دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره چهلم، بهمن و اسفند ۱۴۰۱
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

نگاشت‌های به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته در فضاهای توپولوژی

معصومه اعتبار[*]

گروه ریاضی، دانشگاه شهید چمران اهواز، اهواز، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۱/۰۱/۲۴   تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۴/۱۸

چکیده

پیوستگی جدیدی میان فضاهای توپولوژی، به نام به‌طور قوی δ_{cl}-پیوستگی، معرفی و مطالعه می‌شود. ویژگی‌های اساسی نگاشت‌های به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته مورد بررسی قرار می‌گیرد. ثابت می‌شود که برای فضای به‌طور ضعیف همبند موضعی X، به‌طور قوی δ_{cl}-پیوستگی یک نگاشت $f:X\rightarrow Y$ با cl-بالا پیوستگی f معادل است. با استفاده از این موضوع و بررسی رفتار نگاشت‌های به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته روی شبه مؤلفه‌های همبندی دامنه‌ی آن‌ها مشاهده می‌شود که برای هر فضای به‌طور ضعیف همبند موضعی X فضای گسسته‌ی Y وجود دارد که حلقه‌ی $S_{\delta_{cl}}(X)$ شامل تمام نگاشت‌های به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته‌ی حقیقی مقدار روی X با $C(Y)$ یکریخت است. با معرفی و استفاده از مجموعه‌های s_باز منظم در یک فضای توپولوژی، اصول تفکیک جدیدی مانند $\delta_{cl}T_1$، $\delta_{cl}T_2$، δ_{cl}-منظم و δ_{cl}-کاملاً منظم بودن فضا ساخته می‌شوند و ارتباط میان این اصول با نگاشت‌های به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته مورد بررسی قرار می‌گیرد. از جمله ثابت می‌شود که اگر X یک فضای δ_{cl}-کاملاً منظم و $f:X\rightarrow Y$ یک δ_{cl}-همسانریختی باشد، آن‌گاه X و Y دو فضای کاملاً منظم همسانریخت‌اند. ویژگی‌های توپولوژی جدید δ_{cl}-فشردگی و s-نسبتاًپیرافشردگی و خواص آن‌ها و همچنین ارتباطشان با نگاشت‌های به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته مورد مطالعه قرار می‌گیرند. مشاهده می‌شود که اگر Y مجموعه‌ای باز در X و A یک مجموعه‌ی δ_{cl}-فشرده در Y باشد، آن‌گاه A یک مجموعه‌ی δ_{cl}-فشرده در X خواهد بود. افزون برآن، نگاره‌ی هر مجموعه‌ی δ_{cl}-فشرده تحت یک نگاشت به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته، فشرده است. در پایان ویژگی‌های نمودارهای نگاشت‌های به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته و همچنین فضاهای δ_{cl}-خارج قسمتی مورد بررسی قرار می‌گیرند.

واژه‌های کلیدی: مجموعه‌ی δ_{cl}-باز، فضای δ_{cl}-منظم، فضای δ_{cl}-کاملاً منظم، فضای δ_{cl}-فشرده، فضای s-نسبتاً پیرافشرده.

---

[*]عهده‌دار مکاتبات: Email: m.etebar@scu.ac.ir

۱- مقدمه

بررسی و مطالعه‌ی پیوستگی و تعمیم‌های مختلف پیوستگی از دیرباز مورد توجه بوده است. به عنوان نمونه می‌توان به مراجع [۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶] که در آن‌ها نگاشت‌های R_δ- پیوسته، θ_{cl}-پیوسته، بالاپیوسته، بالاپیوسته، cl-بالاپیوسته و R_{cl}-بالاپیوسته معرفی و مورد بررسی قرار گرفته‌اند، اشاره نمود.

نگاشت $f: X \to Y$ را بالاپیوسته گوییم، اگر برای هر $x \in X$ و هر مجموعه‌ی باز V در Y شامل $f(x)$، مجموعه‌ی باز U در X شامل x موجود باشد که $f(int(clU)) \subseteq V$ [۴]. زیرمجموعه‌ای از یک فضای توپولوژی که در آن فضا هم باز و هم بسته باشد، یک مجموعه‌ی بستباز نامیده می‌شود.

نگاشت f را بستباز پیوسته (cl- بالا پیوسته) گوییم، اگر برای هر $x \in X$ و هر مجموعه‌ی باز V در Y شامل $f(x)$، مجموعه‌ی بستباز U در X شامل x موجود باشد که $f(U) \subseteq V$ [۷].

نقطه‌ی $x \in X$ را یک نقطه‌ی cl_بستاری مجموعه‌ی A در فضای X گوییم، اگر هر مجموعه‌ی بستباز شامل x با A اشتراک ناتهی داشته باشد. مجموعه‌ی شامل تمام نقاط cl- بستاری مجموعه‌ی A در فضای X را cl-بستار A گوییم و با $[A]_{cl}$ در[۵] ($cls_X A$ در [۱]) نشان می‌دهیم. گوییم A یک مجموعه‌ی cl-بسته است، اگر $A = cls\,A$. متمم یک مجموعه‌ی cl- بسته، یک مجموعه‌ی cl-باز نامیده می‌شود. بنابراین A یک مجموعه‌ی cl-باز است اگر و تنها اگر A اجتماعی از مجموعه‌های بستباز باشد.

نگاشت $f: X \to Y$ را به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته گوییم، اگر برای هر $x \in X$ و هر مجموعه‌ی باز V در Y شامل $f(x)$، مجموعه‌ی باز U در X شامل x موجود باشد که $f(clsU) \subseteq V$ [۸].

۲- نگاشت‌های به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته

در این بخش پس از معرفی نگاشت‌های به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته و توصیف این نگاشت‌ها به بررسی حلقه‌ی نگاشت‌های حقیقی-مقدار به‌طور قوی δ_{cl}- پیوسته روی یک فضای توپولوژی می‌پردازیم.

تعریف ۱: گوییم نگاشت $f: X \to Y$ در نقطه‌ی $x \in X$ به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته است، اگر برای هر مجموعه‌ی باز V در Y شامل $f(x)$، مجموعه‌ی باز U در X شامل x موجود باشد که $f(int(clsU)) \subseteq V$. گوییم f روی X به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته است، اگر در هر $x \in X$ به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته باشد.

کلاس نگاشت‌های به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته شامل کلاس نگاشت‌های به‌طور قوی θ_{cl}-پیوسته است که این کلاس نیز شامل کلاس نگاشت‌های cl_بالا پیوسته می‌باشد. افزون بر آن، کلاس نگاشت‌های به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته مشمول کلاس نگاشت‌های بالا پیوسته است و این کلاس نیز مشمول کلاس نگاشت‌های پیوسته می‌باشد. بدیهی است که اگر X یک فضای صفر-بعدی باشد، تمام این مفاهیم روی نگاشت $f: X \to Y$ با هم معادل هستند.

تعریف ۲: مجموعه‌ی G در فضای X را s_باز منظم گوییم، اگر $G = int(cls\,G)$. متمم یک مجموعه‌ی s-باز منظم را s-بسته منظم می‌نامیم.

به راحتی می‌توان مشاهده نمود که برای هر مجموعه‌ی A در فضای X، $int(cls\,A)$ یک مجموعه‌ی s-باز منظم است. بدیهی است که هر مجموعه‌ی بستباز، s-باز منظم و هر مجموعه‌ی s-باز منظم، باز منظم است، اما عکس این گزاره‌ها درست نیست. مثال زیر این مطلب را نشان می‌دهد.

مثال۱: فرض کنیم $X = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{n}: \quad n \in \mathbb{N}\right\}$ با توپولوژی زیرفضایی $\mathbb{R}$ باشد و قرار می‌دهیم $U = (-\infty, 0)$. در این صورت U مجموعه‌ی s_ باز منظمی است که بستباز نیست. در $\mathbb{R}$ با

توپولوژی معمولی، هر بازه‌ی باز به صورت (a,b) که $a,b\in\mathbb{R}$، مجموعه‌ی باز منظمی است که s_باز منظم نیست.

تعریف ۳: مجموعه‌ی باز U در فضای X را δ_{cl} -باز گوییم، اگر برای هر $x\in U$ مجموعه‌ی s-باز منظم G موجود باشد که $x\in G\subseteq U$. متمم یک مجموعه‌ی δ_{cl}-باز را δ_{cl}-بسته گوییم.

تعریف ۴: نقطه‌ی x را یک نقطه‌ی δ_{cl}-بستاری A در فضای X گوییم، اگر هر مجموعه‌ی s-باز منظم U شامل x با A اشتراک ناتهی داشته باشد. مجموعه‌ی شامل تمام نقاط δ_{cl}-بستاری A را δ_{cl} -بستار A گوییم و با $cl_{\delta_{cl}}A$ نشان می‌دهیم. مجموعه‌ی شامل تمام نقاطی مانند $x\in A$ که A شامل یک مجموعه‌ی s-باز منظم شامل x باشد را δ_{cl}-درون A گوییم و با $int_{\delta_{cl}}A$ نشان می‌دهیم. به‌آسانی می‌توان نشان داد که خانواده‌ی تمام مجموعه‌های δ_{cl}-باز در یک فضای (X,τ) یک توپولوژی روی X است که با $\tau_{\delta_{cl}}$ نشان داده می‌شود. فضای $(X,\tau_{\delta_{cl}})$ را با $X_{\delta_{cl}}$ نشان می‌دهیم.

در قضیه‌ی زیر به توصیف نگاشت‌های به‌طور قوی δ_{cl}- پیوسته می‌پردازیم و به دلیل سادگی از اثبات آن صرف‌نظر می‌کنیم.

قضیه ۱: گزاره‌های زیر برای نگاشت $f:X\to Y$ معادل‌اند.

(۱) f به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته است.

(۲) برای هر $x\in X$ و هر مجموعه‌ی باز V در Y شامل $f(x)$، مجموعه‌ی s_باز منظم U در X شامل x وجود دارد که $f(U)\subseteq V$.

(۳) اگر $S\subseteq Y$ یک عضو زیرپایه باشد، آن‌گاه $f^{-1}(S)$ یک مجموعه‌ی δ_{cl}-باز است.

(۴) اگر $V\subseteq Y$ باز باشد، آن‌گاه $f^{-1}(V)$ یک مجموعه‌ی δ_{cl}-باز است.

(۵) اگر $B\subseteq Y$ بسته باشد، آن‌گاه $f^{-1}(B)$ یک مجموعه‌ی δ_{cl} -بسته است.

نتیجه ۱: گزاره‌های زیر برای نگاشت $f:X\to Y$ معادل‌اند.

(۱) f به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته است.

(۲) برای هر $A\subseteq X$ داریم:

$$f(cl_{\delta_{cl}}A)\subseteq cl\, f(A).$$

(۳) برای هر $B\subseteq Y$ داریم:

$$cl_{\delta_{cl}}\left(f^{-1}(B)\right)\subseteq f^{-1}(cl\, B).$$

(۴) برای هر $B\subseteq Y$ داریم:

$$f^{-1}(int\, B)\subseteq int_{\delta_{cl}}(f^{-1}(B)).$$

برای هر نگاشت $f:X\to Y$، نگاشت $f_{\delta_{cl}}:X_{\delta_{cl}}\to Y$ را برای هر $x\in X$ به‌صورت $f_{\delta_{cl}}(x)=f(x)$ تعریف می‌کنیم. با توجه به این که δ_{cl}-باز بودن یک مجموعه در X با باز بودن آن مجموعه در $X_{\delta_{cl}}$ معادل است و با استفاده از قضیه ۱، نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود.

نتیجه ۲: نگاشت $f:X\to Y$ به‌طور قوی δ_{cl}- پیوسته است اگر و تنها اگر $f_{\delta_{cl}}:X_{\delta_{cl}}\to Y$ پیوسته باشد.

تعریف ۵: فضای X را یک δ_{cl} -فضا گوییم، اگر هر مجموعه‌ی باز در آن، δ_{cl}-باز باشد.

در صورتی که دامنه‌ی یک نگاشت، یک δ_{cl}-فضا باشد، پیوستگی و به‌طور قوی δ_{cl}-پیوستگی آن با هم معادل هستند. قضیه‌ی زیر بیان می‌کند که ویژگی δ_{cl} -فضا بودن، یک ویژگی توپولوژی است.

قضیه ۲: اگر $f:X\to Y$ یک همسانریختی و X یک δ_{cl}-فضا باشد، آن‌گاه Y یک δ_{cl} -فضا است.

برهان: فرض کنیم V مجموعه‌ی بازی در Y باشد و $f(x_0)=y_0\in V$. در این صورت مجموعه‌ی باز U در X شامل x_0 وجود دارد که $int(clsU)\subseteq f^{-1}(V)$.

پس $y_0 \in f(int(clsU)) \subseteq V$ و از آن‌جا که f یک همسانریختی است،

$$f(int(clsU)) = int(cls f(U))$$

که نتیجه می‌دهد $y_0 \in int(cls f(U)) \subseteq V$. بنابراین V یک مجموعه‌ی δ_{cl}-باز و Y یک δ_{cl}-فضاست.

فضای X را نیم-منظم گوییم، اگر برای هر $x \in X$ و هر مجموعه‌ی باز U شامل x، مجموعه‌ی باز V شامل x موجود باشد که $V \subseteq int(clV) \subseteq U$ [۹]. بدیهی است که هر δ_{cl}-فضا، نیم-منظم است، اما عکس آن لزوماً درست نیست. فضای $\mathbb{R}$ با توپولوژی معمولی نمونه‌ای از یک فضای نیم-منظم است که δ_{cl}-فضا نیست.

گزاره۱: فضای (X,τ) یک δ_{cl}-فضاست اگر و تنها اگر هر نگاشت پیوسته‌ی $f:(X,\tau) \to (Y,\sigma)$ به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته باشد.

برهان: ($\Leftarrow$) بدیهی است.

($\Rightarrow$) قرار می‌دهیم $(Y,\sigma) = (X,\tau)$. بنا به فرض، نگاشت همانی i روی X به‌طوری قوی δ_{cl}-پیوسته است. پس اگر U در X باز باشد، آنگاه $i^{-1}(U)$ و در نتیجه U یک مجموعه‌ی δ_{cl}-باز خواهد بود و در نتیجه X یک δ_{cl}-فضاست.

در ادامه رفتار نگاشت‌های به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته روی شبه مؤلفه‌های همبندی دامنه‌ی آن‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد. قبل از آن، به بیان برخی از مفاهیم مورد نیاز می‌پردازیم. اجتماع تمام مجموعه‌های همبند شامل نقطه‌ی x در فضای X را مؤلفه‌ی همبندی x می‌نامیم و با C_x نشان می‌دهیم[۱۰]. اشتراک تمام مجموعه‌های بستباز شامل x را شبه‌مؤلفه‌ی همبندی x می‌نامیم و با Q_x نشان می‌دهیم[۱۰]. فضای X را به‌طور ضعیف همبند موضعی گوییم، اگر هر $x \in X$ دارای یک همسایگی همبند باشد؛ به عبارت دیگر، هر مؤلفه‌ی همبندی X باز باشد [۱۱]. بدیهی است که اگر X به‌طور ضعیف همبند موضعی باشد، آن‌گاه برای هر $x \in X$، $C_x = Q_x$.

مشابه گزاره ۱.۲ در [۱۲] می‌توان گزاره‌ی زیر را اثبات نمود.

گزاره ۲: فرض کنیم X یک فضای به‌طور ضعیف همبند موضعی و $f: X \to Y$ یک نگاشت به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته باشد. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند.

(۱) برای هر $x \in X$، $f(Q_x) \subseteq Q_{f(x)}$.

(۲) اگر Y یک T_1-فضا باشد، آن‌گاه برای هر $x \in X$، $f(Q_x) = \{f(x)\}$.

(۳) اگر f یک به یک و Y یک T_1-فضا باشد، آن‌گاه X کاملاً ناهمبند است.

نتیجه ۳: اگر X همبند و $f: X \to Y$ یک نگاشت به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته باشد، آن‌گاه f ثابت است.

حلقه‌ی تمام نگاشت‌های حقیقی-مقدار پیوسته را با $C(X)$ نشان می‌دهیم. برای مشاهده‌ی مفاهیم و خواص مربوط به این حلقه به [۱۳] مراجعه شود. زیرحلقه‌ی $C(X)$ شامل تمام نگاشت‌های حقیقی-مقدار به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته را با $S_{\delta_{cl}}(X)$ نشان می‌دهیم. اگر $X = \mathbb{R}$ با توپولوژی معمولی باشد، آنگاه $S_{\delta_{cl}}(X) \neq C(X)$؛ زیرا، نگاشت همانی روی X نمونه‌ای از یک نگاشت پیوسته است که به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته نیست. قضیه‌ی زیر که مشابه قضیه ۲ در [۸] به اثبات می‌رسد، شرایط معادل با تساوی این دو حلقه را بیان می‌کند.

قضیه ۳: اگر X یک δ_{cl}-فضا باشد، آن‌گاه $C(X) = S_{\delta_{cl}}(X)$. برعکس، اگر $C(X) = S_{\delta_{cl}}(X)$ و X کاملاً منظم باشد، آن‌گاه X یک δ_{cl}-فضا است.

قضیه ۴: فرض کنیم X یک فضای به‌طور ضعیف همبند موضعی باشد، در این صورت نگاشت

$f:X\to Y$ به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته است اگر و تنها اگر f یک نگاشت cl-بالا پیوسته باشد.

برهان: هر نگاشت cl-بالا پیوسته، به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته است. برعکس، فرض کنیم f به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته باشد. همچنین فرض کنیم $x\in X$ و V مجموعه‌ی بازی در Y شامل $f(x)$ باشد. چون f به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته است، مجموعه‌ی باز U در X شامل x وجود دارد که $f(int(clsU))\subseteq V$. از آن‌جا که $x\in clsU$، پس $Q_x\subseteq clsU$ و چون X به‌طور ضعیف همبند موضعی است، $Q_x=intQ_x\subseteq int(clsU)$. بنابراین $f(Q_x)\subseteq V$ و در نتیجه f یک نگاشت cl-بالاپیوسته است. با استفاده از قضیه ۴ و انجام مراحل اثبات قضیه ۳ .۱ در [۱۲]، قضیه‌ی زیر بدست می‌آید.

قضیه ۵: برای هر فضای به‌طور ضعیف همبند موضعی X، فضای گسسته‌ی Y وجود دارد که $C(Y)\cong S_{\delta_{cl}}(X)$.

۳- ویژگی‌های اساسی نگاشت‌های به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته

بدیهی است که اگر $f:X\to Y$ یک نگاشت به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته و Z فضایی باشد که $Y\subseteq Z$ یا $f(X)\subseteq Z\subseteq Y$، آن‌گاه $f:X\to Z$ به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته است. افزون بر آن، بنا به نتیجه ۲، اگر $f:X\to Y$ به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته و $g:Y\to Z$ پیوسته باشد، آن‌گاه $gof:X\to Z$ به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته است.

تعریف۶ : گوییم $f:X\to Y$ یک نگاشت δ_{cl}-باز (δ_{cl} - بسته) است، اگر نگاره‌ی هر مجموعه‌ی δ_{cl}-باز (δ_{cl}-بسته) در X یک مجموعه‌ی باز (بسته) باشد.

گزاره ۳: فرض کنیم $f:X\to Y$ یک نگاشت δ_{cl}-باز، به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته و پوشا و $g:Y\to Z$ یک نگاشت باشد. در این صورت gof به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته است اگر و تنها اگر g پیوسته باشد. همچنین، اگر نگاره‌ی هر مجموعه‌ی δ_{cl}-باز در X تحت f، یک مجموعه‌ی δ_{cl}-باز باشد، آن‌گاه g به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته است.

برهان: مشابه گزاره ۲ در [۸] اثبات می‌شود.

تعریف ۷: نگاشت $f:X\to Y$ را δ_{cl}-تقریباً پیوسته گوییم، اگر برای هر $x\in X$ و هر مجموعه‌ی باز V در Y شامل $f(x)$، مجموعه‌ی باز U در X شامل x موجود باشد که $f(U)\subseteq int(clsV)$.

دو گزاره‌ی زیر به‌آسانی قابل اثبات هستند و به همین دلیل از ذکر آنها صرف‌نظر می‌شود.

گزاره ۴: نگاشت $f:X\to Y$، δ_{cl}-تقریباً پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر مجموعه‌ی δ_{cl}-باز V در Y، مجموعه‌ی $f^{-1}(V)$ در X باز باشد.

گزاره ۵: فرض کنیم $f:X\to Y$ یک نگاشت δ_{cl}-تقریباً پیوسته و $g:Y\to Z$ به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته باشد، در این صورت gof پیوسته است.

اگر $f:X\to Y$ یک نگاشت δ_{cl}-تقریباً پیوسته و $gof:X\to Z$ پیوسته باشد، آن‌گاه نمی‌توان نتیجه گرفت که $g:Y\to Z$ به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته است. مثال زیر گویای این مطلب است.

مثال۲: (مثال ۲.۲در[۴]) فرض کنیم $X=\mathbb{R}$ و τ_1 توپولوژی متمم شمارا روی X باشد. قرار می‌دهیم $Y=\{a,b\}$و فرض‌کنیم $\tau_2=\{\phi,\{a\},Y\}$ توپولوژی روی آن باشد. همچنین فرض کنیم $Z=\{1,2\}$و توپولوژی $\tau_3=\{\phi,\{2\},Z\}$ را روی آن قرار می‌دهیم. نگاشت $f:X\to Y$ را برای هر $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ به صورت $f(x)=a$ و برای هر $x\in\mathbb{Q}$ به صورت $f(x)=b$ تعریف می‌کنیم. نگاشت $g:Y\to Z$ را به صورت $g(a)=2$ و $g(b)=1$ تعریف می‌کنیم. در این صورت f یک نگاشت δ_{cl}-تقریباً پیوسته و $gof:X\to Z$ پیوسته است، اما g به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته نمی‌باشد.

تعریف ۸: گوییم مجموعه‌ی Y در فضای X، δ_{cl}- نشانده است، اگر برای هر مجموعه‌ی s-باز منظم G در Y، مجموعه‌ی s-باز منظم H در X موجود باشد که $G=H\bigcap Y$.

به‌آسانی مشاهده می‌شود که مجموعه‌ی Y در فضای X، δ_{cl}-نشانده است اگر و تنها اگر برای هر مجموعه‌ی δ_{cl}-باز (δ_{cl}-بسته) V در Y، مجموعه‌ی δ_{cl}-باز (δ_{cl}-بسته) U در X موجود باشد که $V=U\bigcap Y$.

لم ۱: هر زیرمجموعه‌ی بستباز فضای X در X، δ_{cl}- نشانده است.

برهان: فرض کنیم Y یک مجموعه‌ی بستباز در X و V یک مجموعه‌ی s_باز منظم در Y باشد. ازآن‌جا که Y در X باز است،

$$int_X(cls_YV)=int_Y(cls_YV).$$

چون Y بستباز است، $cls_YV=cls_XV\bigcap Y$ و در نتیجه $int_X(cls_XV\bigcap Y)=int_Y cls_YV$.

بنابراین

$$Y\bigcap int_X(cls_XV)=int_Y(cls_YV)$$

و از آن‌جا که برای هر مجموعه‌ی A در X، $int_X(cls_XA)$ یک مجموعه‌ی s_باز منظم در X است، اثبات کامل می‌شود.

قضیه ۶: گزاره‌های زیر برای نگاشت $f:X\rightarrow Y$ برقرارند.

(۱) اگر f به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته و $A\subseteq X$ بستباز باشد، آن‌گاه $f|_A$ به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته است.

(۲) فرض کنیم $X=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}U_\alpha$ که هر U_α یک مجموعه‌ی δ_{cl}-باز و δ_{cl}-نشانده در X است و برای هر $\alpha\in\Lambda$، قرار می‌دهیم $f_\alpha=f|_{U_\alpha}$. اگر هر f_α به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته باشد، آن‌گاه f به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته است.

(۳) فرض کنیم $X=\bigcup_{i=1}^{i=n}F_i$ که هر F_i یک مجموعه‌ی δ_{cl}-بسته و δ_{cl}-نشانده در X است و برای هر $1\le i\le n$ قرار می‌دهیم $f_i=f|_{F_i}$. اگر هر f_i به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته باشد، آن‌گاه f به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته است.

برهان: (۱) فرض کنیم V مجموعه‌ی بازی در Y باشد. چون f به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته است، بنا به قضیه۱، $f^{-1}(V)=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}S_\alpha$، که هر S_α یک مجموعه‌ی s-باز منظم در X است. پس

$$(f|_A)^{-1}(V)=f^{-1}(V)\bigcap A=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}\left(S_\alpha\bigcap A\right)$$

از طرفی

$$S_\alpha\cap A=\left(int_XS_\alpha\right)\cap\left(int_XA\right)=int_X\left(S_\alpha\cap A\right)$$

$$\subseteq int_X(cls_X\left(S_\alpha\cap A\right))\subseteq int_X\left(cls_XS_\alpha\cap cls_XA\right)$$

$$=\left(int_X(cls_XS_\alpha)\right)\cap A$$
$$=S_\alpha\cap A$$

بنابراین

$$int_X(cls_X(S_\alpha\cap A))=S_\alpha\cap A$$

و در نتیجه هر $S_\alpha\cap A$ یک مجموعه‌ی s-باز منظم در X است. حال بنا به اثبات لم ۱ داریم:

$$A\cap int_X(cls_X(S_\alpha\cap A))=int_A(cls_A(S_\alpha\cap A))$$

بنابراین

$$S_\alpha\cap A=\mathrm{int}_A cls_A(S_\alpha\cap A)$$

و در نتیجه هر $S_\alpha\cap A$ یک مجموعه‌ی s-باز منظم در A است که نشان می‌دهد $(f|_A)^{-1}(V)$ یک مجموعه‌ی δ_{cl}-باز در A است.

(۲) فرض کنیم V مجموعه‌ی بازی در Y باشد. از آنجا که هر f_α به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته است، بنا به قضیه ۱، هر $f_\alpha^{-1}(V)$ در U_α، δ_{cl}-باز است. چون هر U_α در X، δ_{cl}- نشانده و δ_{cl}-باز است، هر $f_\alpha^{-1}(V)$ در X، δ_{cl}-باز است. داریم

$f^{-1}(V)=\bigcup_{\alpha\in\Lambda} f_\alpha^{-1}(V)$، پس $f^{-1}(V)$ اجتماعی از مجموعه‌های δ_{cl}-باز و در نتیجه خود نیز δ_{cl}-باز می‌باشد. پس بنا به قضیه ۱، f به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته است.

(۳) اثبات مشابه بند (۲) است.

قضیه ۷: فرض کنیم $\{X_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ خانواده‌ای از فضاهای توپولوژی باشد، در این صورت $f: X\to\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$ به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر $\alpha\in\Lambda$، $\pi_\alpha of$ به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته باشد.

برهان: با استفاده از نتیجه ۲ و قضایای مشابه در پیوستگی حاصل می‌شود.

نتیجه ۴: فرض کنیم $f: X\to Y$ یک نگاشت باشد. نگاشت نموداری آن، $f_G: X\to X\times Y$ با ضابطه‌ی $f_G(x)=(x,f(x))$ به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته است اگر و تنها اگر f به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته و X یک δ_{cl}-فضا باشد.

نکته ۱: شرط δ_{cl}-بودن فضای X در نتیجه ۴، ضروری است. به عنوان مثال، فرض کنیم $X=\mathbb{R}$ با توپولوژی معمولی و $Y=\mathbb{R}$ با توپولوژی بدیهی باشد. در این صورت هر نگاشت $f: X\to Y$ به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته است، در حالی که f_G به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته نیست.

قضیه ۸: فرض کنیم $\{f_\alpha: X_\alpha\to Y_\alpha \mid \alpha\in\Lambda\}$ خانواده‌ی از نگاشت‌ها باشد و $f:\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha\to\prod_{\alpha\in\Lambda} Y_\alpha$ به‌صورت $f((x_\alpha))=(f_\alpha(x_\alpha))$ تعریف شده باشد. در این صورت گزاره‌های زیر برقرارند:

(۱) اگر هر f_α به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته باشد، آن‌گاه f به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته است.

(۲) اگر f پیوسته و هر X_α یک δ_{cl}-فضا باشد، آن‌گاه هر f_α به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته است.

برهان: (۱) ابتدا توجه می‌کنیم که اگر $\beta\in\Lambda$ و $A_\beta\subseteq X_\beta$، آن‌گاه

$$int(cls(A_\beta\times\prod_{\alpha\neq\beta} X_\alpha))\subseteq(int(cls\,A_\beta))\times\prod_{\alpha\neq\beta} X_\alpha$$

که نتیجه می‌شود، اگر A_β در X_β، δ_{cl}-باز باشد، آن‌گاه $A_\beta\times\prod_{\alpha\neq\beta} X_\alpha$ در $\prod_{\alpha\in\Lambda} X_\alpha$، δ_{cl}-باز است.

حال فرض کنیم هر f_α به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته و V یک عضو زیرپایه در $\prod_{\alpha\in\Lambda} Y_\alpha$ باشد. پس $\beta\in\Lambda$ و مجموعه‌ی باز V_β در Y_β وجود دارند که $V=V_\beta\times\prod_{\alpha\neq\beta} Y_\alpha$. پس بنا به قضیه ۱، $f_\beta^{-1}(V_\beta)$ در X_β، δ_{cl}-باز است. از آن‌جا که $f^{-1}(V)=f_\beta^{-1}(V_\beta)\times\prod_{\alpha\neq\beta} X_\alpha$، نتیجه می‌گیریم که $f^{-1}(V)$ در $\prod_{\alpha\neq\beta} X_\alpha$، δ_{cl}- باز است و بنا به قضیه ۱، f به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته است.

(۲) با استفاده از گزاره‌ی بیان شده در اثبات بند (۱) به‌آسانی اثبات می‌شود.

قضیه‌ی زیر برای بیان نتیجه‌ی بعد مورد نیاز است، قضیه ۲ در [۱۴] را ببینید.

قضیه ۹: فرض کنیم X و Y در فضای توپولوژی باشند که حداقل یکی از آن‌ها فشرده است. اگر C مجموعه‌ی بستبازی در $X\times Y$ شامل $(x,y)\in X\times Y$ باشد، آن‌گاه مجموعه‌ی بستباز U در X شامل x و مجموعه‌ی بستباز V در Y شامل y وجود دارند که $U\times V\subseteq C$.

لم ۲: فرض کنیم X و Y دو فضای توپولوژی باشند که حداقل یکی از آن‌ها فشرده است. در این صورت $A_1\subseteq X_1$ و $A_2\subseteq X_2$ مجموعه‌هایی δ_{cl}-باز هستند اگر و تنها اگر $A_1\times A_2$ یک مجموعه‌ی δ_{cl}-باز در $X_1\times X_2$ باشد.

برهان: اگر A_1 در X_1 و A_2 در X_2 هردو δ_{cl}-باز باشند،آن‌گاه بنا به گزاره‌ی بیان شده در اثبات

بند (۱) قضیه ۸، $A_1 \times X_2$ ، $X_1 \times A_2$ و در نتیجه $A_1 \times A_2$ دو مجموعه‌ی δ_{cl}-باز در $X_1 \times X_2$ خواهند بود. حال با استفاده از قضیه ۹ می‌توان ثابت کرد که برای هر $B_1 \subseteq X_1$ و $B_2 \subseteq X_2$

$$cls(B_1 \times B_2) = cls\, B_1 \times cls\, B_2$$

و در نتیجه

$$int(cls(B_1 \times B_2)) = (int(cls\, B_1)) \times (int(cls\, B_2))$$

با استفاده از آن، اگر $A_1 \times A_2$ ، در $X_1 \times X_2$ ، δ_{cl} - باز باشد، آن‌گاه A_1 در X_1 و A_2 در X_2 ، δ_{cl}-باز خواهند بود.

قضیه ۱۰: فرض کنیم برای هر $i \in \{1,2\}$، $f_i : X_i \to Y_i$ یک نگاشت باشد و نگاشت $f : X_1 \times X_2 \to Y_1 \times Y_2$ به‌صورت $f((x_1, x_2)) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$ تعریف شده باشد. اگر حداقل یکی از دو فضای X_1 یا X_2 فشرده و f به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته باشد، آن‌گاه هر f_i به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته است.

برهان: با استفاده از لم ۲ ثابت می‌شود.

۴- نگاشت‌های به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته و خواص توپولوژی

در این بخش رفتار نگاشت‌های به‌طور قوی δ_{cl} - پیوسته و δ_{cl} - همسانریختی‌ها در ارتباط با خواص توپولوژی جدیدی که با استفاده از مجموعه‌های s - باز منظم ساخته می‌شوند، مورد توجه قرار می‌گیرند.

قضیه ۱۱: اگر $f : X \to Y$ یک نگاشت به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته، باز و دوسویی باشد، آن‌گاه X و Y دو δ_{cl}-فضای همسانریخت هستند.

برهان: فرض کنیم U مجموعه‌ی بازی در X باشد و $x \in U$. چون f به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته است، بنا به قضیه ۱، مجموعه‌ی s-باز منظم G در X شامل x وجود دارد که $f(G) \subseteq f(U)$. در نتیجه

$$x \in f^{-1}(f(G)) \subseteq f^{-1}(f(U))$$

و از آن‌جا که f پوشاست، $x \in G \subseteq U$ و در نتیجه U یک مجموعه‌ی δ_{cl}- باز و X یک δ_{cl} - فضاست. پس بنا به قضیه ۲، Y یک δ_{cl} - فضاست.

تعریف ۹: فرض کنیم X یک فضای توپولوژی باشد. در این صورت X یک

(۱) $\delta_{cl}T_1$-فضاست، اگر برای هر دو نقطه‌ی متمایز $x, y \in X$ ، مجموعه‌های s-باز منظم U و V موجود باشند که $x \in U$ ، $y \notin U$ و $y \in V$ ، $x \notin V$.

(۲) $\delta_{cl}T_2$-فضاست ، اگر برای هر دو نقطه‌ی متمایز $x, y \in X$ ، مجموعه‌های s-باز منظم و مجزای U و V موجود باشند که $x \in U$ و $y \in V$.

(۳) δ_{cl}-منظم است، اگر برای هر مجموعه‌ی s - بسته منظم F و هر $x \in X$ که $x \notin F$ ، مجموعه‌های باز و مجزای U و V موجود باشند که $x \in U$ و $F \subseteq V$.

(۴) δ_{cl}-کاملاً منظم است، اگر برای هر مجموعه‌ی s-بسته منظم F و هر $x \in X$ که $x \notin F$ ، نگاشت پیوسته $f : X \to [0,1]$ موجود باشد که $f(x) = 0$ و $f(F) = \{1\}$.

بدیهی است که X یک $\delta_{cl}T_1$-فضا ($\delta_{cl}T_2$-فضا) است اگر و تنها اگر $X_{\delta_{cl}}$ یک T_1-فضا (T_2-فضا) باشد. اثبات دو قضیه‌ی بعد آسان است و به همین دلیل از ذکر آن صرف‌نظر می‌شود.

قضیه ۱۲: فرض کنیم $f : X \to Y$ یک نگاشت به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته و یک به یک باشد. اگر Y یک T_1-فضا (T_2-فضا) باشد، آن‌گاه X یک $\delta_{cl}T_1$ - فضا ($\delta_{cl}T_2$-فضا) است.

قضیه ۱۳: فرض کنیم $f : X \to Y$ یک نگاشت به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته، باز و پوشا باشد. اگر X یک فضای δ_{cl}- منظم باشد، آن‌گاه X و Y دو فضای منظم همسانریخت هستند.

تعریف ۱۰: نگاشت دوسویی $f : X \to Y$ را یک δ_{cl}- همسانریختی گوییم اگر f و f^{-1} به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته باشند.

قضیه ۱۴: اگر $f:X\to Y$ یک همسانریختی و Y یک δ_{cl} -فضا باشد، آنگاه f یک δ_{cl} -همسانریختی است.

برهان: فرض کنیم $x\in X$ و V مجموعه‌ی بازی در Y شامل $f(x)$ باشد. از آن‌جا که Y یک δ_{cl} - فضاست، مجموعه‌ی باز W در Y شامل $f(x)$ وجود دارد که

$$f(x)\in int(clsW)\subseteq V$$

قرار می‌دهیم $U=f^{-1}(W)$. در این صورت $x\in U$ و چون f یک همسانریختی است،

$$\begin{aligned} f\left(int(clsU)\right) &= f\left(int(cls\, f^{-1}(W))\right)\\ &= f\left(int(f^{-1}(clsW))\right)\\ &= int\left(f(f^{-1}(clsW))\right)\\ &= int(clsW)\subseteq V \end{aligned}$$

بنابراین f به‌طور قوی δ_{cl} -پیوسته است. به همین ترتیب و با توجه به این که f^{-1} یک همسانریختی و بنا به قضیه ۲، X یک δ_{cl} -فضاست، ثابت می‌شود که f^{-1} به‌طور قوی δ_{cl} -پیوسته است.

قضیه ۱۵: اگر X یک فضای δ_{cl} -کاملاً منظم و $f:X\to Y$ یک δ_{cl} -همسانریختی باشد، آن‌گاه X و Y دو فضای کاملاً منظم همسانریخت هستند.

برهان: فرض کنیم $x\in X$ و F مجموعه‌ای بسته در Y باشد که $y=f(x)\notin F$. چون f به‌طور قوی δ_{cl} -پیوسته است، پس بنا به قضیه ۱، $f^{-1}(F)=\bigcap_{\alpha\in\Lambda}C_\alpha$ که هر C_α یک مجموعه‌ی s -بسته منظم در X است و از آن‌جا که $x\notin f^{-1}(F)$، یک $\alpha\in\Lambda$ وجود دارد که $x\notin C_\alpha$. بنابراین نگاشت پیوسته‌ی $g:X\to[0,1]$ وجود دارد که $g(x)=0$ و $g(C_\alpha)=\{1\}$. حال نگاشت $gof^{-1}:Y\to[0,1]$ نگاشتی پیوسته است که $(gof^{-1})(y)=0$ و $(gof^{-1})(F)=\{0\}$.

نگاشت $f:X\to Y$ را z -بالاپیوسته گوییم، اگر برای هر $x\in X$ و هر مجموعه‌ی باز V در Y شامل $f(x)$، متمم صفر-مجموعه‌ی U شامل x در X موجود باشد که $f(U)\subseteq V$ [۲]. قضیه‌ی زیر ارتباط میان نگاشت های به طورقوی δ_{cl} - پیوسته و نگاشت های z -بالاپیوسته را بیان می‌کند.

قضیه۱۶: اگر $f:X\to Y$ یک نگاشت به طور قوی δ_{cl} - پیوسته و X یک فضای δ_{cl} -کاملاًمنظم باشد، آن‌گاه f ، z -بالاپیوسته است.

برهان: فرض کنیم $x\in X$ و V مجموعه‌ی بازی در Y شامل $f(x)$ باشد. چون f به طور قوی δ_{cl} - پیوسته است، مجموعه‌ی s -باز منظم U شامل x وجود دارد که $f(U)\subseteq V$ و بنا به δ_{cl} - کاملاًمنظم بودن X ، تابع پیوسته‌ی $h:X\to[0,1]$ وجود دارد که $h(x)=0$ و $h(X\setminus U)=\{1\}$. قرار می‌دهیم $G=h^{-1}([0,1))$. در این صورت G متمم صفر-مجموعه‌ای شامل x است که $f(G)\subseteq V$ که نتیجه می‌دهد f یک نگاشت z - بالاپیوسته است.

تعریف ۱۱: فضای X را δ_{cl} -فشرده گوییم، اگر برای هر پوشش باز $\{U_\alpha:\alpha\in\Lambda\}$ برای X زیرخانواده‌ی متناهی $\{U_{\alpha_i}:i=1,\dots,n\}$ موجود باشد که

$$X=\bigcup_{i=1}^{i=n} int(clsU_{\alpha_i}).$$

گوییم مجموعه‌ی Y، δ_{cl} -فشرده در X است، اگر هر پوشش Y با مجموعه‌های باز در X دارای زیرخانواده‌ای متناهی باشد که درون‌های cl _ بستارهای اعضای آن در X پوششی برای Y باشد.

حال به مطالعه‌ی خواص فضاهای δ_{cl} -فشرده می‌پردازیم.

گزاره‌ی زیر به‌آسانی قابل اثبات است.

گزاره ۶: فضای X ، δ_{cl} -فشرده است اگر و تنها اگر هر پوشش δ_{cl} -باز آن دارای زیرپوششی متناهی باشد.

با استفاده از گزاره ۶، می‌توان ثابت کرد که هر زیر فضای s - بسته منظم و δ_{cl}-نشانده از یک فضای δ_{cl}-فشرده، δ_{cl}- فشرده است. افزون بر آن، یک زیرفضای s -بسته منظم از یک فضای δ_{cl}-فشرده‌ی X، δ_{cl}-فشرده در X است.

قضیه‌ی زیر نشان می‌دهد که δ_{cl}-فشردگی یک خاصیت توپولوژی است.

قضیه ۱۷: اگر X یک فضای δ_{cl}-فشرده و $f: X \to Y$ یک همسانریختی باشد، آن‌گاه Y، δ_{cl}-فشرده است.

برهان: فرض کنیم $Y = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} U_\alpha$ که هر U_α در Y باز است. پس $X = \bigcup_{\alpha\in\Lambda} f^{-1}(U_\alpha)$ و از آن‌جا که X یک فضای δ_{cl}-فشرده است، تعداد متناهی $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \Lambda$ وجود دارند که

$$X = \bigcup_{i=1}^{i=n} int_X(cls_X f^{-1}(U_{\alpha_i}))$$

پس

$$Y = f(X) = f\left(\bigcup_{i=1}^{n} int_X(cls_X\ f^{-1}(U_{\alpha_i}))\right)$$

$$= \bigcup_{i=1}^{n} f\left(int_X(cls_X\ f^{-1}(U_{\alpha_i}))\right)$$

چون f پیوسته و باز است داریم:

$$f(int_X(cls_X\ f^{-1}(U_{\alpha_i}))) = int_Y\ f(cls_X\ f^{-1}(U_{\alpha i}))$$

و از آن‌جا که f پیوسته و بسته است،

$$f(cls_X\ f^{-1}(U_{\alpha_i})) = cls_Y(f(f^{-1}(U_{\alpha_i})))$$

بنابراین

$$Y = \bigcup_{i=1}^{n} int_Y(cls_Y U_{\alpha_i})$$

و در نتیجه Y، δ_{cl}-فشرده است.

لم زیر برای اثبات نتایج بعدی در مورد δ_{cl}- فشردگی مورد نیاز است.

لم ۳: فرض کنیم X یک فضای توپولوژی و Y زیرفضای باز آن باشد. در این صورت برای هر مجموعه‌ی A در Y داریم

$$.int_Y(cls_Y A) \subseteq Y \cap int_X(cls_X A)$$

برهان: به راحتی می‌توان نشان داد که برای هر زیرفضای Y از X و هر $A \subseteq Y$،

$$.cls_Y A \subseteq Y \cap cls_X A$$

بنابراین

$$int_Y(cls_Y A) \cap int_X Y = int_X(cls_Y A)$$

و

$$int_X(cls_Y A) \subseteq int_X Y \cap int_X(cls_X A)$$

چون Y در X باز است، $int_X Y = Y$ و در نتیجه

$$int_Y(cls_Y A) \subseteq Y \cap int_X(cls_X A)$$

که همان نتیجه‌ی مطلوب است.

قضیه‌ی زیر با استفاده از لم ۳ اثبات می‌شود.

قضیه ۱۸: فرض کنیم X یک فضای توپولوژی و Y زیرفضای باز آن باشد. گزاره‌های زیر برقرارند.

(۱) اگر Y یک فضای δ_{cl}-فشرده باشد، آن‌گاه Y، δ_{cl}- فشرده در X است.

(۲) اگر A یک مجموعه‌ی δ_{cl}-فشرده در Y باشد، آن‌گاه A، δ_{cl}-فشرده در X است.

در ادامه به ارتباط میان به‌طور قوی δ_{cl}-پیوستگی و δ_{cl}-فشردگی می‌پردازیم.

قضیه ۱۹: اگر X یک فضای δ_{cl}-فشرده و $f: X \to Y$ یک نگاشت به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته و پوشا باشد، آن‌گاه Y فشرده است.

برهان: فرض کنیم $\{V_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ پوشش بازی برای Y باشد. پس بنا به قضیه ۱، $\{f^{-1}(V_\alpha)\}_{\alpha\in\Lambda}$ پوشش δ_{cl}-بازی برای X است و بنا به گزاره ۶، $X = \bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(V_{\alpha_i})$. بنابراین

$$Y = f(\bigcup_{i=1}^{n} f^{-1}(V_{\alpha_i})) = \bigcup_{i=1}^{n}(f f^{-1}(V_{\alpha_i})) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{\alpha_i}$$

که بدین معنی است که Y فشرده است.

نتیجه ۵: اگر $f : X \to Y$ یک نگاشت به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته و A مجموعه‌ای δ_{cl}-فشرده در X باشد، آن‌گاه $f(A)$ فشرده است.

قضیه ۲۰: فرض کنیم X یک فضای δ_{cl}-فشرده و Y یک فضای هاسدورف باشد. اگر $f : X \to Y$ یک نگاشت به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته و یک به یک باشد، آن‌گاه f ، δ_{cl}-باز است.

برهان: فرض کنیم G مجموعه‌ای s-باز منظم در X باشد. در این صورت $X \setminus G$، δ_{cl}-فشرده در X است و بنا به نتیجه ۵، $f(X \setminus G) = Y \setminus f(G)$ مجموعه‌ای فشرده و در نتیجه بسته در Y خواهد بود.

فضای توپولوژی X را نسبتاً پیرافشرده گوییم، اگر هر پوشش آن با مجموعه‌های بازمنظم دارای یک تظریف باز متناهی موضعی باشد[۱۵]. فضاهای s-نسبتاً پیرافشرده مشابه فضاهای نسبتاً پیرافشرده و به صورت زیر تعریف می‌شوند.

تعریف۱۲: فضای توپولوژی X را s-نسبتاً پیرافشرده گوییم، اگر هر پوشش آن با مجموعه‌های s-بازمنظم دارای یک تظریف متناهی موضعی باشد.

به آسانی مشاهده می‌شود که s-نسبتاً پیرافشردگی یک خاصیت توپولوژی است. افزون برآن، هر فضای پیرافشرده، نسبتاً پیرافشرده است. مثال ۱.۱ در [۱۵] نمونه ای از یک فضای نسبتاً پیرافشرده است که پیرافشرده نیست. از آن‌جا که هر مجموعه‌ی s-بازمنظم یک مجموعه‌ی بازمنظم است، نتیجه می‌گیریم که هر فضای نسبتاً پیرافشرده، s-نسبتاً پیرافشرده است.

قضیه۲۱: فرض کنیم $f : X \to Y$ یک نگاشت بسته، δ_{cl}-باز، به طور قوی δ_{cl}-پیوسته و پوشا باشد که برای هر $y \in Y$، $f^{-1}(y)$ فشرده است. اگر X، s-نسبتاً پیرافشرده باشد، آن‌گاه Y پیرافشرده است.

برهان: فرض کنیم $\Psi = \{U_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ پوشش بازی برای Y باشد. چون f به طور قوی δ_{cl}-پیوسته است، $\Im = \{f^{-1}(U_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ پوشش δ_{cl}-بازی برای X است. ازآن‌جا که هر مجموعه‌ی δ_{cl}-باز، اجتماعی از مجموعه‌های s-باز منظم است، پوشش s-بازمنظمی مانند $\Upsilon = \{V_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ برای X وجود داردکه برای هر $\gamma \in \Gamma$، یک $\lambda \in \Lambda$ وجود دارد که $V_\gamma \subseteq f^{-1}(U_\lambda)$. چون X، s-نسبتاً پیرافشرده است، تظریف متناهی موضعی $W = \{W_\delta : \delta \in \Delta\}$ از Υ وجود دارد و از آن‌جا که هر V_γ، s-باز منظم است، می‌توان فرض نمود که هر W_δ، s-باز منظم است. چون f یک نگاشت δ_{cl}-باز است، خانواده‌ی $A = \{f(W_\delta) : \delta \in \Delta\}$ یک تظریف باز Ψ است. برای تکمیل اثبات، کافی است نشان دهیم که A یک خانواده‌ی متناهی موضعی است. برای این منظور، فرض کنیم $y \in Y$. برای هر $x \in f^{-1}(y)$، مجموعه‌ی باز G_x شامل x وجود دارد که حداکثر تعدادی متناهی از اعضای خانواده‌ی W را قطع می‌کند. بنابراین خانواده‌ی $\Phi = \{G_x : x \in f^{-1}(y)\}$ پوشش بازی برای مجموعه‌ی فشرده‌ی $f^{-1}(y)$ است و بنابراین دارای زیرپوششی متناهی مانند $\{G_{x_1}, ..., G_{x_n}\}$ می‌باشد. حال قرارمی‌دهیم $G = \bigcup_{i=1}^{i=n} G_{x_i}$. در این صورت G مجموعه‌ی بازی شامل $f^{-1}(y)$ است که حداکثر تعدادی متناهی از اعضای خانواده‌ی W را قطع می‌کند. چون f بسته است، پس $Y \setminus f(X \setminus G)$ مجموعه‌ی بازی شامل y است که حداکثر تعدادی متناهی از اعضای A را قطع می‌کند که نتیجه می‌دهد A یک خانواده‌ی متناهی موضعی است. بنابراین A یک تظریف باز متناهی موضعی برای Ψ است که نشان می‌دهد Y پیرافشرده است.

۵- نمودار یک نگاشت به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته

در این بخش به بررسی ویژگی‌های نمودارهای نگاشت‌های به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته می‌پردازیم.

تعریف۱۳: گوییم $G(f)$؛ نمودار نگاشت $f: X \to Y$ ، یک نمودار δ_{cl}-بسته نسبت به X است، اگر برای هر $(x,y) \notin G(f)$، مجموعه‌ی باز Uدر X شامل x و مجموعه‌ی باز V در Y شامل y موجود باشند که

$$\left((int(clsU)) \times V\right) \bigcap G(f) = \phi$$

قضیه ۲۲: فرض کنیم $f: X \to Y$ یک نگاشت با نمودار δ_{cl}-بسته نسبت به X باشد. اگر Y فشرده باشد، آن‌گاه f به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته است.

برهان: از آن‌جا که $G(f_{\delta_{cl}})$ در $X_{\delta_{cl}} \times Y$ بسته و Y فشرده است، $f_{\delta_{cl}}$ پیوسته می‌باشد. پس بنا به نتیجه۲، f به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته است.

قضیه ۲۳: اگر $f: X \to Y$ یک نگاشت به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته و Y هاسدورف باشد، آن‌گاه $G(f)$ نموداری δ_{cl}-بسته نسبت به X است.

برهان: بنا به نتیجه۲، $f_{\delta_{cl}}$ پیوسته است و چون Y هاسدورف است، $G(f)$ در $X_{\delta_{cl}} \times Y$ بسته می‌باشد. در نتیجه $G(f)$ یک نمودار δ_{cl}-بسته نسبت به X است.

نتیجه ۶: فرض کنیم Y یک فضای فشرده و هاسدورف باشد. در این صورت نگاشت $f: X \to Y$ به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته است اگر و تنها اگر $G(f)$ یک نمودار δ_{cl}-بسته نسبت به X باشد.

قضیه ۲۴: فرض کنیم $f: X \to Y$ یک نگاشت با نمودار δ_{cl}-بسته نسبت به X باشد. اگر $K \subseteq Y$ فشرده باشد، آن‌گاه $f^{-1}(K)$ یک مجموعه‌ی δ_{cl}- بسته در X است.

برهان: فرض کنیم $x \in X$ و $x \notin f^{-1}(K)$. در این صورت برای هر $y \in K$ ، $(x,y) \notin G(f)$ از آن‌جا که $G(f)$ در $X_{\delta_{cl}} \times Y$ بسته است، مجموعه‌ی باز U_y در $X_{\delta_{cl}}$ شامل x و مجموعه‌ی باز V_y در Y شامل y وجود دارند که

$$(U_y \times V_y) \bigcap G(f) = \phi$$

حال خانواده‌ی $\{V_y : y \in K\}$ پوشش بازی برای K است که بنا به فشردگی K، تعداد متناهی $y_1, \ldots, y_n \in K$ وجود دارند که $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{y_i}$. قرار می‌دهیم $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_{y_i}$. در این صورت U مجموعه‌ی بازی در $X_{\delta_{cl}}$ شامل xاست که $f(U) \bigcap K = \phi$ و درنتیجه $U \subseteq X_{\delta_{cl}} \setminus f^{-1}(K)$ که نشان می‌دهد $f^{-1}(K)$ در X ، δ_{cl}-بسته است.

۶-توپولوژی δ_{cl}-خارج قسمتی و فضاهای δ_{cl}-خارج قسمتی

در این بخش به معرفی توپولوژی δ_{cl}-خارج قسمتی و ارتباط آن با نگاشت‌های به طور قوی δ_{cl}-پیوسته می‌پردازیم.

تعریف۱۴: فرض کنیم X یک فضای توپولوژی، Y یک مجموعه و $p: X \to Y$ یک نگاشت پوشا باشد. خانواده‌ی شامل تمام مجموعه‌های $A \subseteq Y$ که $p^{-1}(A)$ یک مجموعه‌ی δ_{cl}-باز در X است را توپولوژی δ_{cl}-خارج قسمتی روی Y می‌نامیم. نگاشت p را یک نگاشت δ_{cl}- خارج قسمتی گوییم و Y با توپولوژی δ_{cl}-خارج قسمتی یک فضای δ_{cl}-خارج قسمتی نامیده می‌شود.

مثال۳: فرض کنیم $X = Y = \mathbb{N}$ و توپولوژی متمم متناهی را روی X در نظر می‌گیریم. در این صورت توپولوژی δ_{cl}- خارج قسمتی القا شده توسط نگاشت همانی $i: X \to Y$ روی Y همان توپولوژی بدیهی است.

قضیه‌ی زیر به سادگی اثبات می‌شود و در برهان قضیه ۲۶ به کار می‌آید.

قضیه۲۵: فرض کنیم $p: (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ یک نگاشت پوشا و τ_2 توپولوژی δ_{cl}-خارج قسمتی

روی Y باشد. در این صورت p به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته است. افزون بر آن، τ_2 ظریف‌ترین توپولوژی روی Y است که با آن، $p:(X,\tau_1)\to Y$ به طور قوی δ_{cl}-پیوسته است.

قضیه۲۶: اگر $f:X\to Y$ یک نگاشت به طور قوی δ_{cl}-پیوسته، δ_{cl}-باز و پوشا باشد، آن‌گاه توپولوژی روی Y توپولوژی δ_{cl}-خارج قسمتی است.

برهان: فرض کنیم τ توپولوژی روی Y و τ' توپولوژی δ_{cl}-خارج قسمتی روی آن باشد. بنا به قضیه۲۵، $\tau\subseteq\tau'$. حال، اگر $U\in\tau'$، آن‌گاه $f^{-1}(U)$ در X، δ_{cl}-باز و چون f یک نگاشت δ_{cl}-باز است، $f\left(f^{-1}(U)\right)\in\tau$ و در نتیجه $U\in\tau$. بنابراین $\tau=\tau'$.

قضیه۲۷: فرض کنیم $p:X\to Y$ یک نگاشت δ_{cl}- خارج قسمتی باشد. در این صورت نگاشت $g:Y\to Z$ پیوسته است اگر و تنها اگر نگاشت $gop:X\to Z$ به‌طور قوی δ_{cl}-پیوسته باشد.

برهان: اگر $p:X\to Y$ یک نگاشت δ_{cl}-خارج قسمتی باشد، آن‌گاه $p_{\delta_{cl}}:X_{\delta_{cl}}\to Y$ یک نگاشت خارج قسمتی است. بنا به قضیه ۴.۹ در[۱۶]، $g:Y\to Z$ پیوسته است اگر و تنها اگر $gop_{\delta_{cl}}:X_{\delta_{cl}}\to Z$ پیوسته باشد اگر و تنها اگر $gop:X\to Z$ به طور قوی δ_{cl}-پیوسته باشد.

تشکر و قدردانی:

نویسنده از داوران محترم که نظراتشان باعث بهبود مقاله شد و همچنین از دانشگاه شهید چمران اهواز به دلیل حمایت مالی این تحقیق، کمال تشکر را دارد. (شماره گرنت: SCU. MM1401. 776)

فهرست منابع

1. Etebar M., "θ_{cl}-continuity and topological properties", Far East Journal of Mathematical Sciences, 107 (1) (2018) 221-229.

2. Kohli J. K., Kumar R., "z-supercontinuous functions", Indian J. Pure Appl. Math., 33(7)(2002) 1097-1108.

3. Kohli J. K., Tyagi B. K., Singh D., Aggarwal J., "R_{δ}-supercontinuous functions", Demonstratio Math., 47 (2) (2014) 433-448.

4. Munshi B. M., Bassan D. S., "Supercontinuous mappings", Indian J. Pure. Appl. Math., 13 (2) (1982) 229-236.

5. Singh D.,"cl-supercontinuous functions", Applied Gen. Top., 8(2) (2007) 293-300.

6. Tyagi B. K., Kohli J. K., singh D., "R_{cl}-supercontinuous functions", Demonstratio Math., 46 (1) (2013) 229-244.

7. Reilly I. L., Vamanamurthy M.K., "On super-continuous mappings", Indian J. Pure. Appl. Math., 14 (6) (1983) 767-772.

8. اعتبار معصومه، نگاشت‌های به طور قوی θ_{cl}- پیوسته، پژوهش‌های ریاضی، آماده انتشار.

9. Stone M. H., "Applications of the theory of boolean rings to general topology", Trans. Am. Math. Soc., 41 (1977) 375-481.

10. Engelking R., "General Topology", Heldermann Verlag, Berlin (1989).

11. Kohli J. K., "A class of spaces containing all connected and all locally connected spaces", Math. Nachr., 82 (1978) 121-129.

12. Afrooz S., Azarpanah F., Etebar M., "Rings of real valued clopen continuous functions", Appl. Gen. Topol., 19 (2) (2018) 203-216.

13. Gillman, L., Jerison M., "Rings of Continuous Functions", Springer (1976).

14. Buzyakova R.Z., "On clopen sets in cartesian products", Comment. Math. Univ. Carolinae, 42 (2) (2001) 357-362.

15. Singal M. K., Arya S. P., "On nearly paracompact spaces", Mat. Vesnik, 6 (21) (1969) 3-16.

16.Willard S., "General Topology", Addison-Wesley Publishing Company Inc., London (1970).