|\lambda\|=1\}$ است. پس T/K آبلی است. لذا $\frac{T}{K}$ مینیمال است. از این رو $K:=K(H^{2})$و $\frac{T}{K}$ پست لیمینال هستند. بنابراین T بنابه قضیه [۱۶، قضیه ۲-۶-۵]، پست‌لیمینال است. بعلاوه، Tلیمینال نیست، زیرا $G-$نمایش همانی از T در $H^{2}(T)$ تحویل‌پذیر است اما متناهی‌البعد نیست.

مثال ۴-۴: $G-C^{*}-$جبر $K(H)$، $G-AF-$ جبر لیمینال است. زیرا $G-$نمایش همانی، تنها $G-$نمایش تحویل‌پذیر ناصفری است که به طور یکانی با هر $G-$نمایش تحویل‌پذیر ناصفر از $K(H)$ روی فضای هیلبرت H هم ارز است و

11- Non-irreducible G-representation

12- Completely Continuous Representation

13- Stands for Generalized CCR

14- Toeplitz Algebra

چون $K(H)'=C1$، آنگاه $(H,\varphi)=(H,i)$. بنابراین $K(H)$ لیمینال است.

از طرف دیگر $AF-G$-جبر یکدار $K(H)+CI\subseteq B(H)$ لیمینال نیست. اما پست‌لیمینال است. ابتدا، می‌بینیم که G-نمایش‌های تحویل‌پذیر متناهی‌البعد تنها نمایش تحویل‌پذیر از C^*-G-جبر لیمینال یکدار $A=K(H)+CI$ است. برای اثبات این، فرض می‌کنیم (H,φ)یک G- نمایش تحویل‌پذیر ناصفر از A روی H باشد، آن‌گاه G-نمایش (H,φ) ناتبهگون[15] است. پس $\varphi(1)=id_H$. در نتیجه، $id_H\in\varphi(A)=K(H)$. لذا آن فشرده است و $\dim(H)<\infty$. حال گیرم که H یک فضای هیلبرت نامتناهی‌البعد باشد، آن‌گاه C^*-G-جبر A، یکدار و شامل G-نمایش تحویل‌پذیر ناصفر نامتناهی‌البعد است. این بدان معناست که (H,φ)، G-نمایش همانی روی H است. از این رو A لیمینال نیست، در حالیکه پست‌لیمینال است. زیرا $K(H)$ و $\frac{A}{K(H)}=C$، C^*-G-جبرهای لیمینال و لذا پست‌لیمینال هستند.

واضح است که اگر C^*-G-جبر A پست‌لیمینال ساده باشد، آن‌گاه A یک C^*-G-جبر مقدماتی است. چون A پست لیمینال است، پس $K(H)\subseteq\varphi(A)$. از طرفی چون A ساده است، آن‌گاه $\varphi(A)$ نیز ساده خواهد بود. در نهایت با استفاده از اینکه φیک G-نمایش تحویل‌ناپذیر ناصفر است، داریم $K(H)=\varphi(A)$. اما اگر یک C^*-G-جبر مقدماتی یکدار باشند، آن‌گاه A یک C^*-G-جبر متناهی‌البعد است و برعکس [۱۶، قضیه ۲-۴-۱]. بنابراین یک C^*-G-جبر ساده یکدار نامتناهی‌البعد پست لیمینال نسیت. برای اینکه اگر A پست‌لیمینال باشد، چون A ساده است پس A باید مقدماتی باشد. اما ما می‌دانیم که هر فضای مقدماتی یکدار متناهی‌البعد است. برای مثال هیچ یک از $UHF-G$-جبرها[16] پست لیمینال نیستند. بویژه اگر Hیک فضای هیلبریت نامتناهی‌البعد جدایی‌پذیر باشد، آن‌گاه جبر کالکین[17] $\frac{B(H)}{K(H)}$ یک مثال ساده از C^*-G-جبرهای ساده است، که پست‌لیمینال نیست. و این نشان می‌دهد $B(H)$ پست‌لیمینال نیست.

قضیه ۴-۵: یک C^*-G-جبر پست‌لیمینال ساده اساسی جدایی‌پذیر لیمینال است.

اثبات: فرض کنیم A یک C^*-G- جبر پست‌لیمینال ساده اساسی جدایی‌پذیر باشد. چون A پست‌لیمینال است، آن‌گاه با استفاده از [۱۰، قضیه ۶-۶] $\overline{A}$ یک AW^*-G-جبر نوع I است و چون هر AW^*-G-جبر از نوع I، G-انژکتیو است. لذا خواهیم داشت، $\overline{A}=I(A)$. حال با استفاده از [۳، قضیه ۱-۳]، A دارای ایده‌آل اساسی G-پایا لیمینال مانند I است. اما چون A ساده است. پس $I=A$ و این نشان می‌دهد که A لیمینال است.

15- Non-degenerate G-representation

16- G -UHF-algebra

17- Calkin Algebra

فهرست منابع

[1] P. Ara and M. Mathieu, Local Multipliers of C*-algebras, Springer Monographs in Mathematics, London. (2003).

[2] M. Argerami and D. R. Farenick, Local multipliers algebras, injective envelopes, and type I W*-a;gebras, J. Operator Theory. (2008), 237-245.

[3] M. Argerami and D. R. Farenick, Injective envelopes of separable C*-algebras. Philos. Trans. R. Soc. A 179 (2005), 43-63

[4] B. Blackadar, K-Theory for operator algebras. Mathematical Sciences Institute Publications, Cambridge University Press. (1998).

[5] M. Frank and V. I. Paulsen, Injective envelopes of C*-algebras as operator modules, Pacific J.Math.212(2003),57-69.

[6] A. M. Gleason, Projective topo;ogical spaces, Illinois J. Math. 2 (1956), 482-489.

[7] J. G. Glimm, On a certain class of operator algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 95 (1960), 318-340.

[8] M. Hamana, Injective envelopes of C*-algebras, J. Math. Soc. Japen, 31 (1979), 181-197.

[9] M. Hamana, Injective envelope of C*-dynamical systems, Tohoku Mathematical Journal. 15 (1985), no. 3, 463-487.

[10] M. Hamana, Regular embeddings of C*-algebras in monotone complete C^*algebras, J. Math. Soc. Japan. 33 (1981), 159-183.

[11] M. Hamana, The center of regular monotone completion of a C*-algebra, J. London Math. Soc. 12 (1982),522-530.

[12] R. V. Kadison, Operator algebras with a faithful weakly- closed representation, Ann. of Math. 64 (1956), 175-181.

[13] H. O. Milhoj, AF-algebras and their invariants, Department of Mathemaical Sciences, University of Copenhagen, (2018).

[14] G. J. Murphy, C*-algebras and operator theory, Academic Press Limited, (1990).

[15] J. D. M. Wright, On von Neumann algebra whose pure states are separable, J. London Matt. Soc. 12 (1976), 385-388.

[16] J. D. M. Wright, Wild AW*-factors and Kaplansky-Rickart algebras, J. London. Math. Soc. 13 (1976), 83-89.