

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال یازدهم، شماره پنجاه و پنجم، مرداد و شهریور ۱۴۰۴

شماره شایا: ۵۸۸۸-۲۵۸۸



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

اصول جداسازی در توپولوژی ساختاری

محمدظاهر کاظمی بانه^{۱*}، سیدناصر حسینی^۲

^(۱) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه کردستان، سنندج، ایران.

^(۲) گروه ریاضی محض، دانشکده ریاضی و علوم کامپیوتر، دانشگاه شهید باهنر، کرمان، ایران.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۲/۰۸/۰۳ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۳/۰۷/۱۱

چکیده

در مقاله [۵]، ساختار توپولوژی و توپولوژی ساختاری به صورت یک چهارتایی از تبدلات طبیعی و یک زوج از تابگون‌ها، تعریف شده است و بعضی مفاهیم کاتگوریکی مورد بررسی قرار گرفته است. در این مقاله مفهوم باز و بسته بودن در یک توپولوژی ساختاری روی یک شیء، اصول جداسازی T_0 ، T_1 ، T_2 تعریف و بعضی نتایج و معادل‌های آن‌ها در رشته فضاهای توپولوژیک استاندارد و یک فضای توپولوژی معمولی مورد بحث و بررسی قرار می‌گیرد.

واژه‌های کلیدی: اصول جداسازی، توپولوژی ساختاری، ساختار توپولوژی، شیء باز، شیء بسته

۱- مقدمه

در مقاله [۳] مفهوم توپولوژی ساختاری و در مقاله [۵] رسته فضاهای توپولوژیکی ساختاری Stop تعریف و بعضی ویژگی‌های کاتگوریکی همچون برابرساز، ضرب دوتایی و حد متناهی در این رسته مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. در این بخش مفاهیم پایه‌ای مبحث مورد نظر را بیان و چند مثال برای تفهیم بهتر به فراخور مبحث مقاله آورده شده است. در بخش بعد ابتدا مفاهیم باز و بسته بودن در یک توپولوژی ساختاری روی یک شیء مانند X با توپولوژی ساختاری T_X را تعریف، سپس اصول جداسازی اولیه را بیان و بعضی نتایج و معادل‌های آنها را ثابت می‌کنیم. برای درک بیشتر مفاهیم و مباحث رسته‌ای به منابع [۱، ۶] مراجعه شود.

تعریف ۱-۱: فرض کنید $\mathcal{E}$ و C دو رسته باشند.

(i) زوج تابعگون‌های $C \xrightarrow{p} C \xrightarrow{op} \mathcal{E}$ ، را یک پایه روی زوج $(C, \mathcal{E})$ می‌نامیم، به طوری که C به طور متناهی کامل است.

(ii) یک ساختار توپولوژیکی وابسته به پایه $(\mathbb{P}, P)$ و یا $(\mathbb{P}, P) -$ ساختار توپولوژیکی چهارتایی $S = (b, t, \wedge, \vee)$ از تبدیلات طبیعی می‌باشد که در آن:

$$P \circ \mathbb{P} \xrightarrow{\vee} \mathbb{P}, S \circ \mathbb{P} \xrightarrow{\wedge} \mathbb{P}, 1 \xrightarrow{t} \mathbb{P}, 1 \xrightarrow{b} \mathbb{P}$$

در دیاگرام فوق $S: C \longrightarrow C$ تابعگون مربع و ۱ یک شیء نهایی است.

(iii) یک توپولوژی ساختاری روی شیء X از رسته $\mathcal{E}$ وابسته به S و یا به طور اختصار $S -$ توپولوژی ساختاری روی

$$X \text{ یک } C - \text{مانومورفیسم } \mathbb{P}(X) \xrightarrow{\tau_X} T_X \text{ است که در آن:}$$

$$P(T_X) \xrightarrow{\vee_X} T_X \text{ و } T_X \times T_X \xrightarrow{\wedge_X} 1, 1 \xrightarrow{t_X} T_X, 1 \xrightarrow{b_X} T_X$$

همچنین دیاگرام‌های زیر جابجایی هستند:

$$\begin{array}{ccc} & T_X & \\ tx \nearrow & \downarrow \tau_X & \\ ' & \xrightarrow{tx} \mathbb{P}(X) & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & T_X & \\ bx \nearrow & \downarrow \tau_X & \\ ' & \xrightarrow{bx} \mathbb{P}(X) & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} P(T_X) & \xrightarrow{\vee_X} & T_X \\ P(\tau_X) \downarrow & \searrow & \downarrow \tau_X \\ P(\mathbb{P}(X)) & \xrightarrow{\vee_X} & \mathbb{P}(X) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} T_X \times T_X & \xrightarrow{\wedge_X} & T_X \\ \tau_X \times \tau_X \downarrow & \searrow & \downarrow \tau_X \\ \mathbb{P}(X) \times \mathbb{P}(X) & \xrightarrow{\wedge_X} & \mathbb{P}(X) \end{array}$$

در این حالت (X, τ_X) را یک فضای توپولوژی ساختاری می‌نامیم. بعضی مواقع به جای (X, τ_X) از زوج (X, τ_X) استفاده می‌کنیم. ببینید [۳، ۵].

تعریف ۲-۱: فضاهای S -توپولوژی (X, τ_X) و (Y, τ_Y) مفروضد. ε -مورفیسم $f: X \longrightarrow Y$ را پیوسته ساختاری یا S -پیوسته می‌نامیم هرگاه C -مورفیسم $T_f: T_Y \longrightarrow T_X$ چنان موجود باشد که دیاگرام زیر جابجایی گردد.

$$\begin{array}{ccc} T_X & \xrightarrow{\tau_X} & \mathbb{P}(X) \\ T_f \uparrow & \quad \quad & \uparrow \mathbb{P}(f) \\ T_Y & \xrightarrow{\tau_Y} & \mathbb{P}(Y) \end{array}$$

در این حالت مورفیسم f را به صورت $(Y, \tau_Y) \longrightarrow (X, \tau_X)$ می‌نویسیم. ببینید [۳]

مثال ۳-۱: در توپولوژی استاندارد تابعگونی‌های $Set \xrightarrow{P} Set \xrightarrow{\mathbb{P}} Set^{op}$ به ترتیب $(\mathbb{P})$ تابعگون ناوردا و (P) تابعگون هموردای مجموعه توانی هستند. چهارتایی تبدیلات طبیعی $S = (b, t, \wedge, \vee)$ روی مجموعه X به ترتیب (تهی، X ، اشتراک و اجتماع):
 $\emptyset \rightarrow 1, b_X: 1 \rightarrow \emptyset, t_X: 1 \rightarrow X, A \cap B = A \wedge B, \bigcup A_i = \vee A_i$ می‌باشد. T_X زیرمجموعه‌ای از مجموعه توانی $\mathbb{P}(X)$ و $T_X \rightarrow \mathbb{P}(X)$ نگاشت شمول است. ببینید [۳].

مثال ۴-۱: در توپولوژی فازی نوع اول تابعگونی‌های $Set \xrightarrow{P} Set \xrightarrow{\mathbb{P}} Set^{op}$ به صورت $\mathbb{P}(X) = I^X$ و تابعگون P همان تابعگون همورداری مجموعه توانی است. به ازای هر $a \in [0, 1]$ اگر $\underline{a}$ را تابع ثابت $\underline{a}(t) = a$ در نظر بگیریم، آنگاه چهارتایی تبدیلات طبیعی به صورت زیر است.
 $\underline{0} = b_X(1), \wedge \text{ رسند (meet) و } \vee \text{ وست (join) هستند. تابع } T_X \rightarrow I^X \text{ نگاشت شمول است. ببینید [۳].}$

مثال ۵-۱: در توپولوژی فازی نوع دوم تمام شرایط توپولوژی فازی نوع اول برقرار است با این اضافه که تمام نگاشت‌های ثابت در T_X موجود است. ببینید [۳]

گزاره ۶-۱: رسته فضاهای توپولوژی فازی نوع دوم یک زیررسته کامل از رسته فضاهای توپولوژی فازی نوع اول است.

مثال ۷-۱: فرض کنید $(X, \leq)$ یک رده مرتب جزئی و به عنوان یک رسته، کامل و دارای خاصیت توزیع‌پذیری رسند (meet) دوتایی نسبت به هر وست (join) دلخواهی باشد. تابعگونی‌های

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(x \leq) \text{ و } \mathbb{P}(X) = \downarrow x = \{a \in X : a \leq x\} \text{ به صورت } (X, \leq)^{op} &\xrightarrow{\mathbb{P}} Set \xrightarrow{P} Set \\ b_X: 1 \longrightarrow \downarrow x &\text{ همچنین } \downarrow y = - \wedge x: \downarrow y \longrightarrow \downarrow x \\ x \text{ با ضابطه } b_X(1) = 0, t_X: 1 \longrightarrow \downarrow x &\text{ با ضابطه } t_X(1) = x \text{ و } \wedge_X(a, b) = a \wedge b \\ \vee_X(A) = \bigvee_{a \in A} a \text{ با ضابطه } \vee_X(P(\downarrow x)) &\longrightarrow \downarrow x \\ \downarrow x \text{ یک توپولوژی ساختاری است، هرگاه } T_X \text{ نسبت به رسند دوتایی و وست دلخواه بسته باشد. ببینید [۵]} \end{aligned}$$

مثال ۸-۱: اگر $P(X)$ مجموعه توانی مجموعه X باشد، آنگاه $(P(X), \subseteq)$ حالت خاص و ظریفی از مثال فوق است. ببینید [۵]

۲- اصول جداسازی

در این فصل ابتدا مفاهیم باز و بسته بودن، سپس اصول جداسازی در ساختار توپولوژی را تعریف می‌کنیم. در نهایت با وجود شرایط مورد نیاز، بعضی از معادل‌ها و نتایج همانند در توپولوژی استاندارد را مورد بررسی قرار می‌دهیم. فرض کنید $S = (b, t, \wedge, \vee)$ یک ساختار توپولوژی روی پایه $(\mathbb{P}, P)$ باشد. با در نظر گرفتن تابعگونی ثابت $\varepsilon^{op} \xrightarrow{1} C^{op}$ با مقدار شیء نهایی در رشته C فرض کنید $\varepsilon^{op} \xrightarrow{c(1, \mathbb{P})} Set$ ترکیب تابعگونی‌های باشد.

$$\varepsilon^{op} \xrightarrow{\langle 1, \mathbb{P} \rangle} C^{op} \times C \xrightarrow{C(-, -)} Set$$

از آنجا که تابعگونی‌های $\varepsilon^{op} \xrightarrow{c(1, So\mathbb{P})} Set$ و $\varepsilon^{op} \xrightarrow{c(1, \mathbb{P})} Set \xrightarrow{s} Set$ سادگی می‌توان از تبدیل طبیعی $\mathbb{P} \xrightarrow{\wedge} So\mathbb{P} \xrightarrow{\wedge} C(1, \mathbb{P})$ تبدیل طبیعی $SoC(1, \mathbb{P}) \xrightarrow{\wedge} C(1, \mathbb{P})$ را به دست آورد که در آن به ازای هر $X \in \varepsilon$ ، $a, b \in C(1, \mathbb{P}(X))$ و ما آن را به صورت $a \wedge b$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲-۱: ساختار توپولوژی $S = (b, t, \wedge, \vee)$ وابسته به پایه $(\mathbb{P}, P)$ زیرشیء‌های $a: 1 \rightarrow \mathbb{P}(X)$ و $b: 1 \rightarrow \mathbb{P}(X)$ از $\mathbb{P}(X)$ مفروضند. گوییم: a کمتر از b یا b شامل a است و می‌نویسیم $a \leq b$ هر گاه $a \wedge b = a$ با فرض آنکه $\wedge_X$ به ازای هر X دارای ویژگی‌های خودتوانی، جابجایی و شرکت‌پذیری باشد، آنگاه $C(1, \mathbb{P}(X))$ یک $\wedge_X -$ نیم مشبکه است. [7, 2] با این فرض:

لم ۲-۲: فرض کنید $a, b, c, d \in C(1, \mathbb{P}(X))$ در این صورت:

(i) $a \wedge b$ بزرگترین کران پایین $\{a, b\}$ است.

(ii) رابطه $\leq$ روی $C(1, \mathbb{P}(X))$ یک رابطه ترتیب جزئی است.

(iii) اگر $a \leq b$ و $c \leq d$ آنگاه $a \wedge c \leq b \wedge d$.

اثبات: اثبات مستقیم است.

تعریف ۲-۳: فرض کنید $S = (b, t, \wedge, \vee)$ یک $(\mathbb{P}, P) -$ ساختار، $T_X \xrightarrow{\tau_X} \mathbb{P}(X)$ یک توپولوژی ساختاری روی X و $a: 1 \rightarrow \mathbb{P}(X)$ و $b: 1 \rightarrow \mathbb{P}(X)$ دو زیرشیء از $\mathbb{P}(X)$ باشند.

(i) a و b را جدا از هم گوییم هرگاه $a \wedge b = b_X$.

(ii) a را در X نسبت به توپولوژی τ_X باز گوییم هرگاه روی $\tau_X: T_X \rightarrow \mathbb{P}(X)$ تجزیه شود، بدین معنی که مورفیس $a': 1 \rightarrow T_X$ چنان موجود باشد که: $a = \tau_X a'$.

با فرض وجود تابع یک به یک $\{0\}_X: \varepsilon(1, X) \rightarrow C(1, \mathbb{P}(X))$ ، با این ضابطه که هر $x: 1 \rightarrow X$ را به زیرشیء نمادین $\{x\}_X: 1 \rightarrow \mathbb{P}(X)$ می‌نگارد و آن را تابع تک عضوی می‌نامیم، می‌توان اصول جداسازی T_2, T_1, T_0 را به صورت زیر تعریف کرد.

تعریف ۴-۲: فرض کنید $S = (b, t, \wedge, \vee)$ یک $(\mathbb{P}, P)$ ساختار، $T_X \xrightarrow{\tau_X} \mathbb{P}(X)$ یک توپولوژی ساختاری روی X باشد. گوییم: فضای توپولوژی ساختاری (X, τ_X) نسبت به تابع تک عضوی،

(i) T_0 است هر گاه به ازای هر دو زیرشیء متمایز $1 \xrightarrow{x_1} X \xrightarrow{x_2}$ یک زیرشیء باز $(\mathbb{P}X)$ $1 \rightarrow a$ چنان موجود باشد که $\{x_2\}x \wedge a = b_x$ و $\{x_1\}x \leq a$.

(ii) T_1 است هر گاه به ازای هر دو زیرشیء متمایز $1 \xrightarrow{x_1} X \xrightarrow{x_2}$ دو زیرشیء باز $(\mathbb{P}X)$ $1 \xrightarrow{a_1} 1 \xrightarrow{a_2}$ چنان یافت شود که:

$$\{x_1\}x \wedge a_2 = b_x \text{ و } \{x_2\}x \leq a_2, \{x_2\}x \wedge a_1 = b_x, \{x_1\}x \leq a_1$$

(iii) T_2 یا هاوسدورف است هر گاه به ازای هر دو زیرشیء متمایز $1 \xrightarrow{x_1} X \xrightarrow{x_2}$ دو زیرشیء باز جدا از هم

$$1 \xrightarrow{a_1} (\mathbb{P}X) \xrightarrow{a_2} 1 \text{ چنان موجود باشد که } a_1 \wedge a_2 = b_x, \{x_2\}x \wedge a_1 = b_x, \{x_1\}x \leq a_1$$

گزاره ۵-۲: هر فضای T_1 ، یک فضای T_0 و هر فضای T_2 ، یک فضای T_1 است.

فرض کنید $\wedge$ - نیم شبکه $C(1, \mathbb{P}(X))$ یک جبر بوولی باشد، بدین صورت که به ازای هر دو زیرشیء $a: 1 \rightarrow \mathbb{P}(X)$ و $b: 1 \rightarrow \mathbb{P}(X)$ وست $a \vee b$ (که لزوماً تبدیل طبیعی وست در ساختار توپولوژی نیست) به صورت $a \vee b = \sup\{a, b\}$ و به ازای هر زیرشیء $a: 1 \rightarrow \mathbb{P}(X)$ زیرشیء $a^c: 1 \rightarrow \mathbb{P}(X)$ چنان موجود باشد که $a \vee a^c = b_x$. به وضوح b_x و t_x به ترتیب اعضای مینیمم و ماکزیمم $C(1, \mathbb{P}(X))$ می باشد. با شرایط فوق می توان مفهوم بسته بودن را تعریف کرد.

تعریف ۶-۲: زیرشیء $a: 1 \rightarrow \mathbb{P}(X)$ از جبر بوولی $C(1, \mathbb{P}(X))$ را بسته می نامیم هر گاه $a^c: 1 \rightarrow \mathbb{P}(X)$ یک زیرشیء باز باشد.

قضیه ۷-۲: فرض کنید (X, T_X) یک فضای توپولوژی ساختاری و $C(1, \mathbb{P}(X))$ یک جبر بوولی باشد. در این

صورت X هاوسدورف است اگر و تنها اگر به ازای هر دو شیء متمایز $1 \xrightarrow{x_1} X \xrightarrow{x_2}$ دو زیرشیء باز $(\mathbb{P}X)$ $1 \rightarrow a$ و $1 \rightarrow b$ چنان بتوان یافت که $b^c \leq a \leq \{x\}$ و $\{y\} \wedge b^c = b_x$.

اثبات: فرض کنید (X, T_X) یک فضای هاوسدورف باشد. لذا به ازای دو زیرشیء متمایز $1 \xrightarrow{x} X \xrightarrow{y}$ زیر شیء های

$$1 \xrightarrow{a} (\mathbb{P}X) \xrightarrow{b} 1 \text{ چنان موجودند که } \{x\} \leq a \text{ و } \{y\} \leq b. \text{ بنابراین}$$

$$a \leq b^c \text{ لذا } a = a \wedge t_x = a \wedge (b^c)(a \wedge b) \vee (a \wedge b^c) = b_x \vee (a \wedge b^c) = a \wedge b^c$$

$$\text{همچنین } \{y\} \wedge b^c = (\{y\} \wedge b) \wedge b^c = (\{y\} \wedge (b \wedge b^c)) = \{y\} \wedge b_x = b_x$$

برعکس اگر به ازای هر دو زیرشیء متمایز $1 \xrightarrow[y]{x} X$ بتوان یک زیرشیء باز $a : 1 \rightarrow \mathbb{P}(X)$ و یک زیرشیء

بسته $b : 1 \rightarrow \mathbb{P}(X)$ چنان یافت شود که $b \leq a \leq b^c$ و $\{x\} \leq b_X$ و $\{y\} \wedge b = b_X$ آنگاه b^c باز است و $\{y\} = \{y\} \wedge t_X = \{y\} \wedge (b \vee b^c) = (\{y\} \wedge b) \vee (\{y\} \wedge b^c) = b_X \vee (\{y\} \wedge b^c) = \{y\} \wedge b^c$ پس $\{y\} \leq b^c$ همچنین $a \wedge b^c = b_X$ در نتیجه $a, \forall b^c \leq b \wedge b^c$.

بنا به فرض انزکتیو بودن تابع $\{0\}_x : \mathcal{E}(1, X) \rightarrow C(1, \mathbb{P}(X))$ اگر دو زیرشیء $1 \xrightarrow[y]{x} X$ متمایز باشد آنگاه

دو زیرشیء $1 \xrightarrow[\{y\}]{\{x\}} (\mathbb{P}X)$ نیز یکسان نخواهد بود. از این پس فرض می‌کنیم اگر دو زیرشیء $1 \xrightarrow[x_2]{x_1} X$

متمایز باشند، آنگاه دو زیرشیء $1 \xrightarrow[\{x_2\}]{\{x_1\}} \mathbb{P}(X)$ جدا از هم باشند.

قضیه ۲-۸: در فضای توپولوژی ساختاری (X, T_X) اگر تک عضوی‌ها بسته باشند، آنگاه X یک فضای T_1 است.

اثبات: فرض کنید، دو زیرشیء $1 \xrightarrow[y]{x} X$ متمایز باشند. در این صورت دو زیرشیء $1 \xrightarrow[\{y\}^c]{\{x\}^c} (\mathbb{P}X)$ باز

خواهند بود. بنا به تعریف $\{x\} \wedge \{x\}^c = b_X$ و $\{y\} \wedge \{y\}^c = b_X$ لذا

$$\{y\} = \{y\} \wedge t_X \{y\} \wedge = \{y\} \wedge (\{x\} \vee \{x\}^c) = (\{y\} \wedge \{x\}) \vee (\{y\} \wedge \{x\}^c) = b_X \vee (\{y\} \wedge \{x\}^c) = \{y\} \wedge \{x\}^c$$

بنابراین $\{y\} \wedge \{x\}^c$ به همین منوال می‌توان ثابت کرد که $\{x\} \leq \{y\}^c$.

با فرض اینکه $C(1, \mathbb{P}(X))$ یک جبر بوولی کامل، وست $\{x\} = t_X$ و به ازای هر رده از زیرشیء‌های باز مانند $\{a_i | i \in I\}$ وست $\vee a_i$ نیز باز باشد، داریم:

قضیه ۲-۹: اگر فضای توپولوژی ساختاری (X, T_X) یک فضای T_1 باشد، آنگاه هر تک عضوی، بسته است.

اثبات: بنا به فرض $\{x\} = t_X$ با ثابت نگه داشتن $y : 1 \rightarrow X$ به ازای هر $x \in \mathcal{E}(1, X)$ متمایز با

$\vee_{x \neq y} (\{y\} \wedge a_x) = b_X$ چنان موجود است که $\{y\} \wedge a_x = b_X$. بنابراین $\{y\} \wedge a_x = b_X$ و

$\{y\} \wedge (\vee_{x \neq y} a_x) = b_X$ تساوی $\vee_{x \in \mathcal{E}(1, X)} \{x\} = t_X$ به تساوی $\{y\} \vee (\vee_{x \neq y} a_x) = t_X$ می‌انجامد، بنابر فرض وست هر رده از زیرشیء‌های باز، باز است. لذا $\vee_{x \neq y} a_x$ باز و در نتیجه تک عضوی $\{y\}$

بسته است.

با فرض اینکه $C(1, \mathbb{P}(X))$ یک جبر بوولی کامل و به ازای هر زیر شیء $x : 1 \rightarrow X$

داریم:

$$\{x\} = \inf\{a \in C(1, \mathbb{P}(X)) \mid a \wedge \{x\} \neq b_X\} \neq b_X$$

قضیه ۲-۱۰: فضای توپولوژی ساختاری (X, T_X) یک فضای T_1 است، اگر به ازای هر x تک عضوی $\{x\} : 1 \rightarrow X$

$\mathbb{P}(X)$ اشتراک خانواده‌ای از زیرشیء‌های باز شامل آن است.

اثبات: به ازای هر دو شیء متمایز x, y می‌دانیم $\{x\} \wedge \{y\} = b_X$. بنا به فرض دو مجموعه $\{a_i | i \in I\}$ از زیرشیءهای باز به ترتیب شامل $\{x\}$ ، $\{y\}$ موجودند که: $\{x\} = \bigwedge a_i$ و $\{y\} = \bigwedge b_j$ ، لذا $\{x\} \wedge \{y\} = b_X$. لذا $i_0 \in I$ چنان موجود است که $a_{i_0} \wedge \{y\} = b_X$. در غیر این صورت اگر به ازای هر $i \in I$ و $a_i \wedge \{y\} \neq b_X$ و لذا $a_i \wedge \{y\} = (\bigwedge a_i) \wedge \{y\} \neq b_X$ و این متناقض با فرض قضیه است. به طور مشابه $J_0 \in J$ چنان موجود است که $b_{j_0} \wedge \{x\} = b_X$ بنابراین X یک فضای T_1 است.

۳- مثال‌ها

در این بخش، اصول جداسازی، مثال‌های بخش اول و چند مثال دیگر را بررسی می‌کنیم.
مثال ۳-۱: یک فضای توپولوژی استاندارد T_2, T_1, T_0 است، هرگاه به ترتیب یک فضای توپولوژی ساختاری (X, T_X) باشد. به ازای فضای توپولوژی استاندارد، (X, T_X)

$C(1, \mathbb{P}(X)) \cong \text{Set}(1, \mathbb{P}(X)) \cong \mathbb{P}(X)$ ، $\varepsilon(1, X) = \text{Set}(1, X) \cong X$ همچنین $\wedge$ و $\vee$ به ترتیب متناظر با اشتراک و اجتماع هستند. به وضوح $(\mathbb{P}(X), \cup, \cap)$ یک جبر بولی کامل می‌باشد.

در توپولوژی‌های فارسی نوع اول و دوم به ازای مجموعه X ،
 $C(1, \mathbb{P}(X)) = C(1, I^X) \cong I^X$ و $\varepsilon(1, X) \cong X$
تابع تک‌عضوی $X \rightarrow I^X$ را با $\{x\}_X = X\{x\}$ تعریف می‌کنیم که در آن تابع مشخصه روی تک‌عضوی $\{x\}$ است. لازم به ذکر است که بدانیم:

$f \vee g(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ و $f \wedge g(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ است. از آنجا که $I = [0, 1]$ فشرده است، به وضوح $(I^X, \wedge, \vee)$ یک جبر بولی کامل می‌باشد. با این تعریف:

مثال ۳-۲: فضای توپولوژی فازی نوع اول یا دوم (X, T_X) :

(i) یک فضای T_1 (T_0) است هرگاه به ازای هر دو عضو متمایز $x_1, x_2 \in X$ عضو $a_1 \in T_X$ و $a_2 \in T_X$ (یا) $a_1(x_1) = 1$ و $a_2(x_2) = 1$ یا $a_1(x_2) = 0$ و $a_2(x_1) = 0$ چنان موجود باشند که

(ii) یک فضای هاوسدورف است هرگاه به ازای هر دو عضو $x_1, x_2 \in X$ اعضای $a_1, a_2 \in T_X$ چنان موجود باشند که $a_1(x_1) = 1$ و $a_2(x_2) = 1$ و به ازای هر $x \in X$ دیگر $a_1(x) = 0$ و $a_2(x) = 0$.

مثال ۳-۳: برای مجموعه X یک حالت خاص از فضای توپولوژی فازی نوع اول $T_X = \{X_A | A \subseteq X\}$ توپولوژی را همه توابع مشخصه در نظر می‌گیریم. در این صورت هر تک‌عضوی باز است و لذا (X, T_X) یک فضای هاوسدورف به وضوح T_0 و T_1 می‌باشد.

مثال ۳-۴: برای مجموعه X یک حالت خاص از فضای توپولوژی فازی نوع دوم $T_X = \langle \{a, X_A | a \in I, A \subseteq X\} \rangle$ توپولوژی را با پایه همه توابع ثابت و مشخصه در نظر می‌گیریم. در این صورت هر تک‌عضوی، باز است و لذا (X, T_X) یک فضای هاوسدورف و به وضوح T_0 و T_1 می‌باشد. اما اگر توپولوژی شامل فقط توابع ثابت باشد، در این صورت (X, T_X) یک فضای هاوسدورف نیست.

مثال ۳-۵: فرض کنید $\mathcal{E} = (X, \leq)$ یک شبکه کامل توزیع‌پذیر رسند متناهی نسبت به هر رده دلخواه وست باشد. در این صورت به ازای هر $x \in X$ و هر توپولوژی τ_x فضای (x, τ_x) یک فضای هاوسدورف است. می‌دانیم، $\mathcal{E} = (X, \leq)$ و $\mathcal{E}(1, x)$ به ازای $x \neq 1$ تهی است و به ازای $x = 1$ فقط شامل همانی می‌باشد. از آنجا که هیچ مورفیزیسمی از ۱ به x وجود ندارد، لذا به انتغای مقدم، قضیه درست و لذا (x, τ_x) یک فضای هاوسدورف است.

ملاحظه ۳-۶: با وجود شرایط فوق در تعاریف و معادل‌های اصول اولیه به راحتی می‌توان اصول جداسازی منظم و نرمال را تعریف کرد، اما برای نتایج بعد از آن به مجموعه‌ای از مفروضات دیگر نیاز داشتیم. لذا به عنوان مسئله‌ای باز برای تحقیقات آینده مورد بررسی قرار می‌گیرد.

فهرست منابع

- [1]. J. Adamek, H. Herrlich, G.E. Strecker, Abstract and Concrete Categories, Wiley, New York, 2004.
- [2]. G. Gratzer, General Lattice Theory, Academic Press Inc., 1978.
- [3]. S. N. Hosseini, R. Amimi, Structural Topology in a Category, Iranian Journal of Fuzzy Systems, Volume 18, Number 6, (2021), pp. 45-54.
- [4]. P. T. Johnstone, Topos Theory, Academic Press, London, New York, San Francisco, 1977.
- [5]. S. N. Hosseini, M.Z. Kazemi Baneh, Limits in the Category of Structural Topological Spaces, U.P.B. Sci. Bull., Series A, Vol. 86, Iss. 2, 2024, pp 55-70.
- [6]. S. MacLane, I. Moerdijk, Sheaves in Geometry and Logic, A First Introduction to Topos Theory, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [7]. S. Vickers, Topology via Logic, Cambridge University Press, 1989.

