دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره سی و ششم، آذر و دی ۱۴۰۱
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸
دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

یک روش هندسی برای پیداکردن کران جدیدروی مجموعه مستقل ماکسیمال و مجموعه احاطه‌گر همبند مینیمال در یک گراف دیسک واحد

غلام حسن شیردل [*۱]، مهدی جالینوسی [۲]

[(۱و۲)] گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه قم، قم، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۹/۱۰/۱۱   تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۷/۱۱

چکیده

در یک گراف دیسک واحد دو رأس مجاورند اگر با متر اقلیدسی دو بعدی فاصله بین آنها کوچکتر یا مساوی یک باشد. اندازه مجموعه مستقل ماکسیمال در یک گراف G را عدد استقلال گفته و با $\alpha(G)$ نشان می‌دهیم. اندازه مجموعه احاطه گر همبند مینیمال در گراف G را عدد احاطه گر همبند می‌گفته و با $\gamma_c(G)$ نمایش می‌دهیم. واضح است اگر فاصله بین دو گره از یک گراف دیسک واحد بیشتر از یک باشد آن دو گره مسقل هستند. یک زیر مجموعه S از راس‌ها در یک گراف مجموعه احاطه گر نامیده می‌شود اگر هر راس از گراف G یا عضو مجموعه S باشد یا با عضوی از آن مجاور باشد. یک مجموعه احاطه‌گر همبند است اگر یک زیر گراف همبند القا کند. یک مجموعه احاطه‌گر همبند اغلب به عنوان یک دکل مجازی در شبکه‌های سنسور بی‌سیم جهت بهبود ارتباطات و کارایی بهتر استفاده می‌شود. واضح است که دکل مجازی کوچکتر کارایی بهتری دارد. با این حال محاسبه یک مجموعه احاطه گر همبند مینیمال همچنان NP-سخت است. از طرفی ارتباط بین اندازه مجموعه مستقل ماکسیمال و اندازه مجموعه احاطه‌گر همبند مینیمال در یک گراف G بسیار اهمیت دارد. هدف اصلی این مقاله بهبود بخشیدن به کران بالای عدد استقلال وابسته به عدد احاطه گر همبند برای یک گراف دیسک واحد است. بعلاوه ما کران بالای موجود تا کنون را بهبود داده‌ایم.

واژه‌های کلیدی: مجموعه احاطه گر همبند- عدد استقلال – گراف دیسک واحد- مجموعه مستقل ماکسیمال- عدد احاطه گرهمبند.

[*] عهده‌دار مکاتبات: Emil:g.h.shirdel@qom.ac.ir , shirdel81math@gmail.com

۱- مقدمه و پیش نیازها

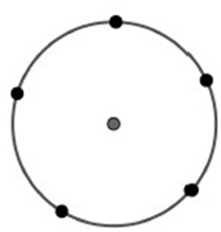
یک دیسک واحد یک دیسک با قطر یک می‌باشد. گراف $G=(V,E)$ یک گراف دیسک واحد نامیده می‌شود اگر نامساوی $d(u,v)\leq 1$ منجر به مجاور شدن دو راس uوv شود. اکر شعاع ارتباطی همه دیسک‌ها یکسان باشد شبکه سنسور بی‌سیم با گراف دیسک واحد مدلسازی می‌شود. برای هر رأس v از گراف دیسک واحد G ناحیه همسایگی v دیسکی به شعاع یک است که با نماد $\mathrm{disk}_1^{\mathrm{v}}$ نشان داده می‌شود. واضح است که چنانچه فاصله دو راس بیشتر از یک باشد آن دو راس مستقل هستند. یک زیر مجموعه S از راس‌ها در یک گراف مجموعه احاطه‌گر نامیده می‌شود اگر هر راس از گراف G یا عضو مجموعه S باشد یا با عضوی از آن مجاور باشد. یک مجموعه احاطه گر همبند است اگر یک زیر گراف همبند القا کند. یک مجموعه احاطه‌گر همبند اغلب به‌عنوان یک دکل مجازی در شبکه‌های سنسور بی سیم جهت بهبود ارتباطات و کارایی بهتر استفاده می‌شود. واضح است که دکل مجازی کوچکتر کارایی بهتری دارد. با این حال محاسبه یک مجموعه احاطه‌گر همبند مینیمال همچنان یک مساله NP-سخت است.

۲- کارهای گذشته

کلارک و همکارانش [1] ثابت کردند که مسأله محاسبه $MIN\quad CDS$[2] در UDG[3] یک مسأله -NP سخت است. وان[4] و همکارانش [2] برای اولین بار دریافتند که برای محاسبه $MIN\quad CDS$ می‌توان الگوریتمی با پیچیدگی زمانی چندجمله‌ای یافت. در این راستا الگوریتم‌های مختلفی توسط محققان طراحی شدند ([3] و[2] و[4]). تقریبا تمام این الگوریتم‌ها دو گامی هستند. در گام اول برای گراف داده شده مجموعه MIS[5] تعیین می‌شود و در گام دوم با افزودن چند رأس از گراف به MIS به یک MIN CDS دست می‌یابیم. برای تحلیل چنین الگوریتم هایی اطلاع از $\alpha(\mathrm{G})$ در مقایسه با $\gamma_{\mathrm{c}}^{(\mathrm{G})}$ اهمیت دارد. این موضوع مهم را دای[6] و همکارانش[5] با اثبات مطلب زیر نشان دادند. اگر G گرافی باشدکه نا مساوی $\alpha(G)\leq a\gamma_c^{(G)}+b$ در مورد عدد استقلال و عدد احاطه کننده آن صدق کند، آنگاه مجموعه احاطه کننده همبند گراف حداکثر بصورت زیر خواهد بود:

$$(\mathrm{a}+2+\ln(\mathrm{a}\quad 1))\gamma_{\mathrm{c}}^{(\mathrm{G})}+\mathrm{b}+\ \mathrm{b}\quad 1$$

به همین دلیل تحقیقاتی نظری در این ارتباط اهمیت بیشتری یافت. ابتدا وان و همکارانش[2] به استناد به اینکه همسایگی هر رأس می تواند حداکثر شامل ۵ نقطه مستقل باشد (شکل ۱).



شکل ۱: همسایگی هر رأس می¬تواند حداکثر شامل ۵ نقطه مستقل باشد

[2] Minimal connected dominating set
[3] Unit disk graph
[4] Wan
[5] Maximal independent set
[6] Dai

اولین تقریب را به صورت زیر ارائه دادند:

$\alpha(G) = 4\gamma_c^{(G)} + 1$

در ادامه وان وهمکارانش [2] گراف دیسک واحد همبندی را دسته بندی کردند که در آنها تساوی زیر صدق می‌کرد (شکل ۲).

$\alpha(G) = 3\gamma_c^{(G)} + 3$

اما بر اساس مثال‌های متعدد دیگراز گراف دیسک واحد نامساوی زیر به عنوان یک حدس مطرح شد:

$\alpha(G) \leq 3\gamma_c^{(G)} + 3$

سپس وو[7] و همکارانش [6] چهار لم زیر را اثبات کردند:

۱) ناحیه همسایگی هر یال در UDG حداکثر شامل هشت رأس مستقل است (شکل ۳).

۲) بر مرز حاصل از تلاقی دایره به شعاع واحد، حداکثر ۷ دایره میتوان مماس کرد که یکدیگر را قطع نکنند.

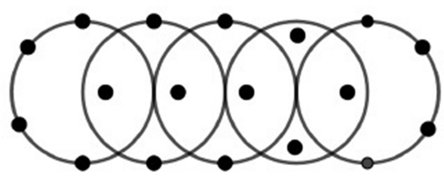
۳) در هر گراف دیسک واحد،یک مینیمم درخت مولد چنان وجود دارد که هر رأس آن حداکثر از درجه پنج است.

۴) هر درخت با حداقل سه رأس، یک رأس غیر برگ دارد که با حداکثر یک رأس غیر برگ مجاور است. و سپس ثابت کردند که در هر گراف دیسک واحد G نامساوی به صورت زیر برقرار است:

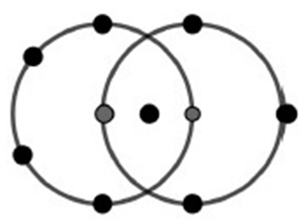
$\alpha(G) \leq 3.8\gamma_c^{(G)} + 1.2$

در ادامه این تحقیقات وان وهمکارانش [3] ایده دیگری برای اثبات کران بهتر یافتند. آنها چینش نقاط مستقل در همسایگی ستاره را مورد مطالعه قرار دادند. ابتدا به این موضوع توجه کردند که هر درخت را می‌توان به ستاره‌های غیر بدیهی افراز نمود و سپس کران بالایی برای تعداد نقاط مستقل واقع در همسایگی ستاره‌ها یافتند و به این ترتیب نتیجه گرفتند که نامساوی زیر در هر UDG صدق می‌کند:

$\alpha(G) \leq 3\frac{2}{3}\gamma_c^{(G)} + 1$



شکل ۲: همسایگی ۵ رأس گرافی دیسک‌واحد که ۱۸ نقطه مستقل را شامل شده است



شکل ۳: دو رأس مجاور از گراف دیسک‌واحد با فاصله حداکثر یک

[7] Wu

نامساوی زیر نیز حاصل تلاش لی[8] و همکارانش [7] می‌باشد که با استفاده از یک روش خلاقانه هندسی و محاسباتی نه چندان پیچیده به این مهم دست یافتند.

$$\alpha(G) \leq 3.4306\gamma_c^{(G)} + 4.8185$$

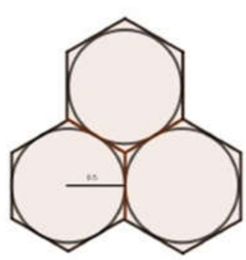
۳- نتیجه اصلی

در این مقاله ما با اصلاحی بر روش ارایه شده در [7] کران بالای بهتری به‌صورت زیر را ثابت می‌کنیم:

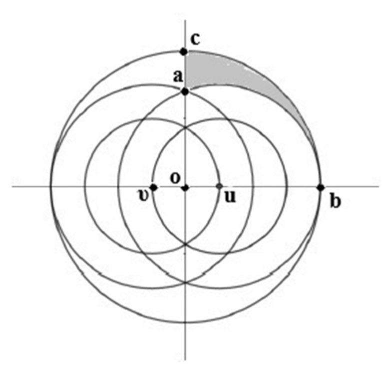
$$\alpha(G) \leq 3.4013\gamma_c^{(G)} + 4.7607$$

در واقع به جای دوایر استفاده شده در [7] شش ضلعی‌های محیط بر آنها را در نظر می‌گیریم. ابتدا به درستی و با یک روش هندسی; مساحت تمام دیسک گراف‌ها در یک مجموعه احاطه‌گر همبند را محاسبه می‌کنیم به طوریکه درخت پوشا از مجموعه آن گره‌ها یک ستاره با حداقل دو گره است. سپس ما از یک شش ضلعی بجای دیسک‌های کوچک با شعاع 0.5 استفاده می‌کنیم (شکل ۴).

دو دیسک به مراکز u و v در $MCDF$ در نظر می‌گیریم به طوریکه هر دو دارای شعاع 1.5 بوده و $\max\left(dist\left(u,v\right)\right) = 1$ می‌باشد. فرض می‌کنیم u و v دو راس از راس های یک گراف دیسک واحد با فاصله یک از هم باشند. دایره‌هایی به شعاع‌های 1.5 و1 رسم می‌کنیم. دایره‌ای به مرکزیت وسط پاره خط واصل v و u رسم می‌کنیم. مساحت محصور شده به دایره‌های به شعاع 1.5 را با S نشان داده و بصورت زیر حساب می‌کنیم (شکل ۵).



شکل ۴: استفاده از شش ضلعی محیطی به جای دوایر



شکل ۵ : دوایر به شعاع ۱ و ۱/۵ و به مرکز u و v

[8] Li

مساحت مثلث قایم‌الزاویه uoa معادل 0.3535 و مساحت قطاع bua معادل 2.1500 و مساحت قسمت هاشور خوررده معادل 0.6380 خواهد بود.
و نهایتاً داریم:

$$S = 4\pi \quad 4(0.6380) = 10.0140$$

نتیجه۳-۱: فرض می‌کنیم c_1 و c_2 دایره‌های شکل به شعاع 1.5 باشند وفرض می‌کنیم S_1 مساحت $C_1 \quad C_2$ باشد در اینصورت داریم:

$$S_1 = 10.0140 \quad \pi(1.5)^2 = 2.9456$$

لم۳-۲: مساحت شش ضلعی محیط بر دایره ای به شعاع 0.5 معادل است با:

$$6 \quad \frac{(0.5 \;\; (2 \;\; 0.5 \;\; \tan\left(\frac{\pi}{6}\right))}{2} = 0.866$$

قضیه۳: در هر گراف دیسک واحد G *نامساوی زیر برقرار است.*

$$\alpha(G) \leq 3.4013\gamma_c^{(G)} + 4.7607$$

برهان: بدیهی است که سطح دو بعدی ایجاد شده با دیسک‌های گراف G مشمول در سطح دو بعدی M ایجاد شده با دیسک‌های به شعاع 1.5 و مراکز رئوس MCDS می‌باشد. در این صورت عدد استقلال این گراف می‌بایست از مساحت M تقسیم بر مساحت شش ضلعی محیط بر دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{2}$ کمتر مساوی شود. پس براساس نتیجه ۳-۱ و لم ۳-۲ داریم:

$$\alpha(G) \leq \frac{\pi \;\; 1.5^2+\left(\gamma_c^{(G)}-1\right) \;\; 2.9456}{0.8 \;\; 66} = 3.4013\gamma_c^{G} + 4.7607$$

۴- نتیجه‌گیری

ما در این مقاله با استفاده از تکنیک‌های هندسی-جبری توانستیم کران بالای عدد استقلال را کاهش دهیم. انتظار می‌رود آیندگان نیز با تحقیق و مطالعه بتوانند از روش‌های مختلف این مهم را ادامه دهند.

فهرست منابع

[1] C. C. J. J. D. S. Clark B. N., "Unit disk graphs," Discrete Mathematics, 86, pp. 165-177, 1990.

[2] Wan P . J., Alzoubi K. M., Frierder o., "Distributed constrution on of connected dominating set in wireless ad hoc networks," ACM/ Springer Mobile Network , pp. 141-149, 2004.

[3] Wan P. J., Wang L., Yao F.F.,s "Two phased approximation algorithm s for minium CDS in wirelees ad hoc networks ICDCS," IEEE, pp. 3374-344, 2008.

[4] K. A. M. U. S. M. Funke S., "Asimple improved distributed algorithm for minimum CD S in unit disk graphs," ACM T rans. Sensor N et, pp. 4444-453, 2006.

[5] D. Dai and C. Yu, "A (5 +€)-approximation algorithm for minimum weighted dominatings set in unit disk graph ," Theor. Com put. Sci., p. 756–765, 2009.

[6] Wu W., Du H., jia X., Li Y., Huang S., "Minimum c onnected dominating sets and maximal independent sets in unit disk graphs," Theor. Comput. Sci., pp. 1-7, 2006.

[7] Li M., Wan P.J., Yao F., "Tighter Approximation Bonds for Minimum CDS in Unit Disk Graphs," Algorithmica 61(4), pp. 1000-1021, 2011. 2, 10, 12, 13, 29