دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال نهم، شماره چهل و چهارم، مهر و آبان ۱۴۰۲
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

تحلیل کارایی شبکه دومرحله‌ای تحلیل پوششی داده‌ها در حضور عوامل نامطلوب و برگشت‌پذیر

محمد مالمیر [۱]، رضا کاظمی متین [۲*]، مهناز احدزاده نمین [۳]

[۱و۲] گروه ریاضی، واحد کرج، دانشگاه آزاد اسلامی، کرج، ایران
[۳] گروه ریاضی، واحد شهرقدس، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۱/۰۱/۲۷ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۴/۱۴

چکیده

جهت محاسبه کارایی در زنجیره تولید برای یک سیستم شبکه‌ای دومرحله‌ای ممکن است برخی از خروجی‌های مرحله دوم نامطلوب باشند. چون تولید محصول نهایی نامطلوب، از اهداف واحدهای تصمیم‌گیری به دور است باید هدف سیاست‌گذاری، کاهش تولیدات نامطلوب باشد. از طرفی می‌توان برخی از این خروجی‌های نامطلوب را به عنوان ورودی مطلوب برای مرحله اول استفاده نمود. در این مطالعه مدلی برای محاسبه کارایی در حضور عوامل نامطلوب و برگشت‌پذیر برای یک شبکه دومرحله‌ای با شرایطی که اشاره شد ارائه می‌شود. از یک مطالعه موردی در زمینه ارزیابی کارایی چهارده شرکت داروسازی حاضر در بورس ایران برای تشریح مدل پیشنهادی استفاده می‌گردد. در صورت‌های مالی این شرکت‌ها، برخی نسبت‌های مالی به صورت عوامل نامطلوب برگشت‌پذیر در نظر گرفته شده است.

واژه‌های کلیدی: تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای، ورودی نامطلوب، خروجی نامطلوب، شبکه دومرحله‌ای، خروجی‌های برگشت‌پذیر، دسترسی‌پذیری ضعیف .

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: rkmatin@gmail.com

۱- مقدمه

در تحلیل پوششی داده‌ها[۲] (DEA) برای سنجش میزان عملکرد و کارایی واحدهای تصمیم‌گیری[۳] (DMU)، معیار اصلی این بود که کدام DMU در مقایسه با سایر DMU ها با مصرف ورودی‌های مشابه، بیشترین خروجی یا محصول مشابه را تولید می‌کند. در اغلب واحدهای تولیدی ممکن است در کنار خروجی‌های مطلوب، خروجی-های نامطلوب نیز تولید شود، وجود خروجی‌های نامطلوب باعث شد که رویکرد محققین جهت بررسی کارایی DMU ها تغییر کند و دیدگاه مطلق افزایش خروجی در DEA را مورد بازبینی قرار بدهند. جهانشاهلو و همکاران برای بهبود ناکارآمدی واحدهای تصمیم‌گیری، یک مدل غیرشعاعی ارائه دادند که خروجی‌های نامطلوب و ورودی‌های مطلوب کاهش می‌یابند[۱]. امیرتیموری و همکاران مدلی جهت بهبود عملکرد واحدهای تصمیم-گیری در تحلیل پوششی داده‌ها ارائه دادند که به موجب این مدل، ورودی نامطلوب افزایش می‌یافت و خروجی نامطلوب کاهش پیدا می‌کرد [۲].

جهت ارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیری در سیستم‌های شبکه‌ای دومرحله‌ای نیز، هدف افزایش خروجی مدنظر می‌باشد. ولی همیشه خروجی نهایی برای واحد تولیدی ممکن است مطلوب نباشند به عبارت دیگر علاوه بر خروجی‌های مطلوب، خروجی‌های نامطلوب نیز در مرحله دوم برای یک سیستم شبکه‌ای دومرحله‌ای تولید شده باشند. به عنوان مثال در یک واحد تولیدی نئوپان، براده‌های چوب نیز که در فرآیند تولید، به عنوان یک محصول نامطلوب تولید می‌شود، دیگر نمی‌توان سیاست افزایش خروجی‌ها که در تحلیل پوششی داده‌ها مدنظر است را به کار برد. در تحلیل پوششی داده‌ها وقتی که برخی از خروجی‌ها، نامطلوب بود از شرط دسترسی‌پذیری ضعیف، برای ساخت مجموعه امکان تولید[۴] (PPS) استفاده می‌شد. هایلو و ویمن برای ساخت مجموعه امکان تولید در حضور خروجی‌های نامطلوب، ورودی‌ها و خروجی‌های نامطلوب را به صورت مشابه در اصول موضوعه گنجاندند[۳]. از دیدگاه شفرد خروجی‌ها (مطلوب و نامطلوب)شرط دسترسی‌پذیری ضعیف را در صورتی دارا هستند که هر انقباضی از خروجی‌ها در مجموعه امکان تولید، امکان‌پذیر باشد. این ضرایب انقباضی به دو صورت مطرح گردیده است یا به صورت یکسان یا به صورت غیریکسان برای محاسبه کارایی DMU در نظر گرفته شده است [۴]. فاروگراسکوف برای شرط دسترسی پذیری ضعیف خروجی‌ها، ازضرایب انقباض یکسان برای DMU ها استفاده کردند[۵]. کاسمانن مدلی ارائه داد که برای شرط دسترسی‌پذیری ضعیف خروجی‌ها (مطلوب و نامطلوب) از ضرایب انقباضی غیریکسان جهت خروجی‌های، DMU ها استفاده کرد[۶]. کاسمانن و یودینوسکی به مدل فاروگراسکوف[۵] ایرادی را مطرح کردند که مدل آن‌ها خیلی محدب به نظر نمی‌آید و ضرایب انقباضی یکسان ممکن است باعث غیرمحدب شدن مجموعه امکان تولید شود[۷]. کاسمانن و پودینوسکی [۷] با در نظر گرفتن ضرایب انقباضی غیریکسان برای خروجی‌های (مطلوب و نامطلوب) هر کدام از DMU ها، مجموعه امکان تولیدی به وجود آورند که با اصول موضوعه: ۱- تحدب ۲- شرط دسترسی‌پذیری قوی برای ورودی‌ها و خروجی‌های مطلوب ۳- شرط دسترسی‌پذیری ضعیف برای خروجی‌های مطلوب و خروجی‌های نامطلوب، ایجاد شده است. آنها نشان دادند که مجموعه امکان تولید ساخته شده، کوچکترین مجموعه ای است که در این اصول موضوع صدق می‌کند[۷]. مدل‌های ابتدایی تحلیل پوششی داده‌ها برای ارزیابی کارایی DMU ها صرفا مقادیر ورودی و خروجی‌ها را در نظر می‌گیرند و مانند یک جعبه سیاه با واحدهای تولیدی برخورد می‌کرد. اغلب واحدهای تولیدی،

[۲] - Data Envelopment Analysis
[۳] - Decision Making Unit
[۴] - Production Possibility Set

برای تولید محصول نهایی، از دو، سه یا چند مرحله تشکیل شده است و چون تحلیل پوششی داده‌ها به مراحل و ساختار درونی سیستم‌ها، اهمیت نمی‌داد محققان مطالعات را به سمتی هدایت کردند که بتوانند ساختار درونی DMU ها را مورد بررسی قرار دهند و از این رو دقیق‌تر بتوانند به ارزیابی کارایی سیستم‌های تولیدی بپردازند. آنها، این گونه مطالعات را به عنوان تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای[۵] (NDEA) معرفی نموده‌اند. شبکه‌ها در تحلیل پوششی داده‌ها با انواع گوناگون از جمله سری، موازی و ترکیبی مورد بررسی قرار گرفته است.

در شبکه‌ها معمولا خروجی یکی از مراحل بعنوان ورودی برای مرحله بعد در نظر گرفته می‌شود. شبکه‌ها ممکن است دومرحله‌ای، سه‌مرحله‌ای یا چندمرحله‌ای در مطالعه ساختار درونی DMU ها مورد نظر قرار بگیرد. کائو به بررسی مدل‌های شبکه‌ای پرداخت و مطالعات گذشته در این خصوص را مورد بازبینی قرار داد[۸]. سپس، کائو یک مدل برای تجزیه کارایی در تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای ارائه داد و سیستم اصلی شبکه را به صورت سری در نظر گرفت سپس هرکدام از مراحل در این شبکه را با ساختار موازی، مورد بررسی قرار داده است. بر اساس این ساختار شبکه‌ای سری و زیرشبکه‌های موازی، کارایی کل سیستم را به واسطه کارایی زیرشبکه‌ها تجزیه کرد و همچنین برای نشان دادن، کاربردی بودن مدل خود، صنعت بیمه در تایوان را مورد بررسی قرار داد که یک سیستم شبکه‌ای دومرحله‌ای با ساختار سری در نظر گرفته است که هر مرحله از این شبکه دومرحله‌ای سری به صورت ساختار موازی هستند[۹]. کائو مدلی برای اندازه‌گیری کارایی پیشنهاد داد که در آن سیستم‌های تولید با ساختار شبکه به صورت موازی بوده‌اند. از اجزای زیرشبکه‌ها (تک تک مراحل) برای محاسبه کارایی کل سیستم استفاده شده است. از خصوصیات این ساختار شبکه‌ای، این است که ناکارآمدی سیستم را می‌توان به ناکارآمدی اجزای سیستم تجزیه کرد، این قضیه به مدیران یا تصمیم‌گیرندگان این امکان را می‌دهد که مولفه‌های ناکارآمدی در سیستم را شناسایی کنند و مسیرهای اصلاحی، جهت بهبود کارایی را در نظر بگیرند. از خاصیت‌های دیگر این مدل شبکه‌ای با ساختار موازی این است که کارایی محاسبه شده از این مدل کمتر از ارزیابی کارایی با استفاده از مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها است. این ویژگی نشان می‌دهد ارزیابی کارایی با ساختار شبکه، این امکان را می‌دهد که نقاط ضعف سیستم و ناکارآمدی را بتوان با دقت بیشتری شناسایی کرد. برای نمونه و نشان دادن عملکرد مدل پیشنهادی، جنگل‌های ملی تایوان را با الگوی شبکه‌ای با ساختار موازی مورد ارزیابی قرار گرفته است[۱۰]. کائو یک مدل SBM[۶] برای تجزیه کارایی در تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای ارائه داد که این رابطه برای انواع ساختار شبکه (سری – موازی – ترکیبی) برقرار است[۱۱]. هایتو و همکاران مدلی مبتنی بر (رهبر-پیرو) برای شبک‌های دومرحله‌ای تحلیل پوششی داده‌ها ارائه داد که در آن به بررسی این موضوع پرداخت که کدام مرحله را به عنوان رهبر می‌شود، انتخاب کرد[۱۲].لیانگ و همکاران به تجزبه کارایی برای شبکه دومرحله‌ای با رویکرد نظریه بازی‌ها پرداخت که در آن تمام خروجی‌های مرحله اول به عنوان ورودی برای مرحله دوم مصرف می‌شدند که در مرحله میانی و پایانی خروجی‌های نامطلوب تولید نمی‌شد. سپس کارایی را برای این نوع از شبکه-ها مورد بررسی قرار دادند[۱۳].

حضور عوامل نامطلوب در تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای نیز در مواردی مورد بررسی قرار گرفته است. مقبولی و همکاران مدلی برای محاسبه کارایی شبکه دومرحله‌ای تحلیل پوششی داده‌ها، در حضور خروجی‌های نامطلوب ارائه دادند که در ساختار این شبکه خروجی‌های مطلوب و نامطلوب مرحله اول به عنوان ورودی در مرحله دوم مصرف می‌شوند. آن‌ها برای ساختن مجموعه امکان تولید از اصل دسترسی‌پذیری ضعیف برای خروجی‌های مطلوب و نامطلوب استفاده کردند[۱۴]. وو و همکاران یک مدل جمعی برای شبکه دومرحله‌ای در نظر گرفتند که در

---

[۵] - Network Data Envelopment Analysis

میان خروجی‌های مرحله اول محصول نامطلوب نیز تولید شده است[۱۵]. کلهر و کاظمی متین به بررسی تاثیر اصل دسترسی‌پذیری ضعیف در تحلیل پوششی داده‌های شبکه‌ای با خروجی‌های نامطلوب پرداختند[۱۶].

ما در این مقاله به تجزیه کارایی برای یک شبکه دومرحله‌ای تحلیل پوششی داده‌ها در حضور عوامل نامطلوب و برگشت‌پذیر می‌پردازیم به طوری که برخی از خروجی‌های نامطلوب مرحله دوم به عنوان ورودی به مرحله اول برگشت داده شده است. با توجه به مباحث مطرح شده، نوآوری این مقاله به شرح ذیل است:

۱. تاثیر عوامل برگشت‌پذیر در مدل‌سازی‌های تحلیل پوششی داده‌ها با ساختار شبکه دومرحله‌ای.

۲. مدل‌سازی برای محاسبه کارایی کل و اجزای آن در یک شبکه دومرحله‌ای با عوامل برگشت‌پذیر و حضور عوامل نامطلوب.

۳. تجزیه کارایی با حضور عوامل نامطلوب، در شبکه دومرحله‌ای با عوامل برگشت‌پذیر.

۴. الگوریتمی مناسب برای واحد ناکارا در شبکه دومرحله‌ای با عوامل برگشت‌پذیر و حضور عوامل نامطلوب.

در بخش دوم این مقاله ادبیات مربوط به خروجی‌های نامطلوب در تحلیل پوششی داده‌ها را بررسی می‌کنیم در بخش سوم مدلی برای تجزیه کارایی، یک شبکه سه‌مرحله‌ای با خروجی نامطلوب و برگشت‌پذیر ارائه می‌دهیم. در بخش چهارم مثال عددی جهت نشان دادن اثربخشی مدل ارائه می‌گردد، در بخش پنجم به نتیجه‌گیری می-پردازیم.

۲- مرورادبیات

فرض کنیم به تعداد n تا DMU متجانس، جهت ارزیابی وجود داشته باشد. که برای DMU_j ، $j=1,...,n$ ، $x_{ij}=(x_{1j},...,x_{mj})$ بردار ورودی‌ها با m تا ورودی یعنی $i=1,...,m$ ، $y^{g}_{r_1 j}=(y^{g}_{1j},...,y^{g}_{s_1 j})$ بردار خروجی‌های مطلوب با s_1 تا خروجی مطلوب یعنی $r_1=1,...,s_1$ و $y^{b}_{r_2 j}=(y^{b}_{1j},...,y^{b}_{s_2 j})$ بردار خروجی نامطلوب با s_2 تا خروجی نامطلوب یعنی $r_2=1,...,s_2$، موجود باشد.

در تحلیل پوششی داده‌ها جهت برآورد کارایی واحدهای تصمیم‌گیری یا واحدهای تولیدی، نسبت افزایش خروجی‌ها به کاهش ورودی‌ها، مورد بررسی قرار می‌گیرد ولی در صورت وجود خروجی نامطلوب، نمی‌توان صرفا افزایش خروجی‌ها را جهت ارزیابی کارایی، معیار قرار داد. در چنین شرایطی باید هدف‌گذاری جهت کارا بودن واحدهای تصمیم‌گیری به این سمت پیش برود که مصرف ورودی‌ها و تولید محصولات نامطلوب هر دو کاهش یابند، در عین حال توأمان تولید محصولات مطلوب نهایی، افزایش یابد. رویکردهای متفاوتی برای مدل‌سازی واحدهای تصمیم‌گیری در حضور عوامل نامطلوب در نظر گرفته شده است که یکی از این رویکردها ساخت مجموعه امکان تولید با استفاده از اصل دسترسی‌پذیری ضعیف می‌باشد.

۲-۱: دسترسی‌پذیری ضعیف

تعریف: فرض کنید که X نشان دهنده بردار ورودی‌ها و Y نشان دهنده بردار خروجی‌های واحد تحت ارزیابی DMU_j باشند و $P(x)$ مجموعه امکان تولید که به صورت زیر در نظر گرفته شده است:

$$P(x)=\left\{y \,\middle|\, y;\ x\epsilon R_{+}^{m} \text{ توسط x تولید می شوند}\right\}$$

حال ضریب انبساطی α و ضریب انقباضی θ را در نظر گرفته و اصل دسترسی‌پذیری ضعیف برای خروجی‌ها و ورودی‌ها را به صورت ذیل تعریف می‌کنیم.

دسترسی‌پذیری ضعیف برای مقادیر ورودی‌ها :

اگر داشته باشیم

$$\forall(x,y),\forall\alpha[(x,y)\in \mathrm{P(x)},\alpha\geq 1\Rightarrow(\alpha \mathrm{x},\mathrm{y})\in \mathrm{P(x)}]$$

دسترسی‌پذیری ضعیف برای مقادیرخروجی‌ها:

اگر داشته باشیم

$$\forall(x,y),\forall\theta[(x,y)\in \mathrm{P(x)},0\leq\theta\leq 1\Rightarrow(\mathrm{x},\theta \mathrm{y})\in \mathrm{P(x)}]$$

۲-۲: دسترسی‌پذیری ضعیف در حضور عوامل نامطلوب

در دسترسی‌پذیری ضعیف خروجی‌های مطلوب ($y^{g}_{r_{1}j}$) و خروجی‌های نامطلوب ($y^{b}_{r_{2}j}$) به وسیله ورودی‌های x تولید می‌شود که تکنولوژی تولید آن‌ها به صورت زیر مطرح گردیده است[۱۵].

$$\mathrm{P(x)}=\left\{(y^{g}_{r_{1}j},\ y^{b}_{r_{2}j})\ \middle|\ \text{توسط x تولید می شوند } y^{g}_{r_{1}j},\ y^{b}_{r_{2}j}\ ;\ x\in R^{m}_{+}\right\}$$

تعریف۱: محصولات یا خروجی‌های مطلوب و خروجی‌های نامطلوب شرط دسترسی‌پذیری ضعیف را دارا می‌باشند اگر و فقط اگر

$$(y^{g}_{r_{1}j},y^{b}_{r_{2}j})\in P(x),0\leq\theta\leq 1\Rightarrow(\theta y^{g}_{r_{1}j},\theta y^{b}_{r_{2}j})\in P(x),x\in R^{m}_{+}$$

۲-۳: مجموعه امکان تولید فاروگراسکوف در حضور تولید محصولات نامطلوب یا خروجی‌های نامطلوب

فرض کنیم تعداد n تا DMU مفروض باشد که برای DMU_j ، x_{ij} بردار ورودی‌ها با m تا ورودی، $y^{g}_{r_{1}j}$ بردار خروجی‌های مطلوب با s_1 تا خروجی مطلوب، $y^{b}_{r_{2}j}$بردار خروجی‌های نامطلوب با s_2تا خروجی نامطلوب در نظر گرفته شده باشد. فاروگراسکوف روابطی جهت محاسبه کارایی مطرح کردند که از اصول موضوعه‌ای استفاده می‌شد که شرط دسترسی‌پذیری ضعیف در آن اصول، گنجانده شده بود. مجموعه امکان تولید (رابطه ۱) نشان دهنده مجموعه امکان تولید، پیشنهادی فار و گراسکوف می‌باشد.

$$T_{FG}=\{(y^{g},y^{b},\mathrm{x})\ \Big|\ \sum_{j=1}^{n}\theta\lambda_j y^{g}_{r_{1}j}\geq y^{g}_{r_1},\ \sum_{j=1}^{n}\theta\lambda_j y^{b}_{r_{2}j}=y^{b}_{r_2},\ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij}\leq x_i,\quad (۱)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1,\lambda_j\geq 0,\ 0<\theta\leq 1,\quad j=1,\ldots,n,i=1,\ldots,m,r_1=1,\ldots,s_1,r_2=1,\ldots,s_2\}$$

آنها مجموعه امکان تولید، مورد نظر خود را با استفاده از ضرایب انقباضی ثابت θارائه دادند که تا جایی که امکان دارد خروجی‌های نامطلوب را محدود کنند. هم چنین اصول موضوعه، تحدب، دسترسی‌پذیری قوی برای ورودی‌ها

و خروجی‌های مطلوب و اصل دسترسی‌پذیری ضعیف برای تمام خروجی‌ها را جهت ارائه مدل پیشنهادی خود در نظر گرفتند.

۲-۴: مجموعه امکان تولیدکاسمانن در حضور تولید خروجی‌های نامطلوب[۶] :

معادلات فار و گراسکوف به خاطر این که در مجموعه امکان تولید، احتمال داشت که خیلی نتواند خاصیت محدب بودن خود را نشان دهد، بعدها روابط کاسمانن ارائه شد که خاصیت تحدب بودن را به خوبی ارائه می‌داد. کاسمانن برای ساخت مجموعه امکان تولید از اصول موضوعه محدب بودن، دسترسی‌پذیری قوی برای تمام ورودی‌ها و خروجی‌های مطلوب، دسترسی‌پذیری ضعیف برای تمام خروجی‌ها بهره گرفت. در تکنولوژی کاسمانن از ضرایب انقباضی غیریکسان استفاده شد تا بتواند خاصیت تحدب را به خوبی نشان دهد. این مجموعه امکان تولید در (۲) ارائه شده است .

ساخت مجموعه امکان تولید از اصول موضوعه محدب بودن، دسترسی‌پذیری قوی برای تمام ورودی‌ها و تمام خروجی‌ها بهره گرفت. در تکنولوژی کاسمانن از ضرایب انقباضی غیریکسان استفاده شد تا بتواند خاصیت تحدب را به خوبی نشان دهد. این مجموعه امکان تولید در رابطه (۲) ارائه شده است.

$$T_K = \{(y^g, y^b, x) \Big| \sum_{j=1}^{n} \theta_j \lambda_j y^g_{r_1 j} \geq y^g_{r_1}, \sum_{j=1}^{n} \theta_j \lambda_j y^b_{r_2 j} = y^b_{r_2}, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_{ij} \leq x_i, \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1, \ \lambda_j \geq 0, \ 0 < \theta \leq 1, \ j = 1,...,n, i = 1,...,m, r_1 = 1,...,s_1, r_2 = 1,...,s_2\} \tag{۲}$$

برای خطی‌سازی روابط (۲) از تغییر متغیر بیان شده در رابطه ۳ استفاده می‌شود.

$$\begin{cases} \theta_j \lambda_j = \rho_j \\ (1-\theta_j)\lambda_j = \mu_j \\ \mu_j + \rho_j = \lambda_j \end{cases} \tag{۳}$$

لذا روابط ۲ را می‌توان به صورت رابطه ۴زیر بازنویسی کرد.

$$T_L^K = \{(y^g, y^b, x) \Big| \sum_{j=1}^{n} \rho_j y^g_{r_1 j} \geq y^g_{r_1}, \sum_{j=1}^{n} \rho_j y^b_{r_2 j} = y^b_{r_2}, \sum_{j=1}^{n} (\mu_j + \rho_j) x_{ij} \leq x_i, \quad \sum_{j=1}^{n} (\mu_j + \rho_j) = 1, \mu_j \geq 0, \rho_j \geq 0, j = 1,...,n, i = 1,...,m, r_1 = 1,...,s_1, r_2 = 1,...,s_2\} \tag{٤}$$

مدل (۴)، مدل خطی شده‌ی معادلات کاسمانن می‌باشد که خاصیت محدب بودن را با استفاده از ضرایب انقباضی غیریکسان، در مجموعه امکان تولید، به خوبی توانست نشان بدهد.

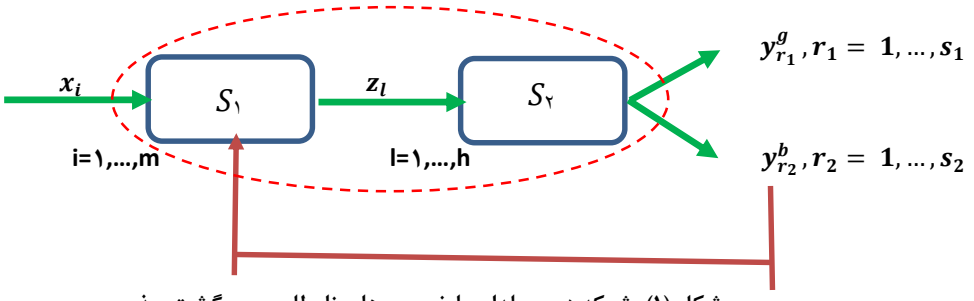
۳- یافته‌های تحقیق

ارزیابی کارایی شبکه دومرحله‌ای در حضور خروجی‌های نامطلوب و برگشت‌پذیر

فرض کنید n واحد تحت ارزیابی مفروض باشد بطوری که DMU_j ، $j=1,...,n$ ، دارای ساختار شبکه دومرحله‌ای مشابه با شکل (۱) می‌باشد .

در شکل (۱)، $x_i=(x_1,...,x_m)$ ورودی‌های مرحله اول هستند و $z_l=(z_1,...,z_h)$ خروجی‌های مرحله اول هستند، که به عنوان ورودی در مرحله دوم مصرف می‌شود. $y_r^g=(y_1^g,...,y_{s_1}^g)$ خروجی‌های مطلوب برای مرحله دوم هستند و $y_r^b=(y_1^b,...,y_{s_2}^b)$ خروجی‌های نامطلوب برای مرحله دوم هستند، که این خروجی‌ها را دوباره می‌توان به چرخه تولید به عنوان مواد اولیه، بازگشت داد پس به عنوان ورودی نامطلوب، به مرحله اول وارد سیستم می‌شود. برای به دست آوردن کارایی، ابتدا مرحله دوم را به عنوان رهبر در نظر می‌گیریم. تکنولوژی تولید به همراه شرط دسترسی‌پذیری ضعیف برای این مرحله با استفاده از ضرایب انقباضی به صورت رابطه (۵) در نظر گرفته می‌شود.

$$T_2=\{(z,y^g,y^b)\Big|\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^2 z_{Lj}\le z_L,\ \sum_{j=1}^{n}\theta_j\lambda_j^2 y^g_{r_1 j}\ge y^g_{r_1},\sum_{j=1}^{n}\theta_j\lambda_j^2 y^b_{r_2 j}\ge y^b_{r_2},\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^2=1,\quad \lambda_j^2\ge 0,0\le\theta_j\le 1,\quad j=1,...,n,l=1,...,h,r_1=1,...,s_1,r_2=1,...,s_2\} \qquad (۵)$$



شکل (۱): شبکه دومرحله‌ای با خروجی‌های نامطلوب و برگشت‌پـذیر

حال که تکنولوژی تولید مرحله دوم تعیین گردید، کارایی مرحله دوم به صورت مدل (۶) که مدلی شعاعی در حضور شرط دسترسی‌پذیری ضعیف است برای DMU_o محاسبه می‌گردد.

$$e_2 = Min\ \varphi_{r_2} \qquad (٦)$$

$$s.t$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 Z_{lj} \le Z_{lo}, \qquad l = 1,...,h,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \theta_j \lambda_j^2 y_{r_1 j}^{g} \ge y_{r_1 o}^{g}, \qquad r_1 = 1,...,s_1,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \theta_j \lambda_j^2 y_{r_2 j}^{b} = \varphi_{r_2} y_{r_2 o}^{b}, \quad r_2 = 1,...,s_2,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 = 1,$$

$$\lambda_j^2 \ge 0,\ 0 \le \theta_j \le 1, \quad j = 1,...,n.$$

علامت تساوی به خاطر وجود شرط دسترسی‌پذیری ضعیف در قید سوم مدل نوشته شده است و بیان کننده این موضوع هست که خروجی‌های بد، لااقل از مقداری که دارد بیشتر نشود. جهت خطی کردن مدل (۶) از تغییر متغیر (۷) برای خطی‌سازی استفاده می‌کنیم.

$$\begin{cases} \theta_j \lambda_j^2 = \rho_j \\ \mu_j = (1-\theta_j)\lambda_j^2 \\ \rho_j + \mu_j = \lambda_j^2 \end{cases} \qquad (٧)$$

خطی شده مدل(۶) را به صورت مدل (۸) می‌نویسیم :

$$e_2 = Min\ \varphi_{r_2} \qquad (٨)$$

$$s.t$$

$$\sum_{j=1}^{n} (\rho_j + \mu_j) Z_{lj} \le Z_{lo}, \quad l = 1,...,h,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \rho_j y_{r_1 j}^{g} \ge y_{r_1 o}^{g}, \qquad r_1 = 1,...,s_1,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \rho_j y_{r_2 j}^{b} = \varphi_{r_2} y_{r_2 o}^{b}, \quad r_2 = 1,...,s_2,$$

$$\sum_{j=1}^{n} (\rho_j + \mu_j) = 1,$$

$$\rho_j \ge 0, \mu_j \ge 0, \qquad j = 1,...,n.$$

تعریف۲: فرض کنید $(\varphi_{r_2}^*, \rho_j^*, \mu_j^*)$ جواب بهینه مدل (۸) باشد، $\varphi_{r_2}^* = 1$ نشان دهنده آن است که DMU_o در مرحله دو کارا است. در غیر این صورت DMU_o در مرحله دوم ناکارا می‌باشد. برای هر جواب شدنی، مدل (۸) ، روابط زیر برقرار است.

$$\sum_{j=1}^{n}(\rho_j + \mu_j)Z_{lj} = Z_{lo} - s_l, \quad l = 1,...,h,$$

$$\sum_{j=1}^{n}\rho_j y_{r_1 j}^{g} = y_{r_1 o}^{g} + s_{r_1}, \quad r_1 = 1,...,s_1,$$

$$\sum_{j=1}^{n}\rho_j y_{r_2 j}^{b} = \varphi_{r_2} y_{r_2 o}^{b}, \quad r_2 = 1,...,s_2.$$

حال برای محاسبه کارایی مرحله اول، این مرحله را به عنوان پیرو **(follower)** در نظر می‌گیریم. ابتدا تکنولوژی تولید را به صورت رابطه (۹) تعریف می‌کنیم :

$$T_1 = \{(X, Z, y^b = X^b) \Big| \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^1 x_{ij} \le x_i, \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^1 x_{ij} \le x_i, \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^1 Z_{lj} \ge Z_l, \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^1 y_{r_2 j}^{b} \le y_{r_2}^{b}, \quad (۹)$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^1 = 1, \lambda_j^1 \ge 0, j = 1,...,n, i = 1,...,m, l = 1,...,h, r_2 = 1,...,s_2\}$$

پس از تعیین مجموعه امکان تولید برای مرحله اول، کارایی با استفاده از مدل (۱۰) محاسبه می‌شود.

$$e_1 = Min\ \bar{\theta}_i \quad (۱۰)$$

$$s.t$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^1 x_{ij} \le \bar{\theta}_i x_{io}, \quad i = 1,...,m,$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^1 y_{r_2 j}^{b} \le y_{r_2 o}^{b}, \quad r_2 = 1,...,s_2,$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^1 Z_{lj} \ge Z_L, \quad l = 1,...,h$$

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^1 = 1$$

$$\lambda_j^1 \ge 0, \quad j = 1,...,n$$

در مدل ارائه شده، هدف بر مبنای کاهش ورودی‌ها قرار گرفته شده است. مقدار بهینه قید مربوط به متغیرهای میانی که قید سوم برای مدل(۱۰) می‌باشد، با استفاده از مدل‌سازی مرحله دوم به دست می‌آید.

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^1 Z_{lj} = \sum_{j=1}^{n} (\rho_j^* + \mu_j^*) Z_{lj}$$

پس از بررسی کارایی مرحله اول و دوم در این قسمت به محاسبه کارایی کلی می‌پردازیم. مجموعه امکان تولید برای کل شبکه دو مرحله‌ای را به صورت رابطه (۱۱) تعریف می‌کنیم.

$$T = \{(\mathrm{X}, \mathrm{Z}, \mathrm{y}^g, y^b = X^b \mid \tag{۱۱}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^1 x_{ij} \le x_i, \quad i = 1,...,\mathrm{m},$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^1 y_{r2j}^b \le y_{r2}^b, \quad r_2 = 1,...,s_2,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^1 Z_{Lj} \ge Z_l, \quad l = 1,...,\mathrm{h}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 Z_{Lj} \le Z_l, \quad l = 1,...,\mathrm{h}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \theta_j \lambda_j^2 y_{r1j}^g \le y_{r1}^g, \quad r_1 = 1,...,s_1,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \theta_j \lambda_j^2 y_{r2j}^b = y_{r2}^b, \quad r_2 = 1,...,s_2,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^1 y_{r2j}^b \le \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 y_{r2j}^b, \quad r_2 = 1,...,s_2,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^1 = 1, \ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 = 1$$

$$\lambda_j^1 \ge 0, \lambda_j^2 \ge 0, \ \theta_j \ge 1 \qquad j = 1,...,n\}$$

پس از در نظر گرفتن مجموعه امکان تولید برای کل شبکه دومرحله‌ای، مدل نهایی با استفاده از مدل (۱۲) به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$e_T = \min \bar{\theta}_i \qquad (۱۲)$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^1 x_{ij} \le \bar{\theta}_i x_{io}, \quad i = 1,...,m,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^1 y_{r_2 j}^b \le y_{r_2 o}^b, \quad r_2 = 1,...,s_2,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^1 Z_{lj} \ge Z_{lo}, \quad l = 1,...,h,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 Z_{lj} \le Z_{lo}, \quad l = 1,...,h,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^1 Z_{lo} \ge \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 Z_{lo} \quad l = 1,...,h,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \theta_j \lambda_j^2 y_{r_1 j}^g \ge y_{r_1 o}^g, \quad r_1 = 1,...,s_1,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \theta_j \lambda_j^2 y_{r_2 j}^b = y_{r_2 o}^b, \quad r_2 = 1,...,s_2,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^1 y_{r_2 j}^b \le \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 y_{r_2 o}^b, \quad r_2 = 1,...,s_2,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^1 = 1, \qquad \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2 = 1, \qquad \lambda_j^1 \ge 0, \lambda_j^2 \ge 0, \ \theta_j \ge 1 \qquad j = 1,...,n\}$$

جهت خطی کردن مدل (۱۲) از تغییر متغیر (۱۳) برای خطی‌سازی استفاده می‌کنیم .

$$\begin{cases} \lambda_j^1 = \beta_j^1 + \alpha_j^1 \\ \theta_j \lambda_j^1 = \beta_j^1 \\ \alpha_j^1 = (1-\theta_j^1)\lambda_j^1 \\ \lambda_j^2 = \beta_j^2 + \alpha_j^2 \\ \theta_j \lambda_j^2 = \beta_j^2 \\ \alpha_j^2 = (1-\theta_j^2)\lambda_j^2 \end{cases} \qquad (۱۳)$$

خطی شده مدل(۱۲) را به صورت مدل (۱۴) می‌نویسیم :

$$e_T = \min \bar{\theta}_i \qquad (۱۴)$$

$$\sum_{j=1}^{n}(\beta_j^1 + \alpha_j^1)x_{ij} \le \bar{\theta}_i x_{io}, \quad i = 1,...,m,$$

$$\sum_{j=1}^{n}(\beta_j^1 + \alpha_j^1)y_{r_2 j}^b \le y_{r_2 o}^b, \quad r_2 = 1,...,s_2,$$

$$\sum_{j=1}^{n}(\beta_j^1 + \alpha_j^1)Z_{lj} \ge Z_{lo}, \quad l = 1,...,h,$$

$$\sum_{j=1}^{n}(\beta_j^2 + \alpha_j^2)Z_{lj} \le Z_{lo}, \quad l = 1,...,h,$$

$$\sum_{j=1}^{n}(\beta_j^1 + \alpha_j^1)Z_{lo} \ge \sum_{j=1}^{n}(\beta_j^2 + \alpha_j^2)Z_{lo} \quad l = 1,...,h,$$

$$\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2 y_{r_1 j}^g \ge y_{r_1 o}^g, \quad r_1 = 1,...,s_1,$$

$$\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2 y_{r_2 j}^b = y_{r_2 o}^b, \quad r_2 = 1,...,s_2,$$

$$\sum_{j=1}^{n}(\beta_j^1 + \alpha_j^1)y_{r_2 j}^b \le \sum_{j=1}^{n}(\beta_j^2 + \alpha_j^2)y_{r_2 o}^b, \quad r_2 = 1,...,s_2,$$

$$\sum_{j=1}^{n}(\beta_j^1 + \alpha_j^1) = 1, \ \sum_{j=1}^{n}(\beta_j^2 + \alpha_j^2) = 1,$$

$$\beta_j^1 \ge 0, \alpha_j^1 \ge 0, \beta_j^2 \ge 0, \alpha_j^2 \ge 0, \qquad j = 1,...,n$$

$$0 \le \bar{\theta}_i \le 1 \quad i = 1,...,m\}$$

همان طور که مطرح گردید کارایی در مرحله اول و دوم جداگانه به دست آورده شد و در نهایت کارایی جهت کل شبکه مورد بررسی قرار گرفت. برای محاسبه کارایی مرحله اول هدف کاهش ورودی‌ها قرار گرفت و برای مرحله دوم هدف، کاهش خروجی‌های نامطلوب، مدل‌سازی شد و مدل نهایی بر مبنای کاهش ورودی‌ها، کارایی، مورد ارزیابی قرار گرفت، هم چنین علامت تساوی در قید هفتم مدل (۱۵) بیانگر دسترسی‌پذیری ضعیف می‌باشد. تا اینجا برای محاسبه کارایی از مدل‌های شعایی در حضور شرط دسترسی‌پذیری ضعیف، مورد استفاده قرار گرفت.

در ابتدا، محققین تحلیل پوششی داده‌ها جهت ارزیابی کارایی، استفاده از مدل‌های شعاعی را مدنظر داشتند. زیرا اساس مدل‌های تحلیل پوششی داده‌ها بر مبنای شعاعی بودن، در نظر گرفته می‌شد. اما استفاده تنها از مدل‌های شعاعی امکان خطای نتایج را بیشتر می‌کند، زیرا ارزیابی کارایی به بسیاری از جنبه‌های درون سازمانی ارتباط دارد. بنابراین لازم است که برای نتیجه مطلوب روش‌های گوناگون اعم از شعاعی و غیرشعاعی مورد بررسی قرار گیرد. به صورت کلی مدل‌های اندازه‌گیری کارایی به دو گروه شعاعی و غیرشعاعی تقسیم می‌شوند. در مدل‌های

شعاعی ورودی‌ها و یا خروجی‌ها، متناسب با هم تغییر می‌کنند. مثلا ورودی‌های x همگی به نسبت θ کاهش می‌یابد ولی در مدل‌های غیرشعاعی ورودی‌ها و یا خروجی‌ها به یک نسبت تغییر نمی‌کنند، از این رو مدل‌های غیرشعاعی قدرت تشخیص بالاتری نسبت به مدل‌های شعاعی جهت ارزیابی کارایی دارند. در مدل (۱۲) اگر $\bar{\theta}_i = 1$ آنگاه DMU_o روی مرز کارایی قرار گرفته شده است(کارای قوی یا کارای ضعیف می‌باشد). اگر $0 < \bar{\theta}_i < 1$آنگاه، DMU_o ناکارا می‌باشد و میزان ناکارایی $1-\bar{\theta}_i$ محاسبه می‌گردد. ولی چون تمام ورودی‌ها به یک نسبت ثابت انقباض پیدا می‌کند، پس تمام ناکارایی را نمی‌توان محاسبه کرد از این رو باید به سمت مدل‌هایی برویم که بتوان تمام میزان ناکارایی را با دقت بیشتری به دست آورد. بلکه بتوان راه حل دقیقی جهت افزایش بهره‌وری به واحدهای تصمیم‌گیری ارائه داد. بنابراین مدل‌های غیرشعاعی یا تکنیکال برای محاسبه میزان کارایی یا ناکارایی، پیشنهاد شده است. جهت محاسبه کارایی کلی مدل غیرشعاعی (۱۵) پیشنهاد می‌شود. برای DMU_o با کمک مدل راسل اصلاح شده تحت بازه به مقیاس ثابت می‌توان مدل زیر را پیشنهاد داد.

$$\min \left\{ \bar{\theta}_1, ..., \bar{\theta}_m \right\} \qquad (۱۵)$$

$$\min \left\{ \bar{\varphi}_1, ..., \bar{\varphi}_{s_2} \right\}$$

$$s.t$$

$$\sum_{j=1}^{n} (\beta_j^1 + \alpha_j^1) x_{ij} \le \bar{\theta}_i x_{io}, \quad i = 1, ..., m,$$

$$\sum_{j=1}^{n} (\beta_j^1 + \alpha_j^1) y_{r_2 j}^b \le y_{r_2 o}^b, \quad r_2 = 1, ..., s_2,$$

$$\sum_{j=1}^{n} (\beta_j^1 + \alpha_j^1) Z_{lj} \ge Z_{lo}, \quad l = 1, ..., h,$$

$$\sum_{j=1}^{n} (\beta_j^2 + \alpha_j^2) Z_{lj} \le Z_{lo}, \quad l = 1, ..., h,$$

$$\sum_{j=1}^{n} (\beta_j^1 + \alpha_j^1) Z_{lo} \ge \sum_{j=1}^{n} (\beta_j^2 + \alpha_j^2) Z_{lo} \quad l = 1, ..., h$$

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j^2 y_{r_1 j}^g \ge y_{r_1 o}^g, \quad r_1 = 1, ..., s_1,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \beta_j^2 y_{r_2 j}^b = \bar{\varphi}_{r_2} y_{r_2 o}^b, \quad r_2 = 1, ..., s_2,$$

$$\sum_{j=1}^{n} (\beta_j^1 + \alpha_j^1) y_{r_2 j}^b \le \sum_{j=1}^{n} (\beta_j^2 + \alpha_j^2) y_{r_2 o}^b, \quad r_2 = 1, ..., s_2,$$

$$0 \le \bar{\theta}_i \le 1, \qquad i = 1, ..., m,$$

$$0 \le \bar{\varphi}_{r_2} \le 1 \qquad r_2 = 1, ..., s_2,$$

$$\sum_{j=1}^{n} (\beta_j^1 + \alpha_j^1) = 1, \ \sum_{j=1}^{n} (\beta_j^2 + \alpha_j^2) = 1$$

$$\beta_j^1 \ge 0, \alpha_j^1 \ge 0, \beta_j^2 \ge 0, \alpha_j^2 \ge 0, \qquad j = 1, ..., n$$

$$0 \le \bar{\theta}_i \le 1 \quad \}$$

مسئله (۱۵) یک مسئله چندهدفه است که یکی از جواب‌های پاراتو بهین آن از مجموع وزن‌دار شده توابع هدف به صورت مدل (۱۶) به دست می‌آوریم. در ضمن تابع هدف مدل(۱۵) را می‌توان به صورت یک تابع هدف یکسان به صورت مینیمم‌سازی در نظر گرفت.

(۱۶)

$$\min \quad e_o^a = \frac{1}{m+s_2}\left(\sum_{i=1}^{m}\bar{\theta}_i + \sum_{r_2=1}^{s_2}\bar{\varphi}_{r_2}\right)$$

$$s.t$$

$$\sum_{j=1}^{n}(\beta_j^1+\alpha_j^1)x_{ij} \le \bar{\theta}_i x_{io}, \quad i=1,...,m,$$

$$\sum_{j=1}^{n}(\beta_j^1+\alpha_j^1)y_{r_2j}^b \le y_{r_2o}^b, \quad r_2=1,...,s_2,$$

$$\sum_{j=1}^{n}(\beta_j^1+\alpha_j^1)Z_{lj} \ge Z_{Lo}, \quad l=1,...,h,$$

$$\sum_{j=1}^{n}(\beta_j^2+\alpha_j^2)Z_{lj} \le Z_{lo}, \quad l=1,...,h,$$

$$\sum_{j=1}^{n}(\beta_j^1+\alpha_j^1)Z_{lo} \ge \sum_{j=1}^{n}(\beta_j^2+\alpha_j^2)Z_{lo} \quad l=1,...,h,$$

$$\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2 y_{r_1j}^g \ge y_{r_1o}^g, \quad r_1=1,...,s_1,$$

$$\sum_{j=1}^{n}\beta_j^2 y_{r_2j}^b = \bar{\varphi}_{r_2} y_{r_2o}^b, \quad r_2=1,...,s_2,$$

$$\sum_{j=1}^{n}(\beta_j^1+\alpha_j^1)y_{r_2j}^b \le \sum_{j=1}^{n}(\beta_j^2+\alpha_j^2)y_{r_2o}^b, \quad r_2=1,...,s_2,$$

$$0 \le \bar{\theta}_i \le 1, \qquad i=1,...,m,$$

$$0 \le \bar{\varphi}_{r_2} \le 1 \qquad r_2=1,...,s_2,$$

$$\sum_{j=1}^{n}(\beta_j^1+\alpha_j^1)=1, \ \sum_{j=1}^{n}(\beta_j^2+\alpha_j^2)=1$$

$$\beta_j^1 \ge 0, \alpha_j^1 \ge 0, \beta_j^2 \ge 0, \alpha_j^2 \ge 0, \qquad j=1,...,n$$

$$0 \le \bar{\theta}_i \le 1\}$$

تعریف۴ : فرض کنید جواب آن بهینه مدل (۱۶) در ارزیابی DMU_o باشد و e_o^{a*} مقدار بهینه باشد DMU_o را کارای کلی نامیم هر گاه $\bar{\theta}_i^* = 1, \bar{\varphi}_{r_2}^* = 1$ برای $i=1,...,m$ و $r_2=1,...,s_2$ در غیر این صورت DMU_o را ناکارا می‌نامیم.

توجه کنید که اگر $(\alpha_j^{1*},\beta_j^{1*},\alpha_j^{2*},\beta_j^{2*},\bar{\theta}_i^*,\bar{\varphi}_{r_2}^*)$ جواب بهینه مدل (۱۶) در ارزیابی DMU_o باشد و DMU_o کارای کلی باشد یعنی e_o^{a*} در این صورت DMU_o در مرحله اول و دوم نیز کارا می‌باشد و باالعکس یعنی می‌توان گفت که:

$$e_o^{*(1)}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\bar{\theta}_i^* \quad ,e_o^{*(1)}=\frac{1}{s_2}\sum_{r_2=1}^{s_2}\bar{\varphi}_{r_2}^*$$

قضیه۱: در هر جواب بهین مدل (۱۶) تمام دسته قیود ورودی نافذ هستند یعنی

$$\sum_{k=1}^{K}(\beta_j^{1*}+\alpha_j^{1*})x_{ij}=\bar{\theta}_i^* x_{io},\quad i=1,...,m$$

اثبات: فرض کنید $(\alpha_j^{1*},\beta_j^{1*},\alpha_j^{2*},\beta_j^{2*},\bar{\theta}_i^*,\bar{\varphi}_{r_2}^*)$ جواب بهینه مدل (۱۶) در ارزیابی DMU_o باشد.

برهان خلف: اگر قیود متناظر ورودی برای جواب بهین، نافذ نباشد. بدون از دست دادن کلیت مسئله فرض کنیم یک قیدی وجود دارد که نافذ نیست. به عنوان مثال ورودی اول را در نظر می‌گیریم که نافذ نباشد.

$\sum_{k=1}^{K}(\beta_j^{1*}+\alpha_j^{1*})x_{1j}<\bar{\theta}_1^* x_{1o}$ چون رابطه به صورت اکید کوچکتر می‌باشد، برای اینکه قید را به صورت تساوی در نظر بگیریم باید یک مقدار به صورت اکید بزرگتر از صفر به طرف اول تساوی اضافه شود. ضمنا مقادیر ورودی‌ها نیز اکیدا مثبت می‌باشد که از پیش فرض‌های مسئله است. در نتیجه می‌توان نوشت:

$x_{1o}>0, s_1^-<0$ یعنی :

$$\sum_{k=1}^{K}(\beta_j^{1*}+\alpha_j^{1*})x_{1j}+s_1^-=\bar{\theta}_1^* x_{1o}, s_1^->0$$

$$\sum_{k=1}^{K}(\beta_j^{1*}+\alpha_j^{1*})x_{1j}=\bar{\theta}_1^* x_{1o}-s_1^-$$

چون s_1^- مقدار مثبت اکید می‌باشد پس می‌توان آن را به صورت حاصل ضرب دو عدد مثبت اکید x_{1o}^- و γ_1 نوشت.

$$\sum_{k=1}^{K}(\beta_j^{1*}+\alpha_j^{1*})x_{1j}+s_1^-=\bar{\theta}_1^* x_{1o}-\gamma_1 x_{1o}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{K}(\beta_j^{1*}+\alpha_j^{1*})x_{1j}=(\bar{\theta}_1^*-\gamma_1)x_{1o}$$

حال اگر $\bar{\bar{\theta}}_1 = \bar{\theta}_1^* - \gamma_1$ قرار داده شود پس می‌توان نوشت

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{K} (\beta_j^{1*} + \alpha_j^{1*}) x_{1j} = \bar{\bar{\theta}}_1 \, x_{1o}$$

واضح است که $\bar{\bar{\theta}}_1 < \bar{\theta}_1^*$ در نتیجه چون مسئله مینیمم‌سازی است، یک مقدار بهینه‌تر $\bar{\bar{\theta}}_1$ برای ورودی‌ها به دست آوردیم که با فرض بهینه بودن $\bar{\theta}_i^*$ در تناقض است.

قضیه۲: $e_o^1 = e_o^2 = 1$ اگر و تنها اگر $e_o^a = 1$

اثبات: ابتدا فرض می‌کنیم که کارایی مرحله اول و دوم برابر یک است. ثابت می‌کنیم که کارایی کل شبکه برابر یک خواهد شد. اگر $e_o^1 = 1$ آنگاه می‌توان نوشت $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \bar{\theta}_i^* = 1$ در نتیجه $\forall i : \bar{\theta}_i^* = 1$. اگر $e_o^2 = 1$ آنگاه می‌توان نوشت $\frac{1}{s_2}\sum_{r_2=1}^{s_2} \bar{\varphi}_{r_2}^* = 1$. در نتیجه $\forall r_2 : \bar{\varphi}_{r_2}^* = 1$. اکنون با جاگذاری کارایی مرحله اول و دوم در تابع هدف داریم:

$$e_o^a = \frac{1}{m + s_2}\left(\sum_{i=1}^{m} \bar{\theta}_i + \sum_{r_2=1}^{s_2} \bar{\varphi}_{r_2}\right)$$

$$\Rightarrow e_o^a = \frac{1}{m + s_2}\left(\sum_{i=1}^{m} 1 + \sum_{r_2=1}^{s_2} 1\right)$$

$$\Rightarrow e_o^a = \frac{m + s_2}{m + s_2} = 1$$

حال برگشت رابطه اثبات می‌شود یعنی کارایی کل شبکه را برابر با یک در نظر می‌گیریم. سپس ثابت می‌شود کارایی تک تک مراحل برابر یک می‌شود. فرض کنیم $e_o^a = 1$ در نتیجه داریم

$$\frac{1}{m + s_2}\left(\sum_{i=1}^{m} \bar{\theta}_i + \sum_{r_2=1}^{s_2} \bar{\varphi}_{r_2}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \forall i : \bar{\theta}_i^* = 1 \;\&\; \forall r_2 : \bar{\varphi}_{r_2}^* = 1$$

پس در نتیجه می توان گفت که کارایی مرحله اول و دوم برابر با یک است. یعنی $\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \bar{\theta}_i^* = 1$ نتیجه می‌دهد که $e_o^1 = 1$.

$\frac{1}{s_2}\sum_{r_2=1}^{s_2} \bar{\varphi}_{r_2}^* = 1$ نتیجه می دهد که $e_o^2 = 1$.

قضیه ۳: مدل(۱۵) و(۱۶) همواره شدنی است .

اثبات: کافی است یک جواب شدنی برای مدل پیدا کنیم که در تمام قیود مسئله صدق کند. مجموعه جواب $(\beta^2 = e_o, \alpha^2 = 0, \bar{\varphi}_{r_2} = 1, \forall r_2, \alpha^1 = 0, \beta^1 = e_o, \bar{\theta}_i = 1, \forall i = 1,..., m)$ یک جواب شدنی برای تمام قیود مدل(۱۵) و (۱۶) می‌باشد پس مدل پیشنهادی همواره یک مدل شدنی است.

تذکر: در مدل‌های راسل اصلاح شده نکته قابل توجه این است که که تمام ورودی‌ها و خروجی‌ها باید مثبت در نظر گرفته شود، در غیر این صورت اگر ورودی i ام مساوی صفر شود آنگاه θ_i حذف می‌شود. اگر خروجی r ام برابر صفر شود آن گاه خروجی r ام، یک مقدار مثبت خیلی کوچک $(\varepsilon > 0)$ در نظر گرفته خواهد شد.

۴-مطالعه کاربردی

۴-۱: انتخاب واحدهای تصمیم‌گیرنده

مدیریت عوامل نامطلوب در مدل‌سازی‌های شبکه‌ای تحلیل پوششی داده‌ها، می‌تواند به مدیران جهت تصمیم-گیری و شناسایی عوامل ناکارایی سیستم، کمک بسیاری کند. برای نمونه ۱۴ شرکت داروسازی حاضر در بورس مورد بررسی قرار گرفته است که با استفاده از صورت‌های مالی شش ماه اول سال ۱۳۹۸، نسبت‌های مالی که عبارتند از نسبت مالکانه، نسبت آنی، نسبت جاری و وجه نقد که از ورودی‌های سیستم دومرحله‌ای می‌باشند. نسبت تسهیلات به سرمایه و گردش دارایی از متغییرهای میانی هستند. بازده دارایی، بازده حقوق صاحبان سهام، حاشیه سود خالص، حاشیه سود ناخالص، حاشیه سود عملیاتی و نسبت پوششی بهره خروجی‌های مطلوب می-باشند. نسبت بدهی به عنوان خروجی نامطلوب می‌باشد که به عنوان ورودی وارد مرحله اول می‌شود. این نسبت‌ها در جدول (۱) مطرح گردیده است.

جدول(۱): صورتهای مالی شرکتهای داروسازی

نسبت‌های مالی / شرکت‌های داروساز	نسبت جاری	نسبت آنی	نسبت وجه نقد	نسبت بدهی	نسبت تسهیلات به سرمایه	نسبت پوششی بهره	نسبت گردش دارایی	نسبت بازده دارایی	نسبت بازده حقوق صاحبان سهام	حاشیه سود ناخالص	حاشیه سود عملیاتی	حاشیه سود خالص	نسبت مالکانه
۱-داروسازی زهراوی	۱٫۸۵۵	۱٫۵۹۵	۰٫۰۲۳	۰٫۸۰۲	۰٫۷۳۳	۱٫۵۶۴	۰٫۳۱۴	۰٫۰۲۳	۰٫۱۱۹	۰٫۳۶۲	۰٫۲۹۱	۰٫۰۷۴	۰٫۱۹۷
۲- داروسازی سبحان	۲٫۰۶۶	۱٫۸۰۴	۰٫۲۶۳	۰٫۷۰۵	۰٫۵۷۴	۲٫۱۴۱	۰٫۳۹۴	۰٫۰۴۸	۰٫۱۶۵	۰٫۳۹۵	۰٫۲۳۴	۰٫۱۲۳	۰٫۲۹۴
۳- داروسازی اکسیر	۱٫۳۲۰	۱٫۰۴۳	۰٫۱۸۴	۰٫۷۳۲	۰٫۵۵۹	۱۰٫۳۷۷	۰٫۵۲۷	۰٫۱۸۶	۰٫۶۹۷	۰٫۵۱۳	۰٫۴۷۲	۰٫۳۵۴	۰٫۲۶۷
۴-داروسازی کاسپین	۱٫۱۴۷	۰٫۹۵۵	۰٫۰۶۱	۰٫۷۵۱	۰٫۶۴۹	۴٫۵۶۴	۰٫۴۰۴	۰٫۱۱۰	۰٫۴۴۶	۰٫۴۵۵	۰٫۴۱۲	۰٫۲۷۴	۰٫۲۴۸
۵-داروسازی تولید دارو	۱٫۳۹۷	۱٫۱۱۸	۰٫۱۳۲	۰٫۷۴۳	۰٫۵۳۰	۵٫۳۶۲	۰٫۳۹۱	۰٫۰۸۹	۰٫۳۴۹	۰٫۴۳۲	۰٫۳۷۶	۰٫۲۲۸	۰٫۲۵۶
۶-داروسازی شهید قاضی	۱٫۲۹۴	۱٫۱۰۱	۰٫۱۹۳	۰٫۶۵۰	۰٫۲۵۲	۴۵٫۶۵۰	۰٫۴۳۱	۰٫۲۳۰	۰٫۶۵۹	۰٫۶۹۲	۰٫۶۷۰	۰٫۵۳۴	۰٫۳۴۹
۷-داروسازی ابوریحان	۱٫۴۴۲	۱٫۱۵۶	۰٫۰۳۶	۰٫۶۷۹	۰٫۴۴۶	۱۱٫۲۳۱	۰٫۵۲۳	۰٫۱۹۱	۰٫۵۹۹	۰٫۵۴۰	۰٫۴۹۳	۰٫۳۶۶	۰٫۳۳۰
۸- داروسازی اسوه	۱٫۴۳۲	۱٫۱۲۱	۰٫۰۸۴	۰٫۵۹۶	۰٫۳۵۳	۲٫۳۷۱	۰٫۲۲۵	۰٫۰۷۶	۰٫۱۹۹	۰٫۴۱۸	۰٫۲۲۸	۰٫۳۴۰	۰٫۳۸۴

۹- داروسازی آوه سینا	۱,۲۶۶	۰,۹۱۵	۰,۰۲۶	۰,۴۸۷	۰,۱۰۴	۱۵,۷۵۸	۰,۲۳۱	۰,۰۵۱	۰,۱۰۰	۰,۴۱۷	۰,۲۹۰	۰,۲۲۱	۰,۵۱۲
۱۰-داروسازی دانا	۱,۵۲۲	۱,۲۴۳	۰,۰۶۶	۰,۶۰۰	۰,۳۲۷	۱۵,۲۴۱	۰,۴۴۴	۰,۱۹۲	۰,۴۸۲	۰,۶۴۲	۰,۶۱۵	۰,۴۳۳	۰,۳۹۹
۱۱-دارو سازی زاگرس فارمد	۱,۷۷۱	۱,۵۵۶	۰,۲۲۷	۰,۳۸۷	۰,۱۶۶	۶,۳۹۶	۰,۴۰۲	۰,۱۳۲	۰,۲۱۶	۰,۵۴۳	۰,۵۰۸	۰,۳۲۸	۰,۶۱۲
۱۲-داروسازی کوثر	۱,۶۸۵	۱,۳۴۱	۰,۱۸۸	۰,۵۲۵	۰,۴۴۰	۱,۱۳۰	۰,۱۷۸	۰,۰۲۵	۰,۰۵۳	۰,۲۸۳	۰,۱۸۱	۰,۱۴۳	۰,۴۷۴
۱۳-داروسازی جابرابن حیان	۱,۸۴۵	۱,۵۵۲	۰,۰۶۴	۰,۴۷۴	۰,۲۵۹	۳,۷۹۹	۰,۲۶۵	۰,۰۶۷	۰,۱۲۷	۰,۳۹۵	۰,۳۳۰	۰,۲۵۲	۰,۵۲۵
۱۴- داروسازی فارابی	۱,۱۶۲	۱,۰۴۴	۰,۰۷۸	۰,۸۲۵	۰,۶۳۰	۵,۴۵۶	۰,۳۶۶	۰,۰۷۶	۰,۴۴۰	۰,۳۶۶	۰,۳۲۷	۰,۲۰۹	۰,۱۷۴

۴-۲: محاسبه کارایی

کارایی ۱۴ شرکت داروسازی با استفاده از مدل (۱۶) مورد ارزیابی قرار گرفته است. که در این مدل از خروجی‌های نامطلوب برگشت‌پذیر استفاده شده است. نتایج حاصله به صورت جدول (۲) نشان داده شده است. در جدول (۲) کارایی ۱۴ شرکت داروسازی در حضور عوامل نامطلوب محاسبه شده است. در این جدول، ستون مربوط به e_o^a، نشان دهنده کارایی کلی شبکه دومرحله‌ای در نظر گرفته شده است. e_o^1 و e_o^2. به ترتیب کارایی مرحله اول و دوم است. $\bar{\theta}_i$ ضریب تغییرات برای ورودی x_{io} می‌باشد که چون چهار تا ورودی برای شبکه دومرحله‌ای وجود دارد پس تعداد i ها ۴ در نظر گرفته شده است و تعداد ستون برای $\bar{\theta}_i$ها نیز ۴ تا می‌باشد. $\bar{\varphi}_{r2}$ ضریب تغییرات جهت خروجی‌های y_{r2o}^b در نظر گرفته شده است که خروجی نامطلوب سیستم می‌باشد و چون یک خروجی نامطلوب برای شرکت‌های داروسازی در نظر گرفته شده است در نتیجه یک ستون از جدول (۲) در محاسبه کارایی را به خود اختصاص داده است

جدول (۲): تجزیه کارایی جهت ۱۴ شرکت داروسازی

DMU	$\bar{\theta}_1$	$\bar{\theta}_2$	$\bar{\theta}_3$	$\bar{\theta}_4$	$\bar{\varphi}_1$	e_o^a	e_o^1	e_o^2
۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۲	۱	۰/۵۵٦	۰/۵۸٤	۰/۲۷۲	۱	۰/٦۸۲	۰/٦۰۳	۱
۳	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
٤	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
٥	۱	۰/۸٥۳	۰/۸۲٤	۰/٤٥٤	۱	۰/۸۲٦	۰/۷۸۲	۱
٦	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۷	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۸	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۹	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۱۰	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۱۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۱۲	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۱۳	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱
۱٤	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱	۱

۵- نتیجه‌گیری

با توجه به مدل‌سازی صورت گرفته برای شبکه دومرحله‌ای با خروجی‌های نامطلوب، همانطور که مشاهده می‌شود شرکت داروسازی زهراوی و شرکت داروسازی تولید دارو دارای نقاط ناکارایی هستند. مدیران شرکت بهتر است تصمیمات خود را بر اصلاح سیستم متمرکز کنند. شرکت داروسازی زهراوی همانطور که مشاهده می شود تقریبا دارای نبست پوششی بهره و حاشیه سود خالص (از خروجی‌های مطلوب) کمتری نسبت به سایر واحدهای داروسازی می‌باشد. همچنین شرکت داروسازی زهراوی تقریبا دارای نسبت بدهی (خروجی‌های نامطلوب) بیشتری نسبت به سایر واحدهای تولیدی می‌باشد و از کمترین نسبت بازده دارایی (از خروجی‌های مطلوب) برخوردار می-باشد. شرکت داروسازی تولید دارو نیز دارای نسبت بدهی بالایی می‌باشد. همچنین این شرکت با این که در مقایسه با سایر DMU ها دارای نسبت پوششی خیلی کمی نمی‌باشد ولی نسبت به داروسازی زهراوی شرایط بهتری دارد. یکی از عوامل ناکارایی داروسازی تولید دارو کاهش حاشیه سود خالص و حاشیه سود ناخالص(به عنوان خروجی‌های مطلوب) می‌باشد. قابل توجه است که تمام DMU هایی که عدد کارایی کلی آنها برابر یک شده است، در مراحل اول و دوم نیز کارا می‌باشند. عکس این موضوع نیز برقرار می‌باشد یعنی DMUهایی که در مراحل اول و دوم کارا می‌باشند، عدد کارایی کل شبکه نیز برابر یک شده است. داروسازی سبحان و داروسازی تولید دارو فقط در مرحله دوم کارا می‌باشند و عدد کارایی برای این دوتا DMU در مرحله اول و کارایی کل برابر یک نشده است. با توجه به مطالب گفته شده مدیران می‌توانند نقاط ضعف و ناکارایی سیستم را شناسایی کنند و جهت رفع آن تصمیمات لازم را به کار گیرند. در ادامه پیشنهاد می‌شود که مدل‌سازی شبکه دومرحله‌ای در حضور عوامل نامطلوب و برگشت‌پذیر با استفاده از داده‌های فازی مورد بررسی قرار گیرد و در تعریف مجموعه امکان تولید شروط جدیدی گنجانده شود.

فهرست منابع

[۱] G.R. Jahanshahloo, F. Hosseinzadeh Lotfi, N. Shoja, G. Tohidi and S. Razavyan, “Undesirable inputs and outputs in DEA models," Applied Mathematics and Computation, Vol. ١٦٩, PP. ٩١٧-٩٢٥, ٢٠٠٥.

[۲] A.R., Amirteimoori, S. Kordrostami and M. Sarparast “Modeling undesirable factors in data envelopment analysis,” Applied Mathematics and Computation, Vol. ١٨٠, PP. ٤٤٤–٤٥٢, ٢٠٠٦.

[۳] A. Hailu and T.S. Veeman, “Non-parametric productivity analysis with undesirable outputs: an application to the Canadian pulp and paper industry,” American Journal of Agricultural Economics, Vol. ٨٣, PP. ٦٠٥-٦١٦, ٢٠٠١.

[٤] R.W. Shephard, “Theory of cost and production functions,” Princeton: Princeton UniversityPress, ١٩٧٠.

[٥] R. Färe and S. Grosskopf, “Nonparametric productivity analysis with undesirable outputs: comment,” American Journal of Agricultural Economics, Vol. ٨٥, PP. ١٠٧٠–١٠٧٤, ٢٠٠٣.

[٦] Kuosmanen T, (٢٠٠٥), “Weak disposability in nonparametric production analysis with undesirable outputs”, American Journal of Agricultural Economics, ٨٧, ١٠٧٧–١٠٨٢.

[٧] T. Kuosmanen and V. Podinovski, “Weak disposability in nonparametric production analysis :Reply to Färe and Grosskopf,” American Journal of Agricultural Economics, Vol. ٩١, PP. ٥٣٩–٥٤٥, ٢٠٠٩.

[٨] C. Kao, ” Network data envelopment analysis: A review,” European Journal of Operational Research, PP. ٢٣٩, ١-١٦, ٢٠١٤.

[٩] C. Kao, ”Efficiency decomposition in network data envelopment analysis: A relational model,” European Journal of Operational Research, Vol. ١٩٢, PP. ٩٤٩-٩٦٢, ٢٠٠٩.

[١٠] C. Kao, “Efficiency measurement for parallel production systems,” European Journal of Operational Research, Vol. ١٩٦, PP. ١١٠٧-١١١٢, ٢٠٠٩.

[١١] C. Kao, “Efficiency decomposition in network data envelopment analysis with slacks-based measures,” Omega, Vol. ٤٥, PP. ١-٦, ٢٠١٤.

[١٢] L. Haitao, C. Chen, W. D.Cook, J. Zhang and J. Zhu, “Two-stage network DEA: Who is the leader ?,” Omega, Vol. ٧٤, PP. ١٥-١٩, ٢٠١٨.

[١٣] L. Liang, W.D. Cook and J. Zhu, “DEA models for two-stage processes: game approachand efficiency decomposition,” Naval Research Logistics, Vol. ٥٥, PP. ٦٤٣–٥٣, ٢٠٠٨.

[١٤] M. Maghbouli, A.R. Amirteimoori and S. Kordrostami, “Two-stage network structures with undesirable outputs: A DEA based approach,” Measurement, Vol. ٤٨, PP. ١٠٩-١١٨, ٢٠١٤.

[۱۵] J. Wu, Q. Zhu, J. Chu and L.Liang, "Two-Stage Network Structures with UndesirableIntermediate Outputs Reused: A DEA Based Approach," Computational Economics, Vol. ٤٦, PP. ٤٥٥-٤٧٧, ٢٠١٥.

[١٦] A. Kalhor and R. KazemiMatin, "Study the effects of abatement factors of weakdisposability in network data envelopment analysis with undesirable outputs," Journal of operational reearch and its applications, Vol. ١٥, PP. ١٠٣-١٢, ٢٠١٨.