

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال دهم، شماره پنجاه و دوم، بهمن و اسفند ۱۴۰۳

شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸۸X



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

استفاده از روش تکرار تغییرات برای حل معادلات استورم-لیوویل در ارتعاش سد خاکی

یاسر خلیلی^{۱*}، عبدالعلی نعمتی^۲

^(۱) گروه علوم پایه (آنالیز مجانبی)، دانشگاه علوم کشاورزی و منابع طبیعی ساری، ساری، ایران

^(۲) گروه ریاضی (آنالیز مجانبی)، دانشگاه مازندران، بابلسر، ایران

تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۲/۰۶/۲۱

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۱/۰۳/۰۹

چکیده

جابجایی و حرکت سدهای خاکی در زمان وقوع زمین لرزه را می‌توان به کمک معادلات استورم-لیوویل بیان کرد. روش‌های تحلیلی و عددی ابزارهای مفید و مناسب برای حل این گونه مسئله‌ها می‌باشند. در تحقیق حاضر، معادله حرکت و جابجایی سد خاکی وقتی که فشاری به صورت $\tau_{yz} = G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \right)$ بر آن وارد می‌شود، در نظر گرفته شده و به کمک روش عددی (روش تکرار تغییرات) جوابی برای معادله برآمده از این جابجایی که به صورت معادله پنسیل می‌باشد، ارائه می‌شود.

واژه‌های کلیدی: سد خاکی، فشار برشی، پنسیل، روش تکرار تغییرات.

۱- مقدمه

یکی از موضوعات مهم در فیزیک و مهندسی می‌باشد. لذا روش‌هایی برای بدست آوردن این جواب‌ها توسط محققین مطالعه و ارائه شده است [۶,۷,۸,۹]. روش تکرار تغییرات (VIM) یکی از ابزارهای مهم در این زمینه می‌باشد که مورد توجه محققین قرار گرفته است [۱۰,۱۱,۱۲,۱۳].

در این مقاله ابتدا مبانی نظری درباره روش تکرار تغییرات (VIM) را بیان می‌کنیم. سپس در بخش بعدی جوابی را برای مسئله مطرح شده در جابجایی سد خاکی به کمک این روش ارائه می‌دهیم. در بخش پایانی نیز نتیجه تحقیق آورده می‌شود.

۲- مبانی تئوری

روش‌های عددی شرایطی فراهم می‌کنند که بتوان جواب تقریبی برای مسئله‌هایی که دارای جواب دقیق نمی‌باشند را بدست آورد. یکی از این روش‌ها، روش عددی تکرار تغییرات (VIM) می‌باشد که در کار-های آلتیمان، هی و راوی کاند دیده می‌شود و می‌تواند برای مسئله ما کارا باشد (ببینید منابع [۱۰,۱۱,۱۲,۱۳]). در این روش با تکرار تابع اصلاح تقریبات متوالی جواب ارائه می‌شود که می‌توان معادلات دیفرانسیل با شرایط اولیه و مرزی را حل کرد. روش تکرار تغییرات (VIM) در لم زیر آورده شده است [۸,۱۰,۱۱,۱۳].

لم ۲-۱: معادله غیر خطی زیر را در نظر بگیرید:

$$(1) L[u(t)] + N[u(t)] = g(t),$$

که در آن L و N به ترتیب عملگرهای خطی و غیر خطی و $g(t)$ تابع پیوسته می‌باشد. معادله انتگرالی زیر که شاخصه اصلی این روش می‌باشد به صورت

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \int_{t_0}^t \mu \{L[u_n(s)] + N[u_n(s)] - g(s)\} ds, \quad (2)$$

قوانین فیزیک به کمک روابط ریاضی می‌توانند رفتار بسیاری از مسائل طبیعی را بیان کنند. مسئله واکنش و جابجایی سدهای خاکی در شرایط مختلف بویژه در زمان وقوع زمین لرزه‌ها از جمله مسائلی هستند که می‌توان آن را به صورت یک مسئله مقدار مرزی بیان و مطالعه کرد (ببینید منابع [۱,۲,۳,۴,۵]). در این مسئله، شکل هندسی و جنس مواد به کار رفته در سد می‌تواند از عوامل مهم و تاثیرگذار در لرزش و جابجایی باشد. در کنار این عوامل، فشار وارده بر سد خاکی که با استفاده از ضریب (استاندارد) و کرنش برشی قابل بیان است، در طرح مدل ریاضی مسئله تعیین کننده می‌باشد. به عنوان نمونه در کار [۴]

نعمتی و خلیلی نشان دادند که اگر فشاری به صورت

$$\tau_{yz} = G \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \right)$$

بر سد خاکی وارد شود

مدل ریاضی مسئله یک مدل استورم-لیوویل می‌باشد که طیف در عملگر آن ظاهر می‌گردد. به نوعی می‌توان گفت که مدل ریاضی این مسئله به صورت معادله پنسیل می‌باشد. آن‌ها در مطالعه [۲] نیز نشان

دادند که با در نظر گرفتن فشار $\tau_{yz} = G \frac{\partial u}{\partial z}$ معادله حرکت سد یک معادله کلاسیک استورم-لیوویل است که مسئله عکس را برای این مدل بکارگیری و نتایجی ارائه دادند. مطالعه حرکت سد توسط دانشمندانی مانند داکولاس و رحمان بدون بکارگیری معادلات استورم-لیوویل نیز صورت گرفته است که با کمک توابع بسل، جواب تحلیلی برای مسئله ارائه شده است [۱,۵].

معادلات دیفرانسیلی که در مسائل فیزیکی بوجود می‌آیند اغلب بسیار پیچیده‌اند و حتی اگر راه حل دقیقی برای آن‌ها قابل ارائه باشد، نیاز به محاسبات پیچیده دارد. بدست آوردن جواب معادلات دیفرانسیلی که در شرایط اولیه یا مرزی صدق کنند،

$$V(y) := y(H) = 0, \quad (5)$$

و دارای جواب تقریبی u_n است. در این رابطه μ مضرب لاکرانژ و \tilde{u}_n با تغییرات محدود یعنی $\delta \tilde{u}_n = 0$ در نظر گرفته می‌شود. برای مسائل خطی می‌توان جواب دقیق با توجه به مضرب لاکرانژ معلوم شده با یک مرحله تکرار بدست آورد.

در بخش بعدی، این روش برای حل مسئله مورد مطالعه در این مقاله به کار گرفته می‌شود.

۳- نتایج اصلی

یکی از پارامترهای مهم در بیان حرکت سد، فشار وارده بر آن می‌باشد که در تعیین این فشار، کرنش برشی و ضریب (استاندارد) برشی که با توجه به شکل سد بیان می‌شود، نقش موثر دارند. در واقع فشار وارد بر سد، مهمترین فاکتور در ساخت مدل ریاضی مسئله می‌باشد که در تحقیق [۴] نویسندگان، جابجایی سد را وقتی فشاری به صورت

$$-y'' + \left(\frac{1}{-2z} \rho + \frac{-1}{4z^2} \right) y = \lambda \frac{-\rho_s}{G_b} y, \quad h \leq z < H, \quad (6)$$

در نظر بگیرید. با در نظر گرفتن شرایط اولیه

$$y'(h) = -\beta_1 \rho - \beta_0, \quad y(h) = 1,$$

این معادله جوابی به صورت

$$y_0(z) = \frac{(\beta_1 \rho + \beta_0) \cos \rho h - \rho \sin \rho h}{-\rho} \times \sin \rho z + \frac{(\beta_1 \rho + \beta_0) \sin \rho h + \rho \cos \rho h}{\rho} \times \cos \rho z, \quad (7)$$

دارد. با توجه به روش تکرار تغییرات (VIM)، تابع اصلاح زیر

برای مسائل خطی می‌توان جواب دقیق با توجه به مضرب لاکرانژ معلوم شده با یک مرحله تکرار بدست آورد.

در بخش بعدی، این روش برای حل مسئله مورد مطالعه در این مقاله به کار گرفته می‌شود.

یکی از پارامترهای مهم در بیان حرکت سد، فشار وارده بر آن می‌باشد که در تعیین این فشار، کرنش برشی و ضریب (استاندارد) برشی که با توجه به شکل سد بیان می‌شود، نقش موثر دارند. در واقع فشار وارد بر سد، مهمترین فاکتور در ساخت مدل ریاضی مسئله می‌باشد که در تحقیق [۴] نویسندگان، جابجایی سد را وقتی فشاری به صورت

بر آن وارد می‌شود بررسی

در این مقاله نشان داده شده است که وقتی چنین فشاری بر سد وارد شود، معادله جابجایی آن به صورت یک معادله پنسیل به فرم

$$-y'' + (\rho q_1(z) + q_0(z)) y = \lambda r(z) y, \quad h \leq z < H, \quad (8)$$

است که در آن توابع

$$q_0(z) = \frac{m^2 - 1}{4z^2}, \quad q_1(z) = \frac{m + 1}{-2z}$$

و $r(z) = \frac{-\rho_s H^m}{G_b z^m}$ پارامتر طیفی می‌باشد. همچنین ثابت می‌شود که با توجه به شرایط جابجایی سد در پایه و فشار آب در تاج آن، شرایط مرزی مسئله را می‌توان به شکل طیفی و به صورت

$$U(y) := y'(h) + (\beta_1 \rho + \beta_0) y(h) = 0, \quad (9)$$

حال با جایگذاری (۱۱) در رابطه (۸)، معادله انتگرالی

$$\begin{aligned}
 y_{n+1}(z) &= y_n(z) \\
 &+ \int_h^z \frac{\sin(\rho(z-s))}{\rho} \left\{ \frac{d^2 y_n(s)}{ds^2} \right\} ds \\
 &+ \int_h^z \frac{\sin(\rho(z-s))}{\rho} \left\{ \left(\frac{\rho}{2s} + \frac{1}{4s^2} \right) \tilde{y}_n(s) \right\} ds \\
 &+ \int_h^z \frac{\sin(\rho(z-s))}{\rho} \{ \lambda y_n(s) \} ds.
 \end{aligned}
 \tag{۱۲}$$

بنابراین با جایگذاری جواب اولیه $y_0(z)$ در (۱۲) به جواب

$$\begin{aligned}
 y_1(z) &= \frac{(\beta_1 \rho + \beta_0) \cos \rho h - \rho \sin \rho h}{-\rho} \\
 &\quad \times \sin \rho z \\
 &+ \frac{(\beta_1 \rho + \beta_0) \sin \rho h + \rho \cos \rho h}{\rho} \\
 &\quad \times \cos \rho z \\
 &+ \int_h^z \frac{\sin(\rho(z-s))}{\rho} \left(\frac{\rho}{2s} + \frac{1}{4s^2} \right) \\
 &\quad \left\{ \frac{(\beta_1 \rho + \beta_0) \cos \rho h - \rho \sin \rho h}{\rho} \right. \\
 &\quad \quad \times \sin \rho s \\
 &\quad \quad \left. + \frac{(\beta_1 \rho + \beta_0) \sin \rho h + \rho \cos \rho h}{\rho} \right. \\
 &\quad \quad \left. \times \cos \rho s \right\} ds,
 \end{aligned}
 \tag{۱۳}$$

دست می‌یابیم.

حال با استفاده از نرم افزار *Maple* می‌توان جواب تقریبی زیر را ارائه داد:

$$\begin{aligned}
 y_{n+1}(z) &= y_n(z) \\
 &+ \int_h^z \mu \left\{ \frac{d^2 y_n(s)}{ds^2} \right\} ds \\
 &+ \int_h^z \mu \left\{ \left(\frac{\rho}{2s} + \frac{1}{4s^2} \right) \tilde{y}_n(s) \right\} ds \\
 &+ \int_h^z \mu \{ \lambda y_n(s) \} ds,
 \end{aligned}
 \tag{۸}$$

که در آن μ مضرب لاکرانژ و \tilde{y}_n با تغییرات محدود فرض شده است، را در نظر می‌گیریم. بنابراین

$$\begin{aligned}
 \delta y_{n+1}(z) &= \delta y_n(z) \\
 &+ \delta \int_h^z \mu \left\{ \frac{d^2 y_n(s)}{ds^2} \right\} ds \\
 &+ \delta \int_h^z \mu \left\{ \left(\frac{\rho}{2s} + \frac{1}{4s^2} \right) \tilde{y}_n(s) \right\} ds \\
 &+ \delta \int_h^z \mu \{ \lambda y_n(s) \} ds \\
 &= \delta y_n(z) + \mu(s) \delta y_n'(s) \Big|_{s=z} \\
 &\quad - \mu'(s) \delta y_n(s) \Big|_{s=z} \\
 &\quad + \int_h^z \left\{ \frac{d^2 \mu(s)}{ds^2} + \lambda \mu(s) \right\} \delta y_n(s) ds \\
 &= (1 - \mu'(z)) \delta y_n(z) \\
 &\quad + \mu(z) \delta y_n'(z) \\
 &\quad + \int_h^z \left\{ \frac{d^2 \mu(s)}{ds^2} + \lambda \mu(s) \right\} \delta y_n(s) ds.
 \end{aligned}
 \tag{۹}$$

از روابط بالا شرایط ایستایی زیر را داریم:

$$\begin{cases}
 \frac{d^2 \mu(s)}{ds^2} + \lambda \mu(s) = 0, \\
 \mu(z) = 0, \mu'(z) = 1.
 \end{cases}
 \tag{۱۰}$$

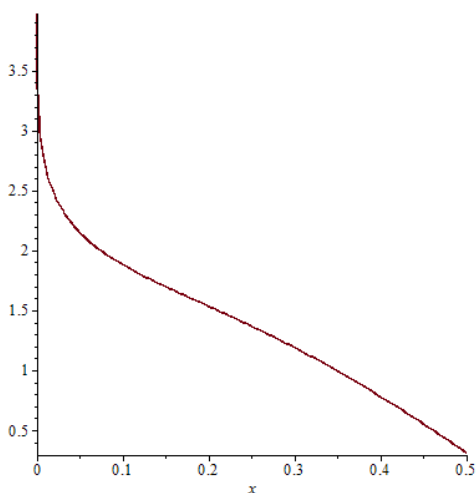
بنابراین مضرب لاکرانژ به صورت

$$\mu = \frac{1}{\rho} \sin(\rho(z-s)),
 \tag{۱۱}$$

بدست می‌آید.

۴- نتیجه‌گیری

از آن جایی که علوم ریاضی به‌ویژه معادلات دیفرانسیل می‌توانند در بحث‌های کاربردی مورد استفاده قرار گیرند، ما نیز سعی کرده‌ایم تا از معادلات استورم-لیوویل در یک مسئله کاربردی استفاده کنیم. لذا واکنش و حرکت سدهای خاکی را مورد مطالعه قرار دادیم و با در نظر گرفتن مسئله طیفی معادله استورم-لیوویل نتایجی ارائه نموده‌ایم. نتایج حاصله از این مقاله می‌تواند در شاخه‌های مهندسی مربوط به سدهای خاکی قابل استفاده باشد.



شکل ۱: جواب تقریبی به ازای $\lambda = 4$

$$y(z) \cong y_1(z)$$

$$= -\frac{(\beta_1 \rho + \beta_0) \cos \rho h - \rho \sin \rho h}{\rho}$$

$$\times \sin \rho z$$

$$+ \frac{(\beta_1 \rho + \beta_0) \sin \rho h + \rho \cos \rho h}{\rho}$$

$$\times \cos \rho z$$

$$+ \left(\frac{\ln h}{4} - \frac{1}{4} Ci(2h\rho) \right) \cos \rho z$$

$$- \frac{1}{4} Si(2h\rho) \sin \rho z$$

$$+ \left(-\frac{\ln z}{4} + \frac{1}{4} Ci(2\rho z) \right) \cos \rho z$$

$$+ \frac{1}{4} Si(2\rho z) \sin \rho z$$

$$+ \left(-\frac{\ln h}{4} - \frac{1}{4} Ci(2h\rho) \right) \sin \rho z$$

$$+ \frac{1}{4} Si(2h\rho) \cos \rho z$$

$$+ \left(\frac{\ln z}{4} + \frac{1}{4} Ci(2\rho z) \right) \sin \rho z$$

$$- \frac{1}{4} Si(2\rho z) \cos \rho z$$

$$- \frac{1}{4h\rho} ((h\rho Si(2\rho z) - h\rho Si(2h\rho)) \cos \rho z$$

$$- h\rho Ci(2\rho z) \sin \rho z$$

$$+ (h\rho Ci(2\rho z) - \sin \rho h \cos \rho h) \sin \rho z$$

$$+ (-\cos^2 \rho h + 1) \cos \rho z$$

$$- \frac{1}{4h\rho} ((h\rho Si(2\rho z) - h\rho Si(2h\rho)) \sin \rho z$$

$$- h\rho Ci(2\rho z) \cos \rho z$$

$$- (h\rho Ci(2h\rho) + \sin \rho h \cos \rho h) \cos \rho z$$

$$- \cos^2 \rho z \sin \rho z).$$

جواب تقریبی $y(z)$ به ازای $h = 10$ ، $\lambda = 4$

، $\beta_0 = \beta_1 = 1$ در شکل ۱ آورده شده است.

nonlinear heat transfer and porous media equations. *J. Computational and Applied Mathematics*, ۲۰۷, ۲۰۰۷, ۲۴-۳۴.

[۸] J.-H. He. Variational iteration method-a kind of non-linear analytical technique: some examples. *International J. Non-Linear Mechanics*, ۳۴, ۱۹۹۹, ۶۹۹-۷۰۸.

[۹] E. Yilmaz, M. Inc and H. Koyunbakan. A numerical implementation of the decomposition method for Dirac system. *Turkish J. Science and Technology*, ۴, ۲۰۰۹, ۱۱۱-۱۱۹.

[۱۰] D. Altmtan and O. Ugur. Variational iteration method for Sturm-Liouville differential equations. *Computers and Mathematics with Applications*, ۵۸, ۲۰۰۹, ۳۲۲-۳۲۸.

[۱۱] J.-H. He. Variational iteration method-some recent results and new interpretations. *J. Computational and Applied Mathematics*, ۲۰۷, ۲۰۰۷, ۳-۱۷.

[۱۲] H. Khaleghi, D.D. Ganji and A. Sadighi. Application of variational iteration and homotopy perturbation methods to nonlinear heat transfer equations with variable coefficients. *Numerical Heat Transfer, Part A* ۵۲, ۲۰۰۷, ۲۵-۴۲.

[۱۳] A.S.V. Ravi Kanth and K. Aruna. He's variational iteration method for treating nonlinear singular boundary value problems. *Computers and Mathematics with Applications*, ۶۰, ۲۰۱۰, ۸۲۱-۸۲۹.

[۱۴] R.Kh. Amirov and A.A. Nabiev. Inverse problems for the quadratic

فهرست منابع

[۱] P. Dakoulas and G. Gazetas. A class of inhomogeneous shear models for seismic response of dams and embankments. *J. Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, ۴, ۱۹۸۵, ۱۶۶-۱۸۲.

[۲] A. Neamaty and Y. Khalili. Analysis of the seismic response of earth dams using inverse Sturm-Liouville problem. *J. Advanced Research in Dynamical and Control Systems*, ۶(۴), ۲۰۱۴, ۶۸-۷۸.

[۳] A. Neamaty and Y. Khalili. Inverse spectral problems for singular Sturm-Liouville operators. *Malaysian J. Mathematical Sciences*, ۱۲, ۲۰۱۸, ۱۴۳-۱۶۰.

[۴] A. Neamaty and Y. Khalili. Use of the Sturm-Liouville problems in the seismic response of earth dams and embankments. *Caspian J. Mathematical Sciences*, ۴(۱), ۲۰۱۵, ۹-۱۵.

[۵] M. Rahman. *Integral Equations and their Applications*. Southampton: WIT Press, ۲۰۰۷.

[۶] N. Bildik and A. Konuralp. The use of variational iteration method, differential transform method, and Adomian decomposition method for solving different types of nonlinear partial differential equations. *International J. Nonlinear Science and Numerical Simulation*, ۷, ۲۰۰۶, ۶۵-۷۰.

[۷] D. D. Ganji and A. Sadighi. Application of homotopy-perturbation and variational iteration methods to

- parameter. *Math. Meth. Appl. Sci.*, ۴۰(۸), ۲۰۱۷, ۳۱۹۰-۳۱۹۶.
- [۲۲] C. F. Yang and Y.X. Guo. Determination of a differential pencil from interior spectral data. *J. Mathematical Analysis and Applications*, ۳۷۵, ۲۰۱۱, ۲۸۴-۲۹۳.
- [۲۳] C.F. Yang. Uniqueness theorems for differential pencils with eigenparameter boundary conditions and transmission conditions. *J. Differential Equations*, ۲۵۵, ۲۰۱۳, ۲۶۱۵-۲۶۳۵.
- [۲۴] C.F. Yang and X.J. Yu. Determination of differential pencils with spectral parameter dependent boundary conditions from interior spectral data. *Math. Meth. Appl. Sci.*, ۳۷(۶), ۲۰۱۴, ۸۶۰-۸۶۹.
- [۲۵] V. Yurko. Inverse problems for non selfadjoint quasi-periodic differential pencils. *Anal. Math. Phys.*, ۲(۳), ۲۰۱۲, ۲۱۵-۲۳۰.
- [۲۶] V. Yurko. Inverse problem for quasi-periodic differential pencils with jump conditions inside the interval. *Complex Anal. Oper. Theory*, ۱۰(۶), ۲۰۱۶, ۱۲۰۳-۱۲۱۲.
- pencil of the Sturm-Liouville equations with impulse. *Abstract and Applied Analysis*, ۲۰۱۳, Article ID ۳۶۱۹۸۹, ۲۰۱۳, ۱۰ pages.
- [۱۵] S.A. Buterin and C.T. Shieh. Incomplete inverse spectral and nodal problems for differential pencils. *Results. Math.*, ۶۲, ۲۰۱۲, ۱۶۷-۱۷۹.
- [۱۶] S.A. Buterin and V.A. Yurko. Inverse problems for second-order differential pencils with Dirichlet boundary conditions. *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, ۲۰, ۲۰۱۲, ۸۵۵-۸۸۱.
- [۱۷] Y. Cakmak and S. Isik. Recovery of the impulsive diffusion operator with discontinuous coefficient. *Appl. Math. Inf. Sci.*, ۸(۵), ۲۰۱۴, ۲۲۶۷-۲۲۷۵.
- [۱۸] Y. Cakmak and S. Isik. Half inverse problem for the impulsive diffusion operator with discontinuous coefficient. *Filomat*, ۳۰(۱), ۲۰۱۶, ۱۵۷-۱۶۸.
- [۱۹] G. Freiling and V. Yurko. Recovering non self adjoint differential pencils with non separated boundary conditions. *Applicable Analysis*, ۹۴(۸), ۲۰۱۵, ۱۶۴۹-۱۶۶۱.
- [۲۰] H. Koyunbakan and E.S. Panakhov. Half-inverse problem for diffusion operators on the finite interval. *J. Math. Anal. Appl.*, ۳۲۶, ۲۰۰۷, ۱۰۲۴-۱۰۳۰.
- [۲۱] Y.P. Wang, and V.A. Yurko. Inverse spectral problems for differential pencils with boundary conditions dependent on the spectral

