

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال نهم، شماره چهل و چهارم، مهر و آبان ۱۴۰۲

شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

JNRM

پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

## یک روش عددی برای حل معادله کابل با مشتق کسری بر پایه الگوی تفاضل متناهی

لیلا اعظمی<sup>۱</sup>، امیرحسین رفاهی شیخانی<sup>۲\*</sup>، هاشم صابری نجفی<sup>۳</sup>

<sup>(۱و۲و۳)</sup> گروه ریاضی، واحد لاهیجان، دانشگاه آزاد اسلامی، لاهیجان، ایران.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۰۷/۰۶ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۳/۱۱

### چکیده

در این مقاله، یک تقریب عددی برای حل نوعی از معادله کابل کسری بر پایه روش تفاضلات متناهی پیشنهاد نمودیم که می‌توان به آسانی به دیگر معادلات کابل کسری تعمیم داد. مشتق کسری به کار گرفته شده از نوع کاپوت-فابریزیو است. با کمک فرمول تفاضلی پیشرو مشتق کسری را تقریب زده و سپس معادله کسری را همراه تقریب ذکر شده و طرح تفاضلی، گسسته‌سازی کردیم. به منظور بررسی پایداری و همگرایی روش پیشنهادی، قضایای ارائه نمودیم. در پایان با استفاده از دو مثال عددی از معادله ی کابل با شرایط مرزی و اولیه متفاوت، کارایی و دقت روش به کار گرفته شده را مورد بررسی قرار دادیم. نتایج به دست آمده را با جواب‌های دقیق معادله مقایسه نمودیم. نمودارهای ارائه شده در هر دو مثال گویای سازگاری جواب‌های عددی و جواب‌های تحلیلی است که به وضوح دیده می‌شود. همچنین جدول‌ها هم نمایشگر خطای کوچک بین دو جواب عددی و تحلیلی است که نشان می‌دهد روش پیشنهادی ما از دقت بالایی برخوردار است.

واژه های کلیدی: پتانسیل غشا، مشتق کسری کاپوت-فابریزیو، آنالیز فوریه، پایداری، همگرایی.

**۱- مقدمه**

در طبیعت، بسیاری از ویژگی‌های فیزیکی دارای انواع مرتبه‌ی کسری ذاتی هستند. به همین دلیل حساب کسری به دلیل کارایی آن در توضیح دقیق‌تر پدیده‌های دنیای واقعی، به ابزار مهمی تبدیل شده است. حساب کسری یک ابزار قدرتمند برای کنترل حافظه و ویژگی‌های ارثی چندین ماده و فرآیند است که در مقایسه با حساب معمولی یکی از اهمیت‌های بزرگ حساب کسری به شمار می‌آید [۱]. از حساب کسری برای مدل‌سازی فرآیندهای علمی و مهندسی مانند مکانیک، برق، شیمی، زیست‌شناسی، اقتصاد به ویژه نظریه کنترل و پردازش سیگنال و تصویر استفاده می‌شود که به بهترین وجه توسط معادلات دیفرانسیل توصیف شده است. معادلات دیفرانسیل مرتبه‌ی کسری، تعمیم یافته معادلات دیفرانسیل سنتی هستند. این معادلات، شامل مشتق کسری یا انتگرال کسری می‌باشند و اغلب در بسیاری از زمینه‌های مکانیک سیالات، داروخانه، ویسکوالاستیک، زیست‌شناسی، سیستم‌های کنترل ظاهر می‌شوند.

مشتقات کسری در حل معادلات کسری فوکر-پلانک، معادلات کسری موج، سیستم‌های غیرخطی، سیستم‌های خطی، معادلات برگر کسری، واکنشی-انتقالی مرتبه‌ی توزیعی و بسیاری از دیگر معادلات کسری و سیستم‌ها استفاده می‌شود [۲-۸]. هدف اصلی مقاله، دسترسی بیشتر به کارایی مشتق کاپوت-فابریزیو از مرتبه کسری به همراه روش تفاضل متناهی کرانک-نیکلسون و بکارگیری آنها در حل عددی معادله کابل کسری است. به دلیل اینکه، این مشتق کسری بدون هسته منفرد می‌باشد و شامل ویژگی‌هایی از جمله قابلیت توصیف ناهمگونی مواد است که برای مدل‌سازی در زمینه‌های مختلف علوم به کار می‌رود.

سازماندهی بقیه مقاله به شرح زیر است: در بخش ۲، پیشینه تحقیق را ارائه می‌دهیم. مدل‌سازی مسله در بخش ۳ شرح داده می‌شود. در بخش ۴، نتایج عددی را با استفاده از طرح تفاضل متناهی و نرم‌افزار متلب به دست می‌آوریم. سرانجام در بخش آخر، نتیجه‌گیری را بیان می‌نماییم.

**۲- پیشینه تحقیق**

مشتق و انتگرال مرتبه‌ی کسری تحت عنوان حسابان کسری معرفی می‌شود. مفهوم مشتق و انتگرال کسری در اواخر قرن ۱۷ پدیدار شد. تعاریف متعددی برای مشتق کسری ارائه شده است و همچنان ادامه دارد که از آن جمله، مشتقات کسری ریمان-لیوویل، گرانوالد-لنتیکو و کاپوت با هسته منفرد طراحی شده‌اند. محققان بسیاری از این مشتقات در حل مسائل استفاده کرده‌اند [۹-۱۶]. اما مشتقات ذکر شده نمی‌توانند به طور کامل، کل اثر حافظه یک سیستم خاص را به تصویر بکشند زیرا شامل هسته منفرد هستند و این ضعف، بر مسائل تاثیر می‌گذارد. برای رفع این کمبود هسته با ماهیت منفرد، یک تعریف جدید از مشتق کسری توسط کاپوت و فابریزیو ارائه شده است که به جای هسته منفرد از هسته غیرمنفرد استفاده می‌شود و این مشتق مستقیماً "دنباله‌ی عملگر مشتق کاپوت سنتی است. مشتق جدید ویژگی‌های بیشتری نسبت به نسخه قدیمی دارد. مشتق نامبرده قادر به توصیف ناهمگونی‌ها و ساختارها با مقیاس‌های مختلف است که نمی‌توان آنها را به خوبی با مشتقات محلی سنتی با مدل‌های کسری با هسته منفرد نشان داد. از اینرو، تعریف کاپوت-فابریزیو نسبت به تعریف دیگر مشتقات کسری با هسته غیرمنفرد مناسب‌تر است.

روش‌های تحلیلی زیادی برای حل معادلات دیفرانسیل کسری وجود دارد اما به طور پیوسته نمی‌توان معادلات دیفرانسیل کسری را با روش‌های تحلیلی حل نمود [۱۷-۱۸]. چون این معادلات دارای شرایط اولیه و مرزی و عبارات منبع هستند، یافتن راه‌حل تحلیلی در بسیاری از موارد دشوار است. بنابراین، محققان از روش‌های عددی مانند روش تفاضل متناهی، روش تکرار فشرده، روش کرانک-نیکلسون و غیره [۱۹-۲۱] برای حل این نوع معادلات استفاده می‌نمایند.

یکی از روش‌های تفاضل متناهی، روش کرانک-نیکلسون است که برای حل عددی معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی استفاده می‌شود. از جمله مشخصه‌های این روش می‌توان به ضمنی بودن در زمان و همچنین پایداری عددی آن اشاره نمود. روش نامبرده توسط کرانک و فیلیپس نیکلسون در اواسط قرن ۲۰ توسعه یافت. روش تفاضلی مذکور برای حل عددی معادلات دیفرانسیل در بسیاری از پژوهش‌ها استفاده شده است [۲۲-۲۹].

در این مقاله به حل معادله دیفرانسیل کابل پرداخته می‌شود. معادله کابل به عنوان یک محور اصلی در نظریه کابل عصبی مورد نظر است. نظریه کابل عصبی توسط ویلفرد رال توسعه یافت. این نظریه چارچوبی برای تجزیه و تحلیل کمی اثرات دندریت‌ها و خارهای دندریتیک بر روند ادغام سیناپسی ارائه داد. بعدها رال معادله را برای آنالیز ولتاژ در کابل‌ها و دندریت‌ها با هندسه‌های شاخه‌ای استفاده کرد. معادله کابل

در بسیاری از زمینه‌های الکتروفیزیولوژی و نوروفیزیولوژی و در مدل‌سازی پویایی نورون‌ها نقش محوری دارد. در دهه‌های گذشته، محققان تحقیقات بسیاری را ارائه دادند [۳۰-۳۲].

در توضیح باید اشاره کرد که مدارهای عصبی از نورون ساخته شده‌اند. نورون یک سلول تحریک‌پذیر الکتریکی است که اطلاعات را تجزیه و تحلیل می‌کند. این پیام از طریق دندریت‌ها به بدنه‌ی نورون می‌رسد و در آنجا منجر به تولید یا عدم تولید پتانسیل عمل (پیام) می‌شود. همه پیام‌های الکتریکی در سیستم عصبی توسط یون‌ها منتقل می‌شوند. از آنجا که غشا برای برخی از یون‌ها نفوذپذیر است، بنابراین اختلاف غلظت یون بین داخل و خارج غشا ایجاد می‌شود که به آن پتانسیل غشا نامند [۳۳].

پیش از آغاز بخش مدل‌سازی، به شرح مختصری از مدل ریاضی کابل کسری عصبی می‌پردازیم. در نوروفیزیولوژی، معادله کابل پتانسیل غشا  $U(x,t)$  به شکل یک قطعه استوانه‌ای (با فاصله  $x$  در طول استوانه) از یک (نورون) سلول عصبی است. مدل‌سازی غشا به صورت یک مدار الکتریکی است که شامل  $(r_i)$  مقاومت داخلی محوری،  $(c_m)$  خازن غشایی،  $(r_m)$  مقاومت غشایی به صورت موازی که اتصال بخش داخلی به خارجی را توصیف می‌کند.

معادله کابل از معادله نرنست-پلانک<sup>۴</sup> برای حرکت الکتروپاشنده یون‌ها گرفته شده است که این معادله تقریب ماکروسکوپی از حرکت میکروسکوپی پیچیده از یون‌ها در سلول‌های عصبی می‌باشد. معادله دیفرانسیل حاصل به شکل یک معادله انتشار استاندارد با یک عبارت اضافی برای پتانسیل فراغشایی است که باعث از بین رفتن سیگنال الکتریکی می‌شود:

$$\lambda^2 \frac{\partial^2 U_m(x,t)}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial U_m(x,t)}{\partial t} - U_m(x,t) = 0 \quad (1)$$

که  $\gamma = r_m c_m$  ثابت زمان است و  $\lambda = \sqrt{\frac{r_m}{r_i}}$  ثابت مکان مربوط به مقاومت و خازن غشا است. گاهی اوقات متغیرهای بدون بعد

$$\left( T = \frac{t}{\lambda^2}, X = \frac{x}{\lambda} \right)$$
 استفاده می‌شود، بنابراین

$$\frac{\partial^2 U_m(X,T)}{\partial X^2} - \frac{\partial U_m(X,T)}{\partial T} - U_m(X,T) = 0. \quad (2)$$

این معادله می‌تواند در ساده‌سازی دستکاری‌های خاص و در ساده‌سازی عبارات ریاضی جهت یافتن جواب مفید باشد. برای موقعیت‌هایی که در میدان‌های الکتریکی کاربردی، تحریک سیناپسی یا ویژگی‌های غشای فعال وجود دارد، معادله کابل کلی‌تری را در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\partial^2 U_m(X,T)}{\partial X^2} - \frac{\partial U_m(X,T)}{\partial T} - U_m(X,T) = G \quad (3)$$

$G=0$  اگر  $G=0$  باشد، معادله دیفرانسیل با مشتقات جزئی (۲) وجود دارد. هنگامی که جریان یا ولتاژ فقط در چند نقطه‌ی گسسته در امتداد یک کابل فعال اعمال می‌شود، برای طول کابلی که بین این نقاط قرار دارد  $G=0$  می‌شود. هنگامی که یک الکتروود گسترده یا آرایه الکتروود پیچیده در طول کابل اعمال می‌شود، معادله (۳) را همراه با  $G$  به عنوان یک تابعی از  $X$  به دست می‌آوریم و اگر این میدان اعمال شده با زمان متغیر باشد،  $G$  را به عنوان تابعی از  $T, X$  داریم. اما، وقتی اختلال ورودی یک تغییر رسانایی سیناپسی است، جریان سیناپسی به  $U$  و همچنین توزیع مکانی-زمانی ورودی سیناپسی بستگی دارد. در این حالت،  $G$  یک تابع از  $U$  و همچنین  $T, X$  است. مدل معادله کابل کسری بهتر از معادله کابل صحیح است، چون مشتق کسری می‌تواند تاریخچه حالت را در تمام فواصل توصیف کند. ما مشتق زمان مرتبه اول را در معادله (۲) با یک مشتق کسری از مرتبه  $\alpha \in (0,1)$  جایگزین می‌کنیم:

$$\frac{\partial^2 U_m(X,T)}{\partial X^2} - \frac{\partial^\alpha U_m(X,T)}{\partial T^\alpha} - U_m(X,T) = 0 \quad (4)$$

از دیدگاه ریاضی، این مدل یک تعمیم ساده برای مدل کابل کسری عصبی است.

<sup>۴</sup>Nernst-Planck equation

## ۳-مدل‌سازی مسئله

(۳-۱) تعاریف پایه‌ای و یک نکته

در این بخش، نخست دو تعریف ضروری و لازم از حساب کسری، تعریف مشتق کسری کاپوت و کاپوت-فابریزیو را بیان می‌کنیم.

**تعریف ۱.** مشتق زمان کسری کاپوت راجح از مرتبه‌ی  $\alpha$  را در نظر می‌گیریم و داریم:

$${}^c D_t^\alpha u(x, t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \left( \frac{d^n u(x, \tau)}{d\tau^n} \right) d\tau \quad (5)$$

$a \in [-\infty, t), n-1 \leq \alpha \leq n$ . با تغییر هسته به تابع  $\exp\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\tau)\right)$  و  $\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}$  به  $\frac{M(\alpha)}{1-\alpha}$ ، کاپوت و فابریزیو

تعریف جدیدی از مشتق زمان کسری را پیشنهاد دادند.

**تعریف ۲.**  $u(x, t) \in H^1(a, b)$  و  $b > a$  و  $\alpha \in (0, 1)$  را در نظر بگیرید. سپس مشتق کسری کاپوت-فابریزیو به صورت زیر تعریف می‌شود:

$${}^{CF} D_t^\alpha u(x, t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t \frac{\partial u(x, \tau)}{\partial \tau} \exp\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}(t-\tau)\right) d\tau \quad (6)$$

که  $M(\alpha)$  یک تابع نرمال‌سازی است به طوری‌که  $M(0) = M(1) = 1$ . اما اگر تابع  $u$  به  $H^1(a, b)$  تعلق نداشته باشد و  $u \in L^1(-\infty, b)$  باشد، مجدداً مشتق به صورت زیر تعریف می‌شود:

$${}^{CF} D_t^\alpha u(x, t) = \frac{\alpha M(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t (u(x, t) - u(x, \tau)) \times \exp\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}(t-\tau)\right) d\tau.$$

**نکته:**  $H^1(a, b)$  فضای سوبولف است که از ورژن عمومی آن ارائه شده است:

$$H^n(a, b) = \left\{ u : u, u', \dots, D_t^n u \in L^2(a, b) \right\}.$$

در این مقاله، ما مدل کابل کسری زیر را با شرایط اولیه و شرایط مرزی در نظر می‌گیریم:

$$\frac{\partial^2 U_m(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^\alpha U_m(x, t)}{\partial t^\alpha} - U_m(x, t) = G(x, t), \quad (7)$$

با شرایط مرزی  $u(0, t) = 0, u(L, t) = 0, 0 \leq t \leq T$  و شرایط اولیه  $u(x, 0) = r(x), 0 \leq x \leq X$

(۳-۲) فرمول‌بندی و آنالیز طرح عددی

(۳-۲-۱) تقریب عددی مشتق کسری. گسسته‌سازی مسئله را با فرض  $h = X/M$  و  $\tau = T/N$  شروع می‌کنیم که  $M$  سائزگرید

در مکان و  $N$  سائزگرید در زمان است و همچنین فرض می‌کنیم  $x_i = ih$  و  $i = 0, 1, \dots, M$  در بازه  $[0, X]$  و  $t_n = n\tau$  در بازه

$[0, T]$ ،  $n = 0, 1, \dots, N$

$${}^{CF} D_t^\alpha u(x_i, t_n) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_0^{t_n} \frac{u(x_i, \tau)}{\partial \tau} \times \exp\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}(t_n - \tau)\right) d\tau. \quad (8)$$

با استفاده از فرمول تفاضلی پیشرو، ما مشتق کسری را در  $(x_i, t_n)$  تقریب می‌زنیم:

$$\begin{aligned} {}^{CF} D_t^\alpha u(x_i, t_n) &= \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_0^{t_n} \frac{\partial u(x_i, \tau)}{\partial \tau} \times \exp\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}(t_n - \tau)\right) d\tau = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \\ &\times \sum_{j=1}^n \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{u(x_i, \tau)}{\partial \tau} \times \exp\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}(t_n - \tau)\right) d\tau \approx \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \sum_{j=1}^n \left( \frac{u_i^j - u_i^{j-1}}{\Delta t} + O(\Delta t) \right) \\ &\times \int_{t_{j-1}}^{t_j} \exp\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}(t_n - \tau)\right) d\tau \end{aligned} \quad (9)$$

بعد از حل انتگرال‌گیری جزئی، داریم

$$\int_{t_{j-1}}^{t_j} \exp\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}(t_n - \tau)\right) d\tau = \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) \times \left[ \exp\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t_n - t_j)\right) - \exp\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t_n - t_{j-1})\right) \right] \quad (10)$$

بنابراین معادله (۹) می‌شود:

$${}^{CF}_0 D_t^\alpha u(x_i, t_n) = \frac{M(\alpha)}{(1-\alpha)\Delta t} \sum_{j=1}^n (u_i^j - u_i^{j-1}) + O(\Delta t) \times \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right) \left[ \exp\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t_n - t_j)\right) - \exp\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t_n - t_{j-1})\right) \right] \quad (11)$$

از موارد فوق به دست می‌آوریم

$${}^{CF}_0 D_t^\alpha u(x_i, t_n) = \frac{M(\alpha)}{\alpha\Delta t} \sum_{j=1}^n (u_i^j - u_i^{j-1}) \times \left[ \exp\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}\Delta t(n-j)\right) - \exp\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}\Delta t(n-j+1)\right) \right] + O(\Delta t) \frac{M(\alpha)}{\alpha\Delta t} \sum_{j=1}^n \left[ \exp\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}\Delta t(n-j)\right) - \exp\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}\Delta t(n-j+1)\right) \right]. \quad (12)$$

اکنون اجازه دهید تقریب مشتق کسری کاپوت-فابریزیو را به عنوان یک قضیه بیان کنیم و آن را اثبات نماییم.

**قضیه ۱.** فرض کنیم  $u(x, t)$  یک تابع در  $C^2([a, b] \times [0, T])$  است و مرتبه‌ی مشتق کسری هم  $0 < \alpha \leq 1$  باشد. سپس تقریب مرتبه اول مشتق کاپوت-فابریزیو در نقطه  $(x_i, t_n)$ :

$${}^{CF}_0 D_t^\alpha u(x_i, t_n) = \frac{M(\alpha)}{\alpha\tau} \sum_{j=1}^n (u_i^j - u_i^{j-1}) d_{j,n} + R(\alpha, \tau, j)$$

که  $(\tau = \Delta t)$  و

$$d_{j,n} = \exp\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}\Delta t(n-j)\right) - \exp\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}\Delta t(n-j+1)\right)$$

و  $\|R(\alpha, \tau, j)\| < N$ .

**برهان.** بنابر معادله بالا

$${}^{CF}_0 D_t^\alpha u(x_i, t_n) = \frac{M(\alpha)}{\alpha\tau} \sum_{j=1}^n (u_i^j - u_i^{j-1}) \times \left[ \exp\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}\tau(n-j)\right) - \exp\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}\tau(n-j+1)\right) \right] + O(\tau) \frac{M(\alpha)}{\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \left[ \exp\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}\tau(n-j)\right) - \exp\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}\tau(n-j+1)\right) \right].$$

قرار می‌دهیم:

$$R(\alpha, \tau, j) = O(\tau) \frac{M(\alpha)}{\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \left[ \exp\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}\tau(n-j)\right) - \exp\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}\tau(n-j+1)\right) \right].$$

اکنون از هر دو طرف نرم می‌گیریم و به دست می‌آوریم:

$$\|R(\alpha, \tau, j)\| = \left\| O(\tau) \frac{M(\alpha)}{\alpha\tau} \sum_{j=1}^n \left[ \exp\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}\tau(n-j)\right) - \exp\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}\tau(n-j+1)\right) \right] \right\|$$

سپس،

$$\|R(\alpha, \tau, j)\| = \left\| O(\tau) \frac{M(\alpha)}{\alpha\tau} \left( 1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha} n\tau\right) \right) \right\|$$

□

برهان کامل شد.

بنابراین، تقریب مرتبه اول برای محاسبه مشتق کسری زمان به شرح زیر است:

$$\begin{aligned} {}_0^CF D_t^\alpha u(x_i, t_n) &= \frac{M(\alpha)}{\alpha\tau} \sum_{j=1}^n (u_i^j - u_i^{j-1}) \\ &\quad \times \left[ \exp\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha} \Delta t(n-j)\right) - \exp\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha} \Delta t(n-j+1)\right) \right] + O(\Delta t), \end{aligned}$$

که به زیر بازنویسی می‌شود:

$${}_0^CF D_t^\alpha u(x_i, t_n) = \frac{M(\alpha)}{\alpha\tau} \left[ d_{n,n} u_i^n - \sum_{j=1}^{n-1} (d_{j+1,n} - d_{j,n}) u_i^j - d_{1,n} u_i^0 \right] + O(\Delta t). \quad (13)$$

۳-۲-۲) تقریب معادله‌ی کابل با استفاده از طرح کرانک-نیکلسون برای گسسته‌سازی، معادله کابل کسری را همراه مشتق کاپوت-فابریزیو در نظر می‌گیریم:

$${}_0^CF D_t^\alpha u(x_i, t_n) = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - u(x, t) - g(x, t) \quad (14)$$

و تقریب مشتق کسری زیر را به کار می‌گیریم:

$${}_0^CF D_t^\alpha u(x_i, t_n) = \frac{M(\alpha)}{\alpha\tau} \left[ d_{n,n} u_i^n - \sum_{j=1}^{n-1} (d_{j+1,n} - d_{j,n}) u_i^j - d_{1,n} u_i^0 \right] + O(\Delta t). \quad (15)$$

علاوه بر این، ما روش کرانک-نیکلسون را برای مشتق مکان مرتبه دوم استفاده می‌کنیم:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{2\Delta x^2} + \frac{u_{i+1}^{n-1} - 2u_i^{n-1} + u_{i-1}^{n-1}}{2\Delta x^2} + O(\Delta x^2). \quad (16)$$

مشتقات بالا را در معادله قرار می‌دهیم و از طرح کرانک-نیکلسون استفاده کرده و همواره داریم:

$$\begin{aligned} \frac{M(\alpha)}{\alpha\tau} \left[ d_{n,n} u_i^n - \sum_{j=1}^{n-1} (d_{j+1,n} - d_{j,n}) u_i^j - d_{1,n} u_i^0 \right] - \left( \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{2\Delta x^2} + \frac{u_{i+1}^{n-1} - 2u_i^{n-1} + u_{i-1}^{n-1}}{2\Delta x^2} \right) \\ + \frac{1}{2} (u_i^n + u_i^{n-1}) = \frac{1}{2} (g_i^n + g_i^{n-1}). \end{aligned} \quad (17)$$

سپس

$$\begin{aligned} (-\lambda_1) u_{i+1}^n + (2\lambda_1 + \lambda_2 + d_{n,n}) u_i^n + (-\lambda_1) u_{i-1}^n = \lambda_2 (g_i^n + g_i^{n-1}) + \lambda_1 u_{i+1}^{n-1} + (-2\lambda_1 - \lambda_2) u_i^{n-1} + \lambda_1 u_{i-1}^{n-1} \\ + \sum_{j=1}^{n-1} (d_{j+1,n} - d_{j,n}) u_i^j + d_{1,n} u_i^0 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\lambda_2 = \frac{\alpha \Delta t}{2M(\alpha)} \quad \text{و} \quad \lambda_1 = \frac{\alpha \Delta t}{2\Delta x^2 M(\alpha)}$$

(۳-۳) آنالیز پایداری

در این بخش، پایداری طرح را بررسی می‌کنیم. پایداری توسط آنالیز فوریه تحلیل می‌شود [۲۸]. جواب تقریبی  $U_i^n$  است و تعریف می‌کنیم  $\rho_i^n = u_i^n - U_i^n$   $i = 1, 2, \dots, M$  ، سپس، معادله‌ی خطای گردشده‌ی زیر به دست می‌آید

$$(-\lambda_1)\rho_{i+1}^n + (2\lambda_1 + \lambda_2 + d_{n,n})\rho_i^n + (-\lambda_1)\rho_{i-1}^n = \lambda_1\rho_{i+1}^{n-1} + (-2\lambda_1 - \lambda_2)\rho_i^{n-1} + \lambda_1\rho_{i-1}^{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} (d_{j+1,n} - d_{j,n})\rho_i^j + d_{1,n}\rho_i^0 \quad (۱۹)$$

که  $\rho_0^n = \rho_M^n = 0$  . برای  $n = 0, 1, \dots, N$  ، ما توابع گرید زیر را تعریف می‌کنیم

$$\rho^n(x) = \begin{cases} \rho_i^n & \text{when } x_{i-\frac{h}{2}} < x < x_{i+\frac{h}{2}} & i = 1, 2, \dots, M-1 \\ 0 & \text{when } 0 \leq x \leq \frac{h}{2} \quad \text{or} \quad L - \frac{h}{2} < x \leq L \end{cases}$$

از این رو می‌توان  $\rho^n(x)$  را در سری های فوریه به صورت زیر بسط داد:

$$\rho^n(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} d_n(l) e^{\frac{2kl\pi x}{L}}, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

$$d_n(l) = \frac{1}{L} \int_0^L \rho^n(x) e^{2kl\pi x} dx$$

اکنون فرض می‌کنیم که

$$\rho^n = [\rho_1^n, \rho_2^n, \dots, \rho_{M-1}^n]^T, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

از تعریف نرم  $l^2$  :

$$\|\rho^n\|_2 = \left( \sum_{i=1}^{M-1} h |\rho_i^n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left[ \int_0^L |\rho_i^n|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

و  $n = 1, 2, \dots, N$  . با استفاده از نامساوی پارسوال:

$$\int_0^L |\rho_i^n|^2 dx = \sum_{l=-\infty}^{\infty} |d_n(l)|^2, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

داریم

$$\|\rho^n\|_2^2 = \sum_{l=-\infty}^{\infty} |d_n(l)|^2, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (۲۰)$$

فرض کنیم  $\rho_i^n$  به صورت  $\rho_i^n = d_n e^{rih\beta}$  است که  $\beta = \frac{2\pi l}{L}$  و  $L=1$  .  $\rho_i^n = d_n e^{rih\beta}$  را در معادله‌ی (۱۹) جایگذاری

می‌کنیم و داریم:

$$(-\lambda_1)d_n e^{r(i-1)h\beta} + (2\lambda_1 + \lambda_2 + d_{n,n})d_n e^{rih\beta} + (-\lambda_1)d_n e^{r(i+1)h\beta} = \lambda_1 d_{n-1} e^{r(i-1)h\beta} + (-2\lambda_1 - \lambda_2)d_{n-1} e^{rih\beta} + \lambda_1 d_{n-1} e^{r(i+1)h\beta} + \left( \sum_{j=1}^{n-1} (d_{j+1,n} - d_{j,n})d_j e^{rih\beta} + d_{1,n}d_0 e^{rih\beta} \right).$$

بعد از ساده‌سازی، داریم

$$d_n \left[ -\lambda_1 (e^{rh\beta} + e^{-rh\beta} - 2) + (d_{n,n} + \lambda_2) \right] = d_{n-1} \left[ \lambda_1 (e^{rh\beta} + e^{-rh\beta} - 2) - \lambda_2 \right] \\ + \left( \sum_{j=1}^{n-1} (d_{j+1,n} - d_{j,n}) d_j + d_{1,n} d_0 \right).$$

سپس، به دست می‌آوریم

$$d_n \left[ 4\lambda_1 \sin^2 \frac{\beta h}{2} + (d_{n,n} + \lambda_2) \right] = d_{n-1} \left[ -4\lambda_1 \sin^2 \frac{\beta h}{2} - \lambda_2 \right] \\ + \left( \sum_{j=1}^{n-1} (d_{j+1,n} - d_{j,n}) d_j + d_{1,n} d_0 \right). \quad (21)$$

**قضیه ۲.** فرض کنیم  $d_n$  جواب (۲۱) است. نشان می‌دهیم  $|d_n| \leq |d_0|$  ،  $\forall n \geq 1$ .

**برهان.** از استقرای ریاضی برای اثبات استفاده می‌کنیم. قرار می‌دهیم  $n = 1$

$$|d_1| = \left| \frac{-4\lambda_1 \sin^2 \frac{\beta h}{2} - \lambda_2}{4\lambda_1 \sin^2 \frac{\beta h}{2} + \lambda_2 + d_{n,n}} \right| |d_0| \leq |d_0|$$

بنابراین  $|d_1| \leq |d_0|$ .

فرض کنیم  $|d_k| \leq |d_0|$  برای هر  $k < n$  ( $k = 1, 2, \dots, n-1$ ) برقرار باشد. نشان می‌دهیم برای  $k = n$  نیز برقرار است.

$$|d_n| \leq \left( \left| \frac{-4\lambda_1 \sin^2 \frac{\beta h}{2} - \lambda_2 + d_{1,n}}{4\lambda_1 \sin^2 \frac{\beta h}{2} + \lambda_2 + d_{n,n}} \right| + \frac{1}{4\lambda_1 \sin^2 \frac{\beta h}{2} + \lambda_2 + d_{n,n}} \sum_{j=1}^{n-1} |d_{j+1,n} - d_{j,n}| \right) |d_0| \\ = \left( \left| \frac{-4\lambda_1 \sin^2 \frac{\beta h}{2} - \lambda_2 + d_{1,n}}{4\lambda_1 \sin^2 \frac{\beta h}{2} + \lambda_2 + d_{n,n}} \right| + \frac{d_{n,n} - d_{1,n}}{4\lambda_1 \sin^2 \frac{\beta h}{2} + \lambda_2 + d_{n,n}} \right) |d_0|$$

اگر  $-4\lambda_1 \sin^2 \frac{\beta h}{2} - \lambda_2 + d_{1,n} > 0$  ، سپس

$$|d_n| \leq \left( \frac{-4\lambda_1 \sin^2 \frac{\beta h}{2} - \lambda_2 + d_{n,n} - d_{1,n} + d_{1,n}}{4\lambda_1 \sin^2 \frac{\beta h}{2} + \lambda_2 + d_{n,n}} \right) |d_0| \leq |d_0|$$

و اگر  $-4\lambda_1 \sin^2 \frac{\beta h}{2} - \lambda_2 + d_{1,n} < 0$  ،

$$|d_n| \leq \left( \frac{4\lambda_1 \sin^2 \frac{\beta h}{2} + \lambda_2 + d_{n,n} - d_{1,n} - d_{1,n}}{4\lambda_1 \sin^2 \frac{\beta h}{2} + \lambda_2 + d_{n,n}} \right) |d_0|$$



$$\cdot |d_n| \leq \left( \frac{4\lambda_1 \sin^2 \frac{\beta h}{2} + \lambda_2 + d_{n,n} - 2d_{1,n}}{4\lambda_1 \sin^2 \frac{\beta h}{2} + \lambda_2 + d_{n,n}} \right) |d_0|$$

از این رو  $|d_n| \leq |d_0|$  اگر و فقط اگر

$$\frac{4\lambda_1 \sin^2 \frac{\beta h}{2} + \lambda_2 + d_{n,n} - 2d_{1,n}}{4\lambda_1 \sin^2 \frac{\beta h}{2} + \lambda_2 + d_{n,n}} \leq 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$4\lambda_1 \sin^2 \frac{\beta h}{2} + \lambda_2 + d_{n,n} - 2d_{1,n} \leq 4\lambda_1 \sin^2 \frac{\beta h}{2} + \lambda_2 + d_{n,n}$$

$$\Leftrightarrow d_{1,n} \geq 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\exp\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}(n-1)\Delta t\right) - \exp\left(-\frac{\alpha}{1-\alpha}n\Delta t\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\alpha}{1-\alpha}(n-1)\Delta t + \frac{\alpha}{1-\alpha}n\Delta t \geq 0$$

□

بنابراین  $|d_n| \leq |d_0|$  است.

از قضیه ۲ و رابطه ی (۲۰) نتیجه می گیریم که  $\|\rho^n\|_2 \leq \|\rho^0\|_2$ ، یعنی طرح کرانک-نیکلسون برای معادله کابل با مشتق کاپوت-فابریزیو پایدار است و این پایداری نیز نا مشروط می باشد.

(۳-۴) آنالیز همگرایی

ما برهان همگرایی طرح تفاضل متناهی را دنبال می کنیم [۲۸]. فرض کنیم  $u(x_i, t_n)$  جواب دقیق نمایش داده شده توسط سری تیلور است. سپس خطای برشی طرح

$$R_i^n = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_0^t \frac{\partial u(x_i, \tau)}{\partial \tau} \exp\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}(t_n - \tau)\right) d\tau - \left( \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{2\Delta x^2} + \frac{u_{i+1}^{n-1} - 2u_i^{n-1} + u_{i-1}^{n-1}}{2\Delta x^2} \right) + \frac{1}{2}(u_i^n + u_i^{n-1}) + \frac{1}{2}(g_i^n + g_i^{n-1}) - {}_0^C D_t^\alpha u(x_i, t_n) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u(x_i, t_n) - g(x_i, t_n)$$

با  $(n=1, 2, \dots, N-1)$  و  $(i=1, 2, \dots, M-1)$  از (۷) داریم

$$R_i^n = \frac{\partial^\alpha u(x_i, t)}{\partial t^\alpha} - \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_0^t \frac{\partial u(x_i, \tau)}{\partial \tau} \times \exp\left(\frac{-\alpha}{1-\alpha}(t_n - \tau)\right) d\tau + \frac{\partial^2 u(x_i, t)}{\partial x^2} - \left( \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{2\Delta x^2} + \frac{u_{i+1}^{n-1} - 2u_i^{n-1} + u_{i-1}^{n-1}}{2\Delta x^2} \right) + u(x_i, t_n) - \frac{1}{2}(u_i^n + u_i^{n-1}) = O(\Delta t + \Delta x^2)$$

چون  $i, n$  متناهی هستند، یک ثابت مثبت  $B_1$  وجود دارد، برای همه  $i, n$  ها، به طوریکه  $|R_i^n| \leq B_1(\Delta t + \Delta x^2)$  و  $(i=0, 1, \dots, M-1)$  و  $(n=1, 2, \dots, N-1)$ .

فرض کنیم  $\mathcal{E}_i^n = u(x_i, t_n) - u_i^n$  خطا در نقطه  $(x_i, t_n)$  است و معادله خطا را به گونه‌ی زیر می‌نویسیم:

$$(-\lambda_1)\mathcal{E}_{i+1}^n + (2\lambda_1 + \lambda_2 + d_{n,n})\mathcal{E}_i^n + (-\lambda_1)\mathcal{E}_{i-1}^n + (-\lambda_1)\mathcal{E}_{i+1}^{n-1} + (2\lambda_1 + \lambda_2)\mathcal{E}_i^{n-1} + (-\lambda_1)\mathcal{E}_{i-1}^{n-1} \\ - \sum_{j=1}^{n-1} (d_{j+1,n} - d_{j,n})\mathcal{E}_i^j - d_{1,n}\mathcal{E}_i^0 = R_i^n$$

$i = 0, 1, \dots, M$  و  $\mathcal{E}_i^0 = 0$  و شرط اولیه  $n = 1, 2, \dots, N$ ،  $\mathcal{E}_0^n = \mathcal{E}_M^n = 0$  و با شرط مرزی  $1 \leq n \leq N-1$ ،  $1 \leq i \leq M$  در این بخش از آنالیز فوریه برای تحلیل همگرایی استفاده می‌شود. توابع گرید زیر را تعریف می‌کنیم:

$$\mathcal{E}^n(x) = \begin{cases} \mathcal{E}_j^k & \text{when } x_{j-\frac{h}{2}} < x < x_{j+\frac{h}{2}} & j = 1, 2, \dots, M-1 \\ 0 & \text{when } 0 \leq x \leq \frac{h}{2} \quad \text{or} \quad L - \frac{h}{2} < x \leq L \end{cases}$$

$$R^n(x) = \begin{cases} R_i^n & \text{when } x_{i-\frac{h}{2}} < x < x_{i+\frac{h}{2}} & i = 1, 2, \dots, M-1 \\ 0 & \text{when } 0 \leq x \leq \frac{h}{2} \quad \text{or} \quad L - \frac{h}{2} < x \leq L \end{cases}$$

از این رو،  $\mathcal{E}^n(x)$ ،  $R^n(x)$  را می‌توان در سری فوریه بسط داد به طوری که

$$\mathcal{E}^n(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \xi_n(l) e^{\frac{2kl\pi x}{L}}, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

و

$$R^n(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \eta_n(l) e^{\frac{2kl\pi x}{L}}, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

که

$$\xi_n(l) = \frac{1}{L} \int_0^L \mathcal{E}^n(x) e^{\frac{2kl\pi x}{L}} dx$$

و

$$\eta_n(l) = \frac{1}{L} \int_0^L R^n(x) e^{\frac{2kl\pi x}{L}} dx$$

و داریم

$$\mathcal{E}^n = [\mathcal{E}_1^n, \mathcal{E}_2^n, \dots, \mathcal{E}_{M-1}^n]^T, \quad R^n = [R_1^n, R_2^n, \dots, R_{M-1}^n]^T$$

از تعریف نرم  $l^2$ :

$$\|\mathcal{E}^n\|_2 = \left( \sum_{i=1}^{M-1} h |\mathcal{E}_i^n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left[ \int_0^L |\mathcal{E}^n|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$\|R^n\|_2 = \left( \sum_{i=1}^{M-1} h |R_i^n|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = \left[ \int_0^L |R^n|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

$n = 1, 2, \dots, N$  . با استفاده از معادله پارسیوال:

$$\int_0^L |\varepsilon_i^n|^2 dx = \sum_{-\infty}^{\infty} |\xi_n(L)|^2, \quad n = 1, 2, \dots, N$$

$$\int_0^L |R_i^n|^2 dx = \sum_{-\infty}^{\infty} |\eta_n(L)|^2, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

ما همچنین داریم:

$$\|\varepsilon^n\|_2^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} |\xi_n(L)|^2, \quad n = 1, 2, \dots, N \quad (22)$$

$$\|R^n\|_2^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} |\eta_n(L)|^2, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (23)$$

بنا بر بالا ، فرض می‌کنیم که

$$\varepsilon_i^n = \xi_n e^{rih\beta}, R_i^n = \eta_n e^{rih\beta} \quad (24)$$

و  $L = 1, \beta = \frac{2\pi l}{L}$  سپس معادله خطا را داریم:

$$(-\lambda_1)\varepsilon_{i+1}^n + (2\lambda_1 + \lambda_2 + d_{n,n})\varepsilon_i^n + (-\lambda_1)\varepsilon_{i-1}^n = \lambda_1\varepsilon_{i+1}^{n-1} + (-2\lambda_1 - \lambda_2)\varepsilon_i^{n-1} + \lambda_1\varepsilon_{i-1}^{n-1}$$

$$+ \sum_{j=1}^{n-1} (d_{j+1,n} - d_{j,n})\varepsilon_i^j + d_{1,n}\varepsilon_i^0 + R_i^n$$

که  $0 \leq i \leq M, \varepsilon^0 = \varepsilon^N = 0$  و  $1 \leq n \leq N-1, 1 \leq i \leq M$  . با استفاده از فرمول (۲۴) ، به دست می‌آوریم

$$(-\lambda_1)\xi_n e^{r(i-1)h\beta} + (2\lambda_1 + \lambda_2 + d_{n,n})\xi_n e^{rih\beta} + (-\lambda_1)\xi_n e^{r(i+1)h\beta} = \lambda_1\xi_{n-1} e^{r(i-1)h\beta} + (-2\lambda_1 - \lambda_2)\xi_{n-1} e^{rih\beta} + \lambda_1\xi_{n-1} e^{r(i+1)h\beta} + \left( \sum_{j=1}^{n-1} (d_{j+1,n} - d_{j,n})\xi_j e^{rih\beta} + \eta_n e^{rih\beta} \right).$$

بعد از ساده‌سازی

$$\xi_n \left[ -\lambda_1 (e^{rh\beta} + e^{-rh\beta} - 2) + (d_{n,n} + \lambda_2) \right] = \xi_{n-1} \left[ \lambda_1 (e^{rh\beta} + e^{-rh\beta} - 2) - \lambda_2 \right]$$

$$+ \left( \sum_{j=1}^{n-1} (d_{j+1,n} - d_{j,n})\xi_j \right) + \eta_n.$$

سپس داریم :

$$\xi_n = \frac{-4\lambda_1 \sin^2 \frac{\beta h}{2} - \lambda_2}{4\lambda_1 \sin^2 \frac{\beta h}{2} + \lambda_2 + d_{n,n}} \xi_{n-1} + \frac{1}{4\lambda_1 \sin^2 \frac{\beta h}{2} + \lambda_2 + d_{n,n}} \left( \sum_{j=1}^{n-1} (d_{j+1,n} - d_{j,n}) \xi_j + \eta_n \right). \quad (25)$$

**گزاره:** فرض کنیم  $\xi_n$  ( $n=1, 2, \dots, N$ ) جواب (۲۵) باشد، سپس یک ثابت مثبت  $B_2$  وجود دارد که  $|\xi_n| \leq B_2 |\eta_1|$  و  $n=1, 2, \dots, N$ .

**برهان.**  $\varepsilon^0 = 0$ ، ما داریم  $\xi_0 = 0$ . چون سری‌ها در (۲۳) همگرا هستند، سپس یک ثابت مثبت  $B_n$  وجود دارد که  $|\eta_n| \leq B_2 |\eta_1|$ ،  $B_2 = \max_{1 \leq n \leq N} \{B_n\}$  داریم و  $n=1, 2, \dots, N$ ،  $|\eta_n| \equiv |\eta_n(l)| \leq B_n |\eta_n(l)| \equiv |\eta_1|$  و  $n=1, 2, \dots, N$ . با استفاده از استقرای ریاضی، برای  $n=1$   $\xi_1 = \frac{1}{4\lambda_1 \sin^2 \frac{\beta h}{2} + \lambda_2 + d_{n,n}} \eta_1$ . ما می‌توانیم بیان کنیم

$k=n$  فرض کنیم که  $|\xi_k| \leq B_2 |\eta_1|$  ( $k=1, 2, \dots, n-1$ ). نشان می‌دهیم که همچنین برای  $k=n$  درست است. از (۲۵) داریم:

$$\begin{aligned} |\xi_n| &\leq \left| \frac{-4\lambda_1 \sin^2 \frac{\beta h}{2} - \lambda_2}{4\lambda_1 \sin^2 \frac{\beta h}{2} + \lambda_2 + d_{n,n}} \right| |\xi_{n-1}| + \left| \frac{1}{4\lambda_1 \sin^2 \frac{\beta h}{2} + \lambda_2 + d_{n,n}} \right| \left( \sum_{j=1}^{n-1} (d_{j+1,n} - d_{j,n}) \xi_j \right) \\ &\quad + \left| \frac{1}{4\lambda_1 \sin^2 \frac{\beta h}{2} + \lambda_2 + d_{n,n}} \right| |\eta_n|. \\ |\xi_n| &\leq \left( \left| \frac{-4\lambda_1 \sin^2 \frac{\beta h}{2} - \lambda_2}{4\lambda_1 \sin^2 \frac{\beta h}{2} + \lambda_2 + d_{n,n}} \right| |\xi_{n-1}| + \left| \frac{1}{4\lambda_1 \sin^2 \frac{\beta h}{2} + \lambda_2 + d_{n,n}} \right| \sum_{j=1}^{n-1} (d_{j+1,n} - d_{j,n}) \right) B_2 |\eta_1| \\ &\quad + \left| \frac{1}{4\lambda_1 \sin^2 \frac{\beta h}{2} + \lambda_2 + d_{n,n}} \right| B_2 |\eta_1| = \left( \left| \frac{-4\lambda_1 \sin^2 \frac{\beta h}{2} - \lambda_2}{4\lambda_1 \sin^2 \frac{\beta h}{2} + \lambda_2 + d_{n,n}} \right| + \frac{d_{n,n} - d_{1,n}}{4\lambda_1 \sin^2 \frac{\beta h}{2} + \lambda_2 + d_{n,n}} \right. \\ &\quad \left. + \left| \frac{1}{4\lambda_1 \sin^2 \frac{\beta h}{2} + \lambda_2 + d_{n,n}} \right| \right) B_2 |\eta_1|. \end{aligned}$$

چون  $\left( -4\lambda_1 \sin^2 \frac{\beta h}{2} - \lambda_2 < 0 \right)$  سپس

$$|\xi_n| \leq \left( \frac{4\lambda_1 \sin^2 \frac{\beta h}{2} + \lambda_2 + d_{n,n} - d_{1,n} + 1}{4\lambda_1 \sin^2 \frac{\beta h}{2} + \lambda_2 + d_{n,n}} \right) B_2 |\eta_1|.$$

بررسی می‌کنیم،

$$\frac{4\lambda_1 \sin^2 \frac{\beta h}{2} + \lambda_2 + d_{n,n} - d_{1,n} + 1}{4\lambda_1 \sin^2 \frac{\beta h}{2} + \lambda_2 + d_{n,n}} \leq 1.$$

□

و سپس نتیجه می‌گیریم که  $|\xi_k| \leq B_2 |\eta_1|$ .

**قضیه ۳.** طرح تفاضلی پیشنهادی کرانک-نیکلسون برای معادله کابل خطی با مشتق کسری کاپوت-فابریزیو همگرایی  $l^2$  دارد و مرتبه همگرایی  $O(\Delta t + (\Delta x)^2)$  می‌باشد.

**برهان.** از گزاره و رابطه‌ی (۲۲)-(۲۳)، داریم  $\|R^1\|_2 \leq B_2 B_1 (\Delta t + (\Delta x)^2)$ ، بنابراین،  $\|\varepsilon^n\|_2 \leq B(\Delta t + (\Delta x)^2)$ ، به طوریکه  $B = B_2 B_1$ . برهان ثابت شد.

□

#### ۴- نتایج عددی

در این بخش، برای تایید الگوریتم پیشنهادی در حل معادله کابل کسری دو مثال را ارائه می‌دهیم. قدر مطلق خطاها را با نرم ماکزیمم ( $Err_\infty$ ) و مرتبه‌ی همگرایی ( $O_r$ ) را با استفاده از فرمول زیر محاسبه می‌کنیم:

$$Err_\infty(j) = \max_{\substack{1 \leq i \leq M \\ 1 \leq n \leq N}} (u(x_i, t_n) - u_i^n)$$

و

$$O_r = \log_2 \left( \frac{Err_\infty(j)}{Err_\infty(j+1)} \right).$$

**مثال ۱)** مسله مرزی-اولیه زیر از معادله کابل کسری را در نظر بگیرید:

$${}_0^C D_t^\alpha u(x, t) = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - u(x, t) - g(x, t), (0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1).$$

(۲۶)

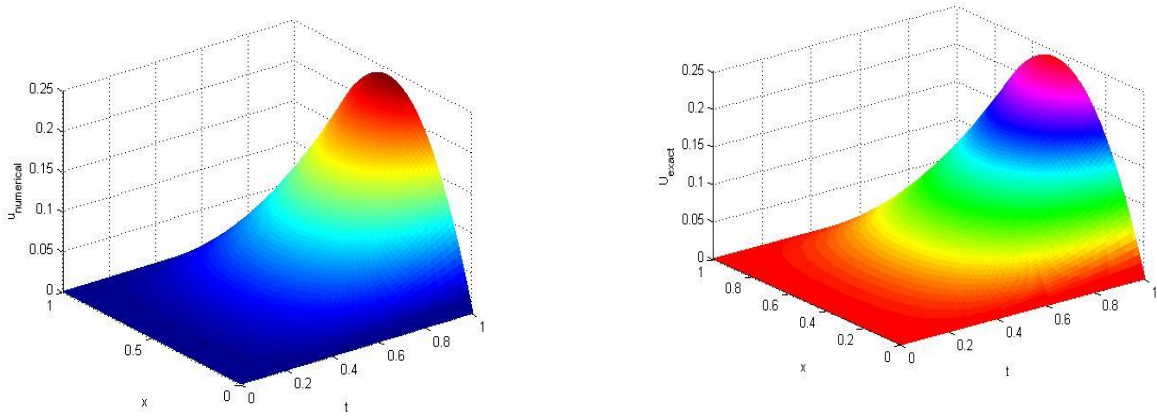
$$g(x, t) = \frac{(2-2x) \sin x (1 - \alpha t - \alpha + e^{\alpha(1-\alpha)t})}{\alpha^2 + 2t^2(x \cos x + \cos x)}, \quad u(x, t) = t^2(1-x) \sin(x), \quad \text{جواب دقیق (۲۶)}$$

مشروط به شرایط اولیه و مرزی  $u(x, 0) = 0, 0 \leq x \leq 1$  و  $u(0, t) = 0, u(1, t) = 0, 0 \leq t \leq 1$

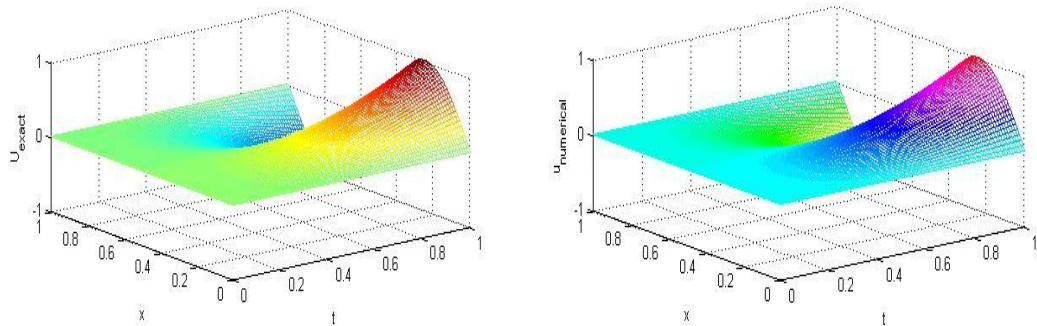
**مثال ۲)** معادله کابل کسری (۲۶) را با شرایط اولیه و مرزی  $u(x, 0) = 0, 0 \leq x \leq 1$  و  $u(0, t) = 0, u(1, t) = t^2 \sin(2\pi)$  و  $0 \leq t \leq 1$  جواب دقیق مسله  $u(x, t) = t^2 \sin(2\pi x)$  است.

در مثال نخست، روش تفاضلی برای معادله (۲۶) تست شده است. شکل ۱ جواب تقریبی و جواب تحلیلی معادله را نمایش می‌دهد. نزدیکی جواب تقریبی و تحلیلی به وضوح ( $t = 1, N = 1000, M = 100$ ) نمایان است. جدول‌های ۱ و ۲ نمایش قدر مطلق خطاهای طرح تفاضلی و همچنین مرتبه‌ی همگرایی آنها است. به عنوان مثال در جدول ۱،  $h = 0.01$  یک مقدار کوچک برای تست خطای خاصی است و اندازه‌ی گام زمان را متفاوت انتخاب کردیم. در مثال دوم، تقریب معادله کابل (۲۶) با تغییر شرایط مرزی و اولیه و جواب دقیق در شکل ۲ نشان داده شد ( $\alpha = 0.3$ ) و همچنین جواب تحلیلی و جواب عددی به دست آمده از طرح تفاضلی در سمت راست و چپ شکل

مشاهده می‌شود ( $t = 1, N = 100, M = 100$ ). جدول ۳ و ۴ خطاهای تقریبی برای طرح تفاضلی را به ما می‌دهد. شکل ۱ و ۲ بیان می‌کند که جواب‌های عددی به دست آمده با استفاده از مشتق کسری کاپوت-فابریزو و طرح تفاضلی کرانک-نیکلسون سازگار با جواب‌های تحلیلی است.



شکل ۱. جواب عددی و جواب دقیق  $u(x, t)$ ،  $\alpha = 0.5$ ،  $dt = 0.001$ ،  $dx = 0.01$ ، برای مثال ۱.



شکل ۲. جواب عددی و جواب دقیق  $u(x, t)$ ،  $\alpha = 0.5$ ،  $dt = 0.01$ ،  $dx = 0.01$ ، برای مثال ۲.

جدول ۱.  $Err_\infty$ ،  $O_r$  از مثال ۱ در جهت خاص  $M = 100$ .

$\alpha$	$N$	Absolute Error ( $Err_\infty$ )	Convergence ( $O_r$ )
۰٫۳	۲۰۰	$۳٫۵۱۴۷E-۶$	
	۳۰۰	$۱٫۵۶۰۴E-۶$	۱٫۱۷۱۴۸۵
	۴۰۰	$۸٫۷۷۲۲E-۷$	۰٫۸۳۰۹۰۵
	۵۰۰	$۵٫۶۱۲۴E-۷$	۰٫۶۴۴۳۲۰
۰٫۵	۲۰۰	$۴٫۷۰۶۹E-۶$	
	۳۰۰	$۲٫۰۸۶۵E-۶$	۱٫۱۷۳۶۹۲
	۴۰۰	$۱٫۱۷۲۱E-۶$	۰٫۸۲۱۹۸۹
	۵۰۰	$۷٫۴۹۵۵E-۷$	۰٫۶۴۴۹۹۸
۰٫۹	۲۰۰	$۱٫۵۱۵۸E-۵$	
	۳۰۰	$۶٫۵۶۵۸E-۶$	۱٫۲۰۷۰۳۶
	۴۰۰	$۳٫۶۴۳۴E-۶$	۰٫۸۴۹۶۸۴
	۵۰۰	$۲٫۳۱۲۲E-۶$	۰٫۶۵۶۰۱۸

جدول ۲.  $O_r, Err_\infty$  از مثال ۱ در جهت مکانی و زمانی خاص  $M = N$ .

$\alpha$	$N$	$M$	Absolute Error ( $Err_\infty$ )	Convergence order( $O_r$ )
۰٫۳	۲۰۰	۲۰۰	۳٫۵۱۶۷E-۶	
	۳۰۰	۳۰۰	۱٫۵۶۱۱E-۶	۱٫۱۷۱۴۵۴
	۴۰۰	۴۰۰	۸٫۷۷۶۷E-۷	۰٫۸۳۰۸۱۱
	۵۰۰	۵۰۰	۵٫۶۱۵۳E-۷	۰٫۶۴۴۳۱۵
۰٫۵	۲۰۰	۲۰۰	۴٫۷۰۸۴E-۶	
	۳۰۰	۳۰۰	۲٫۰۸۷۲E-۶	۱٫۱۷۳۶۶۷
	۴۰۰	۴۰۰	۱٫۱۷۲۵E-۶	۰٫۸۳۱۹۸۰
	۵۰۰	۵۰۰	۷٫۴۹۸۳E-۷	۰٫۶۴۴۹۵۱
۰٫۹	۲۰۰	۲۰۰	۱٫۵۱۵۸E-۵	
	۳۰۰	۳۰۰	۶٫۵۶۶۰E-۶	۱٫۲۰۶۹۹۲
	۴۰۰	۴۰۰	۳٫۶۴۳۵E-۶	۰٫۸۴۹۶۸۹
	۵۰۰	۵۰۰	۲٫۳۱۲۳E-۶	۰٫۶۵۵۹۹۵

جدول ۳.  $O_r, Err_\infty$  از مثال ۲ در جهت خاص  $M = ۱۰۰$ .

$\alpha$	$N$	Absolute Error ( $Err_\infty$ )	Convergence ( $O_r$ )
۰٫۳	۲۰۰	۴٫۰۵۷۸E-۶	
	۳۰۰	۱٫۸۰۱۶E-۶	۱٫۱۷۱۴۱۸
	۴۰۰	۱٫۰۱۲۹E-۶	۰٫۸۳۰۷۸۶
	۵۰۰	۶٫۴۸۰۴E-۷	۰٫۶۴۴۳۲۰
۰٫۵	۲۰۰	۵٫۶۹۳۹E-۶	
	۳۰۰	۲٫۵۲۴۶E-۶	۱٫۱۷۳۳۶۲
	۴۰۰	۱٫۴۱۸۴E-۶	۱٫۱۳۶۴۲۸
	۵۰۰	۹٫۰۷۱۰E-۷	۰٫۶۴۴۹۹۳
۰٫۹	۲۰۰	۲٫۵۷۲۲E-۵	
	۳۰۰	۱٫۱۲۰۱E-۵	۱٫۱۹۹۳۷۵
	۴۰۰	۶٫۲۳۲۵E-۶	۰٫۸۴۵۷۴۴
	۵۰۰	۳٫۹۶۲۰E-۶	۰٫۶۵۳۵۸۱

جدول ۴.  $O_r, Err_\infty$  از مثال ۲ در جهت مکانی و زمانی خاص  $M = N$ .

$\alpha$	$N$	$M$	Absolute Error ( $Err_\infty$ )	Convergence order( $O_r$ )
۰٫۳	۲۰۰	۲۰۰	۴٫۲۰۱۲E-۶	
	۳۰۰	۳۰۰	۱٫۸۷۷۱E-۶	۱٫۱۶۲۲۹۵
	۴۰۰	۴۰۰	۱٫۰۵۷۷E-۶	۰٫۸۲۷۵۷۴
	۵۰۰	۵۰۰	۶٫۷۷۴۰E-۷	۰٫۶۴۲۸۵۰
۰٫۵	۲۰۰	۲۰۰	۵٫۸۳۴۶E-۶	
	۳۰۰	۳۰۰	۲٫۵۹۸۷E-۶	۱٫۱۶۶۸۴۳
	۴۰۰	۴۰۰	۱٫۴۶۲۳E-۶	۰٫۸۲۹۵۵۰
	۵۰۰	۵۰۰	۹٫۳۵۹۱E-۷	۰٫۶۴۳۷۹۷
۰٫۹	۲۰۰	۲۰۰	۲٫۵۸۳۴E-۵	
	۳۰۰	۳۰۰	۱٫۱۲۶۰E-۵	۱٫۱۹۸۰۶۴
	۴۰۰	۴۰۰	۶٫۲۶۷۵E-۶	۰٫۸۴۵۲۴۴
	۵۰۰	۵۰۰	۳٫۹۸۴۹E-۶	۰٫۶۵۳۳۴۶

**۵- نتیجه گیری**

در این مقاله، طرح تفاضل متناهی کرانک-نیکلسون را به همراه مشتق کسری کاپوت-فابریزیو برای ارائه یک الگوریتم جهت حل معادله کابل کسری مورد بررسی قرار دادیم. نشان دادیم که روش پیشنهادی به طور نامشروط پایدار می‌باشد و جواب‌های عددی به جواب‌های دقیق با مرتبه  $O(\Delta t + (\Delta x)^2)$  همگرا هستند. همچنین روی دو نمونه عددی روش را تست نمودیم و نتایج عددی را با استفاده از نرم‌افزار متلب به صورت شکل‌ها و جداولی که با طول گام‌های زمانی و مکانی و همچنین آلفاهای متفاوتی ( $\alpha = 0.3, 0.5, 0.9$ ) بودند، به نمایش گذاشتیم. در پایان مشاهده می‌نماییم که نتایج عددی با نتایج تئوری سازگار هستند.



## فهرست منابع

- [1] R. Ozarslan, E. Bas, D. Baleanu, B. Acay, Fractional physical problems including wind-influenced projectile motion with Mittag-Leffler kernel, *J. AIMS Math*, 5(1), 2019, 467-481.
- [2] M. A. Firoozjaee, H. Jafari, A. Lia, D. Baleanu, Numerical approach of Fokker-Planck equation \(\dots\), 339, 2018, 367-373.
- [3] H. Aminikhah, A. H. Refahi Sheikhan, H. Rezazadeh, Sub-equation method for the fractional regularized long-wave equations with conformable fractional derivatives, *J. Scien. Iran*, 23(3), 2016, 1048-1054.
- [4] H. Aminikhah, A. H. Refahi Sheikhan, H. Rezazadeh, Exact solution of some nonlinear systems of partial differential equations by using the functional variable method, *J. Math*, 56(79), 2014, 103-116.
- [5] H. Aminikhah, A. H. Refahi Sheikhan, H. Rezazadeh, Stability analysis of distributed order fractional chen system, *J. Scien. World*, 2013, 1-13.
- [6] P. Gholamin, A. H. Refahi Sheikhan, A new three-dimensional chaotic system: Dynamical properties and simulation, *J. Phy*, 55(4), 2017, 1300-1309.
- [7] I. Karatay, N. Kale, A new difference scheme for fractional cable equation and stability analysis, *J. App. Math. Res.* 4 (1), 2015, 52-57.
- [8] S. Kumar, J. F. Gomez-Aguilar, Numerical solution of Caputo-Fabrizio time fractional distributed Order reaction-diffusion equation via Quasi Wavelet based numerical method, *J. App. Comp. Mecha.* 6(4), 2020, 848-861.
- [9] K. Moaddy, I. Hashim, S. Momani, Non-standard difference scheme for solving fractional-order Rossler chaotic and hyperchaotic systems, *J. Com. Math. Appl*, 62, 2011, 1068-1074.
- [10] K. Owolabi, Riemann-Liouville fractional derivative and application to model chaotic differential equations, *J. Frac. Diff. Appl*, 4(2), 2018, 99-1
- [11] R. Almeida, A. B. Malinowska, T. Monteiro, Fractional differential equations with a Caputo derivative with respect to a kernel function and their applications, *J. Math. Meth. Appl. Scien*, 2018, 1-20.
- [12] H. Aminikhah, A. Refahi Sheikhan, H. Rezazadeh, Exact solutions for the fractional differential equations by using the first integral method, *J. Non. Eng.* 4(1), 2015, 15-22.
- [13] S. I. Muslih, O. P. Agrawal, Riesz Fractional Derivatives and Fractional Dimensional Space, *J. Theo. Phys*, 49, 2010, 270-275.
- [14] S. Zeng, D. Baleanu, Y. Bai, G. Wu, Fractional differential equations of Caputo-Katugampola type and numerical solutions, *J. App. Math. Comp*, 315, 2017, 549-554.
- [15] A. Atangana, K. M. Owolabi, New numerical approach for fractional differential equations, *J. Math. Na*, 2018, 1-21.
- [16] M. Mashoof, A. H. Refahi Sheikhan, H. Saberi Najafi, Stability analysis of distributed-order Hilfer-Prabhakar systems based on inertia theory, *J. Math. Notes*, 104(1-2), 2018, 74-85.
- [17] H. Khan, R. Shah, P. Kumam, D. Baleanu, M. Arif: An efficient analytical technique, for the solution of fractional-order telegram equations, *J. Mathematics*, 2019, 1-19.

- [18] R. Shah, H. Khan, M. Arif, P. Kumam, Application of Laplace-Adomian decomposition method for the analytical solution of third-order dispersive fractional partial differential equations, *J. Entropy*, 2019, 1-17 .
- [19] M. Modanli, A. Akgul, Numerical solution of fractional telegraph differential equations by theta-method, *J. Eur. Phys. Spec. Top*, 226, 2017, 3693-3703.
- [20] S. Yadav, R. K. Pandey, A. K. Shukla, Numerical approximations of Atangana-Baleanu Caputo derivative and its application, *J. Cha. Soli. Fract*, 118, 2019, 58-64.
- [21] M. Modanli, Two numerical methods for fractional partial differential equation with nonlocal boundary value problem, *J. Adv. Diff. equ*, 2018, 1-19.
- [22] A. Atangana, R. Alqahtani, Numerical approximation of the space-time Caputo-Fabrizio fractional derivative and application to groundwater pollution equation, *J. Adv. Diff. equ*, 2016, 1-13.
- [23] A. Atangana, J. Nieto, Numerical solution for the model of RLC circuit via the fractional derivative without singular kernel, *J. Adv. Mech. Eng.* 7(10), 2015, 1-7.
- [24] Y. Zhou, Z. Luo, A Crank–Nicolson finite difference scheme for the Riesz space fractional-order parabolic-type sine-Gordon equation, *J. Ad. Diff. Equ*, 2018, 1-7.
- [25] U. Ali, F. A. Abdullah, A. I. Smail, Crank-Nicolson finite difference method for two-dimensional fractional sub-diffusion equation, *J. Inter. Appr. Scien. Comp*, 2, 2017, 18-29.
- [26] S. M. Oishi, J. Y. Yuan, J. A. Cuminato, D. E. Stewart, Stability analysis of Crank–Nicolson and Euler schemes for time-dependent diffusion equations, *J. Num. Math*, 55(2), 2015, 487-513.
- [27] I. Karatay, N. Kale, Finite Difference Method of Fractional Parabolic Partial Differential Equations with Variable Coefficients. *J. Cont. Math. Scien*, 9(16), 2014, 767-776.
- [28] I. Karatay, N. Kale, S. Bayramoglu, A new difference scheme for time fractional heat equations based on the Crank-Nicholson method. *J. Theo. App*, 16, 2013, 892-910.
- [29] Z. Liu, A. Cheng, X. Li, A fast-high order compact difference method for the fractional Cable equation, *J. Num. Metho. Par. Diff. equ*, 2018, 1-3
- [30] W. Rall, Core conductor theory and Cable properties of neurons, in: R. Poeter(Ed), *Handbook of Physiology: The Nervous System*, American Physiological Society, Bethesda, MD, 1977, 39-97, (Chapter 3).
- [31] S. Vitali, F. Mainardi, G. C. Castellani, Time fractional Cable equation and applications in neurophysiology, *J. Chaos Soli. Fract*, 102, 2017, 467-472.
- [32] C. M. Chen, F. Liu, K. Brrage, Numerical analysis for a variable-order nonlinear Cable equation, *J. Com. Appl. Math*, 236, 2011, 209-224.
- [33] R. Khanbabaee, M. Tabesh, Introduction to neurophysics. *J. Physics Research*, 15(4), 2016, 347-371.