دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هفتم، شماره سی و سوم، آذر و دی ۱۴۰۰
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

بررسی حاصل‌ضرب تانسوری یک گروه و گروه خودریختی‌های مرکزی آن

منیره سیفی[1]، سید هادی جعفری[2]*

(۱و۲) گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه آزاد اسلامی، واحد مشهد، مشهد، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۱۱/۱۳ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۰۱/۳۱

چکیده

حاصل‌ضرب تانسوری ناآبلی گروه‌ها در K- نظریه جبری و توپولوژی ریشه دارد و نخستین بار توسط براون و لودی در سال ۱۹۸۷ معرفی گردید. یکی از اولین موضوعات مورد مطالعه در مورد مربع تانسوری ناآبلی $G \otimes G$ این بوده است که آیا خواص گروه G به این گروه انتقال می‌یابد یا خیر؟ برای مثال بیکن در سال ۱۹۹۴ یک کران بالا برای تعداد مولدهای کمین $G \otimes G$ برحسب تعداد مولدهای کمین G مشخص کرده است.

فرض کنیم G یک گروه و $Aut_z(G)$ گروه خودریختی‌های مرکزی آن باشد، که یک زیرگروه نرمال از $Aut(G)$ است. هدف ما بدست آوردن تخمینی برای تعداد مولدهای کمین $G \otimes Aut_z(G)$ می‌باشد. برای این منظور، ابتدا مولدهای کمین آن را شناسایی می‌کنیم. سپس، در حالتی که هر دوی G و $Aut_z(G)$ گروه‌های پوچتوان از رده دو باشند، یک کران بالا برای $d(G \otimes Aut_z(G))$ بر حسب $d(G)$ و $d(Aut_z(G))$ ارایه خواهیم داد، که در آن $d(X)$ تعداد مولدهای کمین گروه X است.

واژه‌های کلیدی: حاصلضرب تانسوری ناآبلی، گروه خودریختی‌ها، گروه‌های پوچتوان، خودریختی‌های مرکزی.

*. عهده دار مکاتبات: Email:s.hadi_jafari@yahoo.com

۱- مقدمه

حاصل‌ضرب تانسوری ناآبلی $G \otimes H$ از گروه‌های G و H گروه تولید شده بوسیله نمادهای $g \otimes h$ است که در آن $g\epsilon G$ و $h\epsilon H$، به طوریکه روابط زیر بر قرار باشند:

$$gg'\otimes h = ({}^{g}g'\otimes {}^{g}h)(g\otimes h)$$
$$g\otimes hh' = (g\otimes h)({}^{h}g\otimes {}^{h}h')$$

برای هر $g,g'\epsilon G$ و $h,h'\epsilon H$، که در آن G و H بر روی یکدیگر به طور سازگار [1] و بر روی خودشان به صورت مزدوج عمل می‌کنند. حاصل‌ضرب تانسوری ناآبلی گروه‌ها توسط براون و لودی [1] در سال ۱۹۸۷ معرفی گردید. پس از آن مطالعات زیادی در مورد تانسور ناآبلی و هم چنین ارتباط آن با گروه‌های پوچتوان انجام شده است، که از جمله برخی کارهای اخیر می‌توان به [2]،[3]و[4]اشاره کرد. در [5]، نویسندگان سوالی مطرح نمودند که آیا می‌توان کرانی برای $d(G \otimes G)$ بر حسب $d(G)$ ارایه داد، که در آن $G \otimes G$ برابر با ضرب تانسوری ناآبلی G در خودش است و $d(G)$ تعداد مولدهای کمین G است. در حالتی که G گروهی پوچتوان از مرتبه دو باشد، بیکن یک کران کلی برای $d(G \otimes G)$ بر حسب $d(G)$ ارایه نمود[6].

فرض کنیم $Aut(G)$ گروه خودریختی‌های G و $Aut_z(G)$ مجموعه تمام خودریختی‌های داخلی آن باشد که یک زیرگروه نرمال از $Aut(G)$ است. با در نظر گرفتن عمل طبیعی $Aut_z(G)$ روی G و هم‌چنین عمل G روی $Aut_z(G)$ که توسط همریختی طبیعی $G \to Aut(G)$ القا می‌شود، مطالعه نماد ضرب تانسوری ناآبلی $G \otimes Aut_z(G)$ ایده‌ای دست یافتنی به نظر می‌رسد. به عنوان یک موضوع جالب توجه می‌توان سوال مشابهی به صورت فوق مطرح نمود که آیا می‌توان کرانی برای $d(G \otimes Aut_z(G))$ ارائه داد؟ در این مقاله یک کران برای $d(G \otimes Aut_z(G))$ بر حسب $d(G)$ و $d(Aut_z(G))$ ارائه خواهیم داد، در حالتی که هر دوی G و $Aut_z(G)$ گروه‌های پوچتوان از رده دو باشند.

۲- مقدمات

فرض کنیم G یک گروه با گروه خودریختی $Aut(G)$ باشد. برای هر $g\epsilon G$ و $\alpha\epsilon Aut(G)$ عمل G روی $Aut(G)$ را به‌صورت ${}^{g}\alpha = {}^{\varphi_g}\alpha = \varphi_g\alpha\varphi_g^{-1}$ و عمل $Aut(G)$ روی G را با ${}^{\alpha}g = \alpha(g)$ تعریف می‌کنیم، که در آن φ_g خودریختی القایی توسط g است. به سادگی می‌توان دید که این اعمال خوش تعریف و سازگار هستند. (برای مشاهده جزئیات [7] راببینید.)

یک خودریختی α از G را مرکزی می‌نامیم در صورتی که α با هر خودریختی داخلی G جابجا شود، یا به طور معادل برای هر $g\epsilon G$، $g^{-1}\alpha(g)$ در مرکز $Z(G)$ از G قرار داشته باشد. فرض کنیم $Aut_z(G)$ گروه خودریختی‌های داخلی G باشد. با توجه به این که $Aut_z(G)$ یک زیرگروه نرمال از $Aut(G)$ است، عمل G روی $Aut_z(G)$ القا شده توسط عمل G روی $Aut(G)$ است. بنابراین می‌توان ضرب تانسوری ناآبلی $G \otimes Aut_z(G)$ را تعریف نمود.

گزاره ۱. فرض کنیم G یک گروه باشد. در این صورت G روی $Aut_z(G)$ و $Aut_z(G)$ به $G \otimes Aut_z(G)$ به طور بدیهی عمل می‌کند. همچنین گروه $G \otimes Aut_z(G)$ آبلی است.

اثبات. روشن است که G به طور بدیهی روی $Aut_z(G)$ عمل می‌کند. همچنین همریختی گروهی $\lambda': G \otimes Aut_z(G) \to Aut_z(G)$ به صورت $\lambda'(g \otimes \alpha) = {}^{g}\alpha\alpha^{-1} = [\varphi_g,\alpha] = 1$ برای هر $g\epsilon G$ و $\alpha\epsilon Aut(G)$ نتیجه می‌دهد که G

به طور بدیهی روی $G \otimes Aut_z(G)$ عمل می‌کند. (گزاره ۲ از [5] را ببینید). هم‌چنین گزاره ۳ از [5] نتیجه می‌دهد که $G \otimes Aut_z(G)$ یک گروه آبلی است. ■

نتیجه ۱. فرض کنیم G یک گروه باشد. برای هر $g,g' \epsilon G$ و هر $\alpha \epsilon Aut_z(G)$ داریم:

الف) $gg' \otimes \alpha = (g \otimes \alpha)(g' \otimes \alpha)$؛

ب) $[g,g'] \otimes \alpha = 1$.

اثبات. قسمت الف از گزاره ۱ نتیجه می‌شود. برای اثبات قسمت (ب) با توجه به قسمت (الف) داریم:

$$\begin{aligned} & gg' \otimes \alpha = [g,g']g'g \otimes \alpha \\ & = ([g,g'] \otimes \alpha)(g' \otimes \alpha)(g \otimes \alpha) \end{aligned}$$

بنابراین $[g,g'] \otimes \alpha = 1$. ■

لم ۱. فرض کنیم G یک گروه باشد به طوری که $Aut_z(G)$ یک گروه پوچتوان از رده ۲ باشد. در اینصورت برای هر $x \epsilon G$ و هر $\alpha_1,\alpha_2 \epsilon Aut_z(G)$ داریم:

$$\begin{aligned} & x \otimes \alpha_1\alpha_2 = \\ & (x \otimes \alpha_1)(\alpha_1(x) \otimes [\alpha_1,\alpha_2]) \\ & ([\alpha_1,\alpha_2](\alpha_1(x)) \otimes \alpha_2) \end{aligned}$$

اثبات. با توجه به تعریف داریم:

$$\begin{aligned} & x \otimes \alpha_1\alpha_2 = (x \otimes \alpha_1)^{\alpha_1}(x \otimes \alpha_2) \\ & = (x \otimes \alpha_1)(\alpha_1(x) \otimes [\alpha_1,\alpha_2]\alpha_2) \\ & = (x \otimes \alpha_1)\ (\alpha_1(x) \otimes [\alpha_1,\alpha_2]) \\ & {}^{[\alpha_1,\alpha_2]}(\alpha_1(x) \otimes \alpha_2) \\ & = (x \otimes \alpha_1)(\alpha_1(x) \otimes [\alpha_1,\alpha_2]) \\ & ([\alpha_1,\alpha_2](\alpha_1(x)) \otimes \alpha_2). \ ■ \end{aligned}$$

قضیه ۱. فرض کنیم G یک گروه باشد به طوری که $Aut_z(G)$ یک گروه پوچتوان از رده ۲ باشد. در اینصورت برای هر $x \epsilon G$ و هر $\alpha_i \epsilon Aut_z(G)$ که $1 \le i \le n$ داریم:

$$\begin{aligned} & x \otimes \prod_{i=1}^{n} \alpha_i = (x \otimes \alpha_1) \\ & \prod_{i=2}^{n}\Big(\big((\prod_{k=1}^{i-1} \alpha_k)(x) \otimes [\prod_{k=1}^{i-1} \alpha_k,\alpha_i] \big) \\ & \big([\prod_{k=1}^{i-1} \alpha_k,\alpha_i](\prod_{k=1}^{i-1} \alpha_k)(x) \otimes \alpha_i \big) \Big) \end{aligned}$$

اثبات. مورد $n = 2$ طبق لم ۱ به دست می‌آید. ادامه اثبات را با استقرا انجام می‌دهیم:

$$\begin{aligned} & x \otimes \prod_{i=1}^{n} \alpha_i = x \otimes \prod_{i=1}^{n-1} \alpha_i\alpha_n \\ & = (x \otimes \prod_{i=1}^{n-1} \alpha_i) \\ & \big((\prod_{i=1}^{n-1} \alpha_i)(x) \otimes [\prod_{i=1}^{n-1} \alpha_i,\alpha_n] \big) \\ & \big([\prod_{i=1}^{n-1} \alpha_i,\alpha_n](\prod_{i=1}^{n-1} \alpha_i)(x) \otimes \alpha_n \big) \\ & = (x \otimes \alpha_1) \\ & \prod_{i=2}^{n-1}\Big(\big((\prod_{k=1}^{i-1} \alpha_k)(x) \otimes [\prod_{k=1}^{i-1} \alpha_k,\alpha_i] \big) \\ & \big([\prod_{k=1}^{i-1} \alpha_k,\alpha_i](\prod_{k=1}^{i-1} \alpha_k)(x) \otimes \alpha_i \big) \Big) \\ & \big((\prod_{i=1}^{n-1} \alpha_i)(x) \otimes [\prod_{i=1}^{n-1} \alpha_i,\alpha_n] \big) \\ & \big([\prod_{i=1}^{n-1} \alpha_i,\alpha_n](\prod_{i=1}^{n-1} \alpha_i)(x) \otimes \alpha_n \big). \end{aligned}$$

تساوی مورد نظر با تغییر اندیس‌ها به دست می‌آید.

برای تسهیل در خواندن نتیجه قبل داریم:

$$\begin{aligned} & (\prod_{k=1}^{i-1} \alpha_k)(x) \otimes [\prod_{k=1}^{i-1} \alpha_k,\alpha_i] = \\ & \big((\prod_{k=1}^{i-1} \alpha_k)(x) \otimes [\alpha_1,\alpha_i] \big) \\ & \big([\alpha_1,\alpha_i](\prod_{k=1}^{i-1} \alpha_k)(x) \otimes [\alpha_2,\alpha_i] \big) \\ & \big([\alpha_2,\alpha_i][\alpha_1,\alpha_i](\prod_{k=1}^{i-1} \alpha_k)(x) \otimes [\alpha_3,\alpha_i] \big) \\ & \left(\begin{matrix} [\alpha_{i-2},\alpha_i][\alpha_{i-3},\alpha_i]\ldots \\ [\alpha_1,\alpha_i](\prod_{k=1}^{i-1} \alpha_k)(x) \otimes [\alpha_{i-1},\alpha_i] \end{matrix} \right). \end{aligned}$$

اکنون قرار می‌دهیم:

$$\begin{aligned} & y_1 = x, \\ & y_i = [\prod_{k=1}^{i-1} \alpha_k,\alpha_i](\prod_{k=1}^{i-1} \alpha_k)(x), \\ & y_{1i} = (\prod_{k=1}^{i-1} \alpha_k)(x), \\ & y_{2i} = [\alpha_1,\alpha_i](\prod_{k=1}^{i-1} \alpha_k)(x), \\ & y_{3i} = [\alpha_2,\alpha_i][\alpha_1,\alpha_i](\prod_{k=1}^{i-1} \alpha_k)(x), \\ & \vdots \\ & y_{(i-i)i} = [\alpha_{i-2},\alpha_i][\alpha_{i-3},\alpha_i] \ldots [\alpha_1,\alpha_i] \\ & (\prod_{k=1}^{i-1} \alpha_k)(x). \end{aligned}$$

بنابراین قضیه ۱ به صورت خلاصه زیر قابل بیان است:

$$\begin{aligned} & x \otimes \prod_{i=1}^{n} \alpha_i = \prod_{i=1}^{n}(y_i \otimes \alpha_i) \\ & \prod_{i=2}^{n} \prod_{j=1}^{i-1}(y_{ji} \otimes [\alpha_j,\alpha_i]).\ (*) \end{aligned}$$

با بکارگیری رابطه (*) و قسمت (الف) نتیجه ۱ می‌توان به نتیجه‌ی زیر رسید.

نتیجه ۲. فرض کنیم G یک گروه باشد به‌طوری که $Aut_z(G)$ یک گروه پوچتوان از رده ۲ باشد. در اینصورت برای هر $x_i \epsilon G$ و هر $\alpha_j \epsilon Aut_z(G)$ که $1 \leq i \leq n$ داریم:

$$\prod_{i=1}^{n} x_i \otimes \prod_{j=1}^{m} \alpha_j$$
$$= \prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} (y_{ij} \otimes \alpha_j)$$
$$\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=2}^{m} \prod_{k=1}^{j-1} (y_{ijk} \otimes [\alpha_k, \alpha_j])$$

به طوری که در آن

$$y_{i1} = x_i,$$
$$y_{ij} = [\prod_{k=1}^{j-1} \alpha_k, \alpha_j](\prod_{k=1}^{j-1} \alpha_k)(x),$$
$$y_{ij1} = \prod_{k=1}^{j-1} \alpha_k(x_i),$$
$$, y_{ij2} = [\alpha_1, \alpha_j](\prod_{k=1}^{j-1} \alpha_k)(x_i)$$
$$y_{ij3} = [\alpha_2, \alpha_j][\alpha_1, \alpha_j](\prod_{k=1}^{j-1} \alpha_k)(x_i)$$
$$\vdots$$
$$y_{ij(j-1)} = [\alpha_{j-2}, \alpha_j][\alpha_{j-3}, \alpha_j] \dots [\alpha_1, \alpha_j]$$
$$(\prod_{k=1}^{j-1} \alpha_k)(x_i).$$

نتیجه ۳. فرض کنیم G یک گروه باشد به طوری که $Aut_z(G)$ یک گروه پوچتوان از رده ۲ باشد. در این صورت برای هر $x \epsilon G$ و هر $\alpha \epsilon Aut_z(G)$ و اعداد صحیح m و n داریم:

$$x^n \otimes \alpha^m = \prod_{i=1}^{m} (y_i \otimes \alpha)^n.$$

که در آن $y_i = \alpha^{i-1}(x)$ و $1 \leq i \leq m$.

۳- نتیجه اصلی

در بخش آخر یک کران بالا برای مولدهای $G \otimes Aut_z(G)$ بر حسب تعداد مولدهای G و $Aut_z(G)$ در حالتی که G و $Aut_z(G)$ گروه‌های پوچتوان از رده ۲ باشند، خواهیم ساخت.

گزاره ۲. فرض کنیم G و خودریختی‌ها مرکزی آن، $Aut_z(G)$، گروه‌هایی پوچتوان از رده حداکثر دو باشند که به ترتیب دارای مجموعه مولدهای کمین $\{x_1, \dots, x_n\}$ و $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ می‌باشند. در این صورت $G \otimes Aut_z(G)$ تولید شده توسط عناصری به فرم $x_i \otimes \alpha_j$ و $x_i \otimes [\alpha_j, \alpha_k]$ است، که در آن $1 \leq i \leq n$ و $1 \leq j < k \leq m$.

اثبات. فرض کنیم که $g \epsilon G$ و هر $\alpha \epsilon Aut_z(G)$. در این صورت $g = XX'$ و $\alpha = AA'$ به‌طوری که:

$$X = \prod_{i=1}^{n} x_i^{m_i},$$
$$X' = \prod_{1 \leq j < k \leq n} [x_j, x_k]^{l_{jk}},$$
$$A = \prod_{i=1}^{m} \alpha_i^{m'_i},$$
$$A' = \prod_{1 \leq j < k \leq m} [\alpha_j, \alpha_k]^{l'_{jk}}.$$

بنابراین هر مولد $g \otimes \alpha$ از $G \otimes Aut_z(G)$ را می‌توان به صورت $XX' \otimes AA'$ نوشت.

با توجه به فرض داریم:

$$(XX' \otimes AA') =$$
$$(X \otimes A)(X \otimes A')(X' \otimes A)(X' \otimes A')$$

با استفاده از نتیجه ۱ داریم:

$$X' \otimes A' =$$
$$\prod_{1 \leq j < k \leq n} [x_j, x_k]^{l_{jk}} \otimes \prod_{1 \leq j < k \leq n} [\alpha_j, \alpha_k]^{l'_{jk}} =$$
$$\prod_{1 \leq j < k \leq n} \left([x_j, x_k]^{l_{jk}} \otimes \prod_{1 \leq j < k \leq n} [\alpha_j, \alpha_k]^{l'_{jk}} \right) = 1.$$

همچنین

$$(X \otimes A')(X' \otimes A) =$$
$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{m_i} \otimes \prod_{1 \leq j < k \leq m} [\alpha_j, \alpha_k]^{l'_{jk}} \right)$$
$$\left(\prod_{1 \leq j < k \leq n} [x_j, x_k]^{l_{jk}} \otimes \prod_{i=1}^{m} \alpha_i^{m'_i} \right)$$
$$= \prod_{i=1}^{n} \prod_{1 \leq j < k \leq m} (y'_{ij} \otimes [\alpha_j, \alpha_k]^{l'_{jk}})$$

و

$$X \otimes A = \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{m_i} \otimes \prod_{j=1}^{m} \alpha_j^{m_j} \right) =$$
$$\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=1}^{m} \left(y'_{ij} \otimes \alpha_j^{m_j} \right)$$
$$\prod_{i=1}^{n} \prod_{j=2}^{m} \prod_{k=1}^{j-1} (y'_{ijk} \otimes [\alpha_j, \alpha_k]^{l'_{jk}}),$$

که در آن y'_{ij} و y'_{ijk} عناصری در G مشابه نتیجه ۲ هستند. اکنون طبق نتیجه ۲ و قسمت

(الف) نتیجه ۱ اثبات کامل است. ■

قضیه ۲. فرض کنیم G و $Aut_z(G)$ گروه‌هایی پوچتوان به ترتیب n و m مولدی از رده حداکثر ۲ باشند. در این صورت:
$d(G \otimes Aut_z(G)) \leq \frac{1}{2}nm(m+1)$.

به ویژه هنگامی‌که $Aut_z(G)$ یک گروه آبلی باشد، $d(G \otimes Aut_z(G)) \leq nm$.

اثبات. با توجه به گزاره ۲ گروه $G \otimes Aut_z(G)$ دارای nm مولد به فرم $x_i \otimes \alpha_j$ و $n\left(\frac{m(m-1)}{2}\right)$ مولد به فرم $x_i \otimes [\alpha_j, \alpha_k]$ است که در آن $1 \leq i \leq n$ و $1 \leq j < k \leq m$.
بنابراین

$$d\big(G \otimes Aut_z(G)\big) \leq nm + n\left(\frac{m(m-1)}{2}\right) = \frac{1}{2}nm(m+1).$$

بوضوح اگر $Aut_z(G)$ یک گروه آبلی باشد، آنگاه مولدهای به فرم $x_i \otimes [\alpha_j, \alpha_k]$ در مجموعه مولدهای آن حضور نخواهند داشت و داریم:
$d\big(G \otimes Aut_z(G)\big) \leq nm$. ■

برای بیان مثالی از گروه‌هایی که واجد شرایط نتیجه اصلی ما باشند، بوسیله GAP [8] گروه‌های G را به صورت زیر معرفی می‌کنیم که در آنها G و $Aut_z(G)$ گروه‌های پوچتوان از رده ۲ هستند:
$G = C_{2k} \times D_8, G = C_{2k} \times Q_8$

که در آن k یک عدد فرد، D_8 و Q_8 به ترتیب گروه‌های دو وجهی و چهارگان از مرتبه ۸ هستند.
همچنین فرض کنیم G گروه بسیار ویژه‌ی متناهی از مرتبه p^{2n+1} باشد. با توجه به این که $G' = Z(G)$ یک گروه دوری است با توجه به [9] داریم:

$$Aut_z(G) = Inn(G) \cong (C_p)^{2n}$$

بنابراین طبق قضیه قبل:
$d(G \otimes Aut_z(G)) \leq 4n^2$.

از طرف دیگر یک بروریختی طبیعی به صورت:
$G \otimes Aut_z(G) \to Inn(G) \otimes Aut_z(G)$

وجود دارد که نتیجه می‌دهد:
$d(G \otimes Aut_z(G)) \geq 4n^2$.

بنابراین $d\big(G \otimes Aut_z(G)\big) = 4n^2$ که نشان می‌دهد G کران فوق را اختیار می‌کند.

۴- نتیجه‌گیری

در این مقاله ما ابتدا با معرفی عمل‌هایی سازگار حاصل‌ضرب تانسوری ناآبلی $G \otimes Aut_z(G)$ را تعریف می‌کنیم و سپس در حالتی که هر دوی G و $Aut_z(G)$ گروه‌هایی پوچتوان از رده حداکثر ۲ باشند کران $\frac{1}{2}nm(m+1)$ را برای تعداد مولدهای کمین $G \otimes Aut_z(G)$ بدست می‌آوریم که در آن n و m به ترتیب تعداد مولدهای کمین G و $Aut_z(G)$ است. درادامه گروه‌های
$G = C_{2k} \times D_8$

و

$G = C_{2k} \times Q_8$

را معرفی می‌کنیم که واجد شرایط فوق هستند. هم‌چنین نشان می‌دهیم که برای گروه بسیار ویژه‌ی متناهی از مرتبه p^{2n+1} کران ارائه شده دقیق می‌باشد.

فهرست منابع

[1] R. Brown and J.-L. Loady, Van Kampen theorems for diagrams of spaces, Topology 26 (1987), 311-335.

[2] H. Hadizadeh and S. H. Jafari, On the Exponent of Triple Tensor Product of p-Groups, Journal of New Researches in Mathematics. 5(22) (2020), 77-84.

[3] H. Golmakani, A. Jafarzadeh and P. Niroomand, The Tensor Degree of a Pair of Finite Groups, Journal of New Researches in Mathematics. 4(13) (2018), 41-46.

[4] M. Ghaffarzadeh, On minimal degrees of faithful quasi-permutation representations of nilpotent groups, Journal of New Researches in Mathematics. 3(12) (2018), 87-98.

[5] R. Brown, D. L. Johnson and E. F. Robertson, Some computations of nonabelian tensor products of groups, J. Algebra 111 (1987), 177-202.

[6] M. R. Bacon, On the nonabelian tensor square of a nilpotent group of class two, Glasgow Math. J. 36 (1994), 291-296.

[7] M. R. R. Moghaddam and M. J. Sadeghifard, Nonabelian tensor analogues of 2-auto Engel groups, Bull. Korean Math. Soc. 52(4) (2015), 1097-1105.

[8] The GAP Group, GAP-Groups, Algorithms and Programming, Version 4.7.6, 2014. Available at: http://www. gap-system.org/.

[9] M. L. Curran and D. J. McCaughan, Central automorphisms that are almost inner, Comm. Algebra 29(5) (2001), 2081-2087.