دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره سی و هفتم، مرداد و شهریور ۱۴۰۱
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

شبه MV-جبرهای پاراتوپولوژیکی

فرزانه رجبی ستوده[۱]، نادر کوهستانی[۲*]، بهشته میر[۳]

(۳،۲،۱) گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، آمار و علوم کامپیوتر، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۰۵/۱۳   تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۱۲/۱۶

چکیده

در این مقاله PMV - شبه نرم روی شبه MV -جبرها معرفی و برخی از خواص جبری آن مورد بررسی قرار می‌گیرد. به ویژه نشان می‌دهیم که یک تابعگون پادورد از رسته شبه MV-جبرها به رسته نیم گروه‌ها وجود دارد. شبه MV -جبرهای (پارا) توپولوژیکی نیز تعریف و ارتباط آن با PMV -شبه نرم‌ها مطالعه می‌شود. در انتها فیلتر توپولوژی روی این ساختار جبری معرفی و نشان می‌دهیم که این ساختار توپولوژیکی یک شبه MV -جبر پارا توپولوژیکی است.

واژه‌های کلیدی: شبه MV-جبر، PMV-شبه نرم، شبه MV–جبر (پارا) توپولوژیکی، فیلترتوپولوژی.

* عهده‌دار مکاتبات: Email:kouhestani@math.usb…………

۱- مقدمه

چانگ، در سال ۱۹۵۸، ساختار جبری MV- جبرها را جهت ارایه یک اثبات جبری برای قضیه تمامیت حساب گزاره‌ای در منطق لوکاسویچ معرفی کرد. بعد از آن در سال ۱۹۹۹، جورجسکو و یورگولسکو در [5] شبه MV- جبرها معرفی و خواص آن را مورد مطالعه قرار دادند.

هم چنانکه می‌دانیم یک ساختار جبری توپولوژیکی یک ساختار جبری به همرا یک توپولوژی است که عمل‌های ساختار نسبت به توپولوژی پیوسته باشد. گروه‌های توپولوژیکی و فضاهای برداری توپولوژیکی نمونه‌هایی پرکاربرد از این نوع هستند. در دهه‌های اخیر ساختارهای جبری وابسته به منطق مانند BCC- جبرها، BCK- جبرها، مشبکه‌های مانده، BL- جبرها و MV- جبرها به توپولوژی مجهز شده و پیوستگی عمل آنها مورد بحث و بررسی قرار گرفته است. به‌عنوان نمونه می‌توان به مقاله‌های [2,6,7,8,9] اشاره کرد. در این مقاله بر آن شدیم که ساختار جبری شبه MV-جبرها را از این زاویه مورد تحقیق قرار دهیم. برای نیل به این هدف ابتدا در بخش دوم شبه MV-جبرها را و خواص آن معرفی می‌گردد. در بخش سومPMV -شبه نرم را روی این ساختار تعریف و پس از مطالعه خواص جبری آن نحوه ساخت این توابع را روی شبه MV - جبرهای خارج قسمتی و حاصل ضرب شبه MV-جبرها نشان می‌دهیم. با برسسی تاثیر برویختی و یکریختی روی PMV-شبه نرم‌ها نشان می‌دهیم یک تابعگون پادورد از رسته شبه MV-جبرها به رسته نیم گروه‌ها وجود دارد. در بخش چهارم شبه MV- جبرهای (پارا) توپولوژیکی معرفی و ارتباط بین پیوستگی عمل‌های موجود در شبه MV-جبرها را نشان می‌دهیم. ثابت خواهیم کرد که پیوستگی PMV- شبه نرم‌ها روی شبه MV- جبرهای توپولوژیکی با پیوستگی این توابع در عضو خنثی معادل است. سرانجام پس از یاد آوری شبه متریک، نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان روی شبه MV- جبرها یک شبه متریک ساخت بطوریکه یک شبه MV- جبر پاراتوپولوژیکی به دست آید. بخش پنجم را به معرفی و مطالعه چهار نوع فیلتر توپولوژی روی این ساختار جبری اختصاص داده‌ایم. با این چهار توپولوژی این ساختار توپولوژی تبدیل به به یک شبه MV- جبر پاراتوپولوژیکی می‌شود. شرایطی که این ساختار توپولوژیکی تبدیل به شبه MV- جبر توپولوژیکی می‌شود در گزاره (۷-۵) بیان خواهد شد.

۲- شبه MV- جبرها

در این بخش شبه MV- جبرها را تعریف و برخی خواص آن که در بخش های بعد مورد نیاز است را ارایه می‌کنیم. مطالب مربوط به این ساختارها همه از [5] آمده اند. از آنجاییکه شبه MV- جبرها تعمیمی از MV- جبرها هستند، ابتدا تعریف MV- جبرها را ارایه می‌دهیم.

چهار تایی $(A,\oplus,^*,0)$ یک MV- جبر است هرگاه $(A,\oplus,0)$ یک تکواره و برای هر x,y داشته باشیم:

$$x\oplus 0^* = 0^* \quad , (x^*)^* = x,$$
$$(x^*\oplus y)^*\oplus y = (x\oplus y^*)^*\oplus x.$$

تعریف ۲-۱. شش تایی $(A,\oplus,^-,^\neg,0,1)$ یک شبه MV- جبر از نوع $(2,1,1,0,0)$ است هرگاه برای هر $x,y,z\in A$ شرایط زیر برقرار باشد.

$$;x\oplus(y\oplus z)=(x\oplus y)\oplus z(PM1)$$
$$;x\oplus 0 = 0\oplus x = x(PM2)$$
$$;x\oplus 1 = 1\oplus x = 1(PM3)$$
$$;1^\neg = 1^- = 0(PM4)$$
$$;(x^-\oplus y^-)^\neg = (x^\neg\oplus y^\neg)^-(PM5)$$

اگر $;x.y=(x^-\oplus y^-)^\neg=(x^\neg\oplus y^\neg)^-$ آنگاه

$$;x\oplus(x^\neg.y) = y\oplus(y^\neg.x) = (x.y^-)\oplus y\ (PM6)$$
$$;x.(x^-\oplus y) = (x\oplus y^\neg).y(PM7)$$
$$.(x^\neg)^- = (x^-)^\neg = x(PM8)$$

(9) در هر شبه MV- جبر رابطه زیر یک ترتیب جزیی است.

$$x \le y \Leftrightarrow x^{-} \oplus y = 1 \Leftrightarrow y^{\neg}.x = 0$$
$$\Leftrightarrow x.y^{-} = 0 \Leftrightarrow y \oplus x^{\neg} = 1.$$

اگر A یک شبه MV- جبر و

$$x \wedge y = x \oplus (x^{\neg}.y)$$
$$, x \vee y = x.(x^{-} \oplus y)$$

در این صورت بنا بر [5]، سه تایی $(A,\wedge,\vee)$ یک مشبکه می‌باشد. بعلاوه هر شبه MV- جبر متناهی یک MV- جبر است.

گزاره۲-۲. [5] شرایط زیر در شبه MV- جبر A برقرار است.

$$;(x.y).z = x.(y.z) \ (10)$$
$$;0^{\neg} = 0^{-} = 1(11)$$
$$;x.1 = x = 1.x,\ x.0 = 0.x = 0(12)$$
$$;x \oplus x^{\neg} = 1,\ x^{-} \oplus x = 1(13)$$
$$;x.x^{-} = 0,\ x^{\neg}.x = 0(14)$$
$$;(x \oplus y)^{-} = y^{-}.x^{-},(x \oplus y)^{\neg} = y^{\neg}.x^{\neg}(15)$$
$$;(x.y)^{-} = y^{-} \oplus x^{-},(x.y)^{\neg} = y^{\neg} \oplus x^{\neg}(16)$$
$$;x \oplus y = \ (y^{-}.x^{-})^{\neg} = \ (y^{\neg}.x^{\neg})^{-}(17)$$
$$;(x^{\neg}.y) \oplus y^{\neg} = \ (y^{\neg}.x) \oplus x^{\neg}(18)$$
$$;x.(x^{-} \oplus y) \ = y.(y^{-} \oplus x) \ (19)$$
$$;x \le y \Leftrightarrow y^{-} \le x^{-} \Leftrightarrow y^{\neg} \le x^{\neg}(20)$$
$$;x \le y \Rightarrow a \oplus x \le a \oplus y,\ x \oplus a \le y \oplus a(21)$$
$$;x \le y \Rightarrow a.x \le a.y,\ x.a \le y.a(22)$$
$$;x.y \le x,\ y \le x \oplus y(23)$$
$$;x.y \le x \wedge y \le x \vee y \le x \oplus y(24)$$
$$.x.y \le z \Leftrightarrow y \le x^{-} \oplus z \Leftrightarrow x \le z \oplus y^{\neg}(25)$$

در شبه MV- جبر A تعریف می‌کنیم،

$$x \,!\ \ y = x.y^{-}, x \% y = x^{\neg} y$$
$$x \to y = x^{-} \oplus y, x \text{ خ } \ y = y \oplus x^{\neg}$$

گزاره زیر برخی از خواص جبری عمل‌های فوق را نشان می‌دهد.

گزاره ۲-۳. [5] شرایط زیر در شبه MV-جبر A برقرار است.

$$;x \,!\ \ z \le (x \,!\ \ y) \oplus (y \,!\ \ z) \ (26)$$
$$;x \% z \le (x \% y) \oplus (y \% z) \ (27)$$
$$;(x \oplus y) \,!\ \ (a \oplus b) \le (x \,!\ \ a) \oplus (y \,!\ \ b) \ (28)$$
$$;(x \oplus y) \% (a \oplus b) \le (x \% a) \oplus (y \% b) \ (29)$$
$$;y \le (y \,!\ \ x) \oplus x(30)$$
$$;x^{-} \,!\ \ y^{-} \le y(31)$$
$$;x \,!\ \ y \le x \le x \oplus y,\ x \,!\ \ y \le y^{-}(32)$$
$$;x \% y \le x^{\neg},\ x \% y \le y(33)$$
$$;x \to x^{-} = 1,\ x^{\neg} \to x = 1(34)$$
$$;x \to x = x \to 1 = 1(35)$$
$$;1 \to x = x(36)$$
$$;x \oplus y \to z = x \to (y \to z) \ (37)$$
$$;(x \to y) \oplus (y \to z) \le x \to z(38)$$
$$;x^{\neg} \,!\ \ y^{\neg} = x \% y,\ x^{-} \% y^{-} = x \,!\ \ y(39)$$
$$;x \,!\ \ (y \oplus z) \ = \ (x \,!\ \ z) \,!\ \ y(40)$$
$$;x \% (y \oplus z) \ = \ (x \% y) \% z(41)$$
$$;a \le b \Rightarrow b \% c \le a \% c,\ a \,!\ \ c \le b \,!\ \ c(42)$$

تعریف ۲-۴. [5] فرض کنید A یک شبه MV-جبر و $\phi \ne I \subseteq A$ باشد. در این صورت

(i) مجموعه I را ایدال در A گوییم هرگاه نسبت به عمل $\oplus$ بسته باشد و برای هر $x,\ y \in A$

$$(x \in I,\ y \le x) \ \Rightarrow y \in I.$$

(ii) مجموعه I را ایدال نرمال در A گوییم هرگاه I یک ایدال باشد و برای هر $x,\ y \in A$

$$y.x^{-} \in I \Leftrightarrow x^{\neg}.y \in I.$$

گزاره ۲-۵. [5] فرض کنید I یک ایدال نرمال در شبه MV- جبر A باشد. در این صورت رابطه زیر یک همنهشتی در A است.

$$x \equiv^{I} y \Leftrightarrow x\,!\ \ y,\ y\,!\ \ x \in I \Leftrightarrow x\,\%\,y,\ y\,\%\,x \in I.$$

بعلاوه اگر $x/I = \{y \in A : x \equiv^{I} y\}$ و

$$A/I = \{x/I : x \in A\}$$

آنگاه A/I به همراه عمل های زیر شبه MV - است.

$$\frac{x}{I} \oplus \frac{y}{I} = \frac{(x \oplus y)}{I},$$
$$(x/I)^{-} = x^{-}/I, (x/I)^{\neg} = x^{\neg}/I.$$

شبه MV - جبر A/I را شبه MV -جبر خارج قسمتی می‌نامند.

۳- PMV - شبه نرم‌ها روی شبه MV -جبرها

این بخش را به معرفی و مطالعه تابع PMV-شبه نرم روی شبه MV- جبرها اختصاص می‌دهیم. پس از معرفی تابع، ابتدا برخی از خواص آن بررسی و سپس یک مثال برای آن ارایه می‌شود. ارتباط آن با ایدال‌ها و هم ریختی‌ها از دیگر مسایل مطرح در این بخش خواهد بود. سرانجام نشان می‌دهیم که یک تابعگون پادورد از رسته شبه MV- جبرها به رسته تکواره‌ها موجود است

تعریف ۳-۱. فرض کنید A یک شبه MV - جبر باشد. تابع حقیقی مقدار N روی A را یک PMV- نرم روی A می‌نامیم هرگاه برای هر $x, y \in A$ شرایط زیر برقرار باشند.

$$;N(x \oplus y) \le N(x) + N(y)\ (N1)$$
$$;N(x^{\neg}) \le N(1) - N(x)\ (N2)$$

PMV - شبه نرم N را PMV - نرم گوییم هرگاه در شرط زیر صدق کند.

$$.N(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 (N3)$$

گزاره ۳-۲. فرض کنید N یک PMV- شبه نرم روی شبه MV - جبر A باشد. در این صورت برای هر $x, y \in A$ روابط زیر برقرارند.

$$;N(x^{\neg}) = N(x^{-}) = N(1) - N(x)\ (i)$$
$$;N(0) = 0 (ii)$$

(iii) اگر $x \le y$، آنگاه $N(x) \le N(y)$. به ویژه $.N(x) \ge 0$

$$.|N(x) - N(y)| \le N(1)\ (iv)$$

اثبات. (i) بنا به قسمت (13) از گزاره (۲-۲) و (N1) نامساوی $N(1) \le N(x) + N(x^{\neg})$ نتیجه می‌شود. اکنون شرط (N2) تساوی $N(x^{\neg}) = N(1) - N(x)$ را به دست می‌دهد. از طرفی می‌دانیم که $(x^{-})^{\neg} = x$. پس

$$N(x) = N((x^{-})^{\neg}) = N(1) - N(x^{-}).$$

(ii) با توجه به (i)،

$$N(1) = N(0^{\neg}) = N(1) - N(0).$$

بنابراین $.N(0) = 0$

(iii) فرض کنید $x \le y$ باشد. در این صورت $.x^{-} \oplus y = 1$ بنابراین

$$N(1) = N(x^{-} \oplus y) \le N(1) - N(x) + N(y).$$

نامساوی فوق نتیجه می‌دهد که $N(x) \le N(y)$. با توجه به نتیجه به دست آمده شرط $N(x) \ge 0$ واضح است.

(iv) از $x \le 1 = 1 \oplus y$ می‌توان نتیجه گرفت که $N(x) \le N(1) + N(y)$. اکنون با تعویض x و y با یکدیگر می‌توان نشان داد که

$$|N(x) - N(y)| \le N(1).$$

مثال ۳-۳. فرض کنید F حاصل ضرب دکارتی اعداد حقیقی و A اجتماع دو مجموعه

$$\{(1,\ y)\in \mathrm{F} : y\geq 0\}$$

و

$$\{(2,\ y)\in \mathrm{F} : y\leq 0\}$$

باشد. تعریف کنید $0=(1,0)$ و $1=(2,0)$. برای هر $(a,\ b),(c,\ d)\in A$ حاصل عبارت $(a,\ b)\oplus(c,\ d)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{cases}(1,\ b+d) & a=c=1\\ (2,\ ad+b) & ad+b\leq 0,\ ac=2\\ (2,0) & otherwise\end{cases}$$

اگر نگاشت‌های $^{-}$ و $^{\neg}$ به صورت

$$(a,\ b)^{-}=(2/a,-2b/a),(a,\ b)^{\neg}=(2/a,-b/a)$$

تعریف شوند، آنگاه شش تایی $(A,\oplus,^{-},^{\neg},0,1)$ یک شبه MV - جبر است.[10]

فرض کنید N یک تابع حقیقی مقدار روی A با ضابطه زیر باشد.

$$N(a,b)=\begin{cases}0 & a=1,b=0\\ 1/2 & a\in\{1,2\},b\neq 0\\ 1 & a=2,b=0\end{cases}$$

در این صورت $N((a,\ b)\oplus(c,\ d))$ مساوی است با

$$\begin{cases}0 & a=c=1\\ 1/2 & ad+b\leq 0,ac=2\\ 1 & otherwise\end{cases}$$

در گام‌های زیر نشان می‌دهیم شرط (N1) یعنی

$$N((a,\ b)\oplus(c,\ d))\leq N(a,\ b)\ +N(c,d)$$

برقرار است.

گام ۱. اگر $a=c=1$، آنگاه

$.N((1,\ b)\oplus(1,\ d))=N(1,\ b+d)$

در این صورت اگر $b+d=0$، حاصل 0 خواهد بود و اگر $b+d\neq 0$، آنگاه حاصل عبارت فوق $\frac{1}{2}$ می‌باشد. بنا به انتخاب a و c عبارت $b+d$ تنها زمانی 0 است که $b=d=0$ بنابراین

$$N(1,b)+N(1,d)=\begin{cases}0 & b=d=0\\ 1/2 & b=0,d\neq 0\\ 1/2 & b\neq 0,d=0\\ 1 & b,d\neq 0\end{cases}$$

بدین ترتیب واضح است که در این حالت شرط (N1) برقرار است.

گام ۲. فرض کنید $ad+b\leq 0$ و $ac=2$. اگر $a=1$ و $c=2$، آنگاه

$$N((1,\ b)\oplus(2,\ d))=\begin{cases}1 & b+d=0\\ 1/2 & b+d\neq 0\end{cases}$$

$$N(1,b)+N(2,d)=\begin{cases}0 & b=d=0\\ 1/2 & b=0,d\neq 0\\ 1/2 & b\neq 0,d=0\\ 1 & b,d\neq 0\end{cases}$$

حال واضح است که

$$N((1,\ b)\oplus(2,\ d))\leq N(1,\ b)\ +N(2,\ d).$$

اگر $a=2$ و $c=1$ اثبات مشابه می باشد. بدین ترتیب شرط N(1) درست است.

گام ۳. فرض می کنیم $ad+b\ >0$ و $ac=2$. در این صورت

$$N((a,\ b)\oplus(c,\ d))\ =N(2,0)\ =1$$

اگر $a=1$، آنگاه $c=2$، $b>0$ و $b\geq |d|$ بنابراین $N(a,b)=N(1,b)=1/2$. از طرف دیگر

$$N(c,\ d)=N(2,\ d))=\begin{cases}1 & d=0\\ 1/2 & d\neq 0\end{cases}$$

بدین ترتیب

$$N(1,\ b)+N(2,\ d))=\begin{cases}3/2 & d=0\\ 1 & d\neq 0\end{cases}$$

که نتیجه می‌دهد که

$$N((1,\ b)\oplus(2,\ d))\leq N(1,\ b)+N(2,\ d).$$

اگر $a=2$ و $c=1$، آنگاه $b\leq 0$ و $d>0$.بنابراین

$$N(a,\ b)=N(2,\ b))=\begin{cases}1 & b=0\\ 1/2 & b<0\end{cases}$$

از طرفی دیگر $ad+b=2d+b>0$. لذا $N(c,d)=N(1,d)=1/2$. بنابراین

$$N(2,\ b)+N(1,\ d))=\begin{cases}3/2 & b=0\\ 1 & b<0\end{cases}$$

پس

$$N((2,\ b)\oplus(1,\ d))\leq N(2,\ b)+N(1,\ d).$$

بدین ترتیب در این گام نیز شرط (N1) برقرار است.

گام ۴. اگر $a=c=2$، آنگاه

$$N((a,\ b)\oplus(c,\ d))=N(2,0)=1.$$

و

$$N(2,\ b)+N(2,\ d))=\begin{cases}2 & b=d=0\\ 3/2 & b\ \ or\ \ d\neq 0\\ 1 & b,d\neq 0\end{cases}$$

پس

$$N((2,\ b)\oplus(2,\ d))\leq N(2,\ b)+N(2,\ d).$$

بدین ترتیب چهار گام فوق نشان می‌دهند که تابع N در شرط (N1) صدق می‌کند. اما برقراری شرط N(2) یعنی $N(a,\ b)^{\neg}\leq N(1)-N(a,\ b)$ واضح است.

گزاره ۳-۴. فرض کنید N یک PMV-شبه نرم روی شبه MV- جبر A باشد. در این صورت برای هر $x,\ y,z\in A$ شرایط زیر برقرار است.

(i) اگر $*\in\{.,\ !,\ \wedge\}$، آنگاه

$$N(x*y)\leq N(x)+N(y),$$

(ii) اگر $*\in\{!,\ \%\}$، آنگاه

$$N(x*z)\leq N(x*y)+N(y*z),$$

$$N(x^{\neg}!\ \ y^{\neg})\leq N(y),\ N(x^{-}\%y^{-})\leq N(x).\ \ (iii)$$

اثبات. (i) با توجه به (23) و (32)، اثبات واضح است.

(ii) از صعودی بودن تابع N و خاصیت‌های (26)و (27)، نامساوی به راحتی اثبات می‌شود.

(iii) از اینکه $x^{\neg}!\ \ y^{\neg}\leq y$ و $x^{-}\%y^{-}\leq x$، اثبات نامساوی ذکر شده ساده است.

گزاره ۳-۵. فرض کنید A یک شبه MV - جبر باشد.

(۱) اگر N_1 و N_2 دو PMV- شبه نرم روی A باشند، آنگاه برای هر عدد حقیقی مثبت r توابع

$$N(x)=rN_1(x)+N_2(x)$$

و $rN_1(x)$, PMV- شبه نرم روی A هستند.

(۲) اگر $\{N_n\}_{n\geq 1}$ یک دنباله از PMV- شبه نرم ها روی A باشد بطوریکه دنباله $\{N_n(1)\}_{n\geq 1}$کراندار باشد، آنگاه تابع $N(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{N_n(x)}{2^n}$ یک PMV-شبه نرم روی A است.

اثبات. ما تنها شرط (۲) را ثابت می‌کنیم. با توجه به اینکه هر PMV - شبه نرم صعودی است، به راحتی نتیجه می‌شود که برای هر $x \in A$، $\frac{N_n(x)}{2^n} \le \frac{N_n(1)}{2^n} \le \frac{M}{2^n}$، جاییکه M کران بالا دنباله $\{N_n(1)\}_{n\ge 1}$ است. نا مساوی فوق خوش تعریفی تابع $N(x)$ را تضمین می‌کند. حال فرض کنید $x, y \in A$، در این صورت

$$N(x\oplus y) \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{N_n(x) + N_n(y)}{2^n}$$
$$= N(x) + N(y)$$

و هم چنین

$$N(x^-) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{N_n(x^-)}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{N_n(1)-N_n(x)}{2^n}$$
$$= N(1)-N(x)$$

بدین ترتیب N یک PMV - شبه نرم روی A است.

گزار ۳-۶. فرض کنید N یک PMV- شبه نرم روی MV - جبر A باشد. در این صورت:

(i) مجموعه $I_N = \{x \in A : N(x) = 0\}$ یک ایدال در A است.

(ii) تابع N یک PMV- نرم است اگر و تنها اگر $I_N = \{0\}$.

(iii) اگر تابع N در شرط

$$N(x) \le N(y) \Rightarrow x \le y$$

صدق کند، آنگاه I_N ایدال نرمال است یعنی برای برای هر $x, y \in A$،

$$y.x^- \in I_N \Leftrightarrow x^-.y \in I_N.$$

اثبات. (i) چون $N(0) = 0$، $0 \in I$. اگر $x, y \in I_N$، آنگاه $N(x) = N(y) = 0$. این نتیجه می‌دهد که $N(x\oplus y) = 0$ است. بنابراین $x\oplus y \in I_N$. فرض کنید $y \in I_N$ و $x \le y$، لذا $N(x) \le N(y) = 0$. این نتیجه می‌دهد که $x \in I_N$.

(ii) اثبات واضح است.

(iii) فرض کنید $y.x^- \in I_N$. در این صورت $N(y.x^-) = 0$. از $y.x^- = (x\oplus y^-)^-$، می‌توان نتیجه گرفت که $N(1) \le N(x) + N(1) - N(y)$ و لذا $N(y) \le N(x)$. با توجه به فرض $y \le x$. بنا به (9)، $x^-.y = 0 \in I_N$.

به عکس فرض کنید $x^-.y \in I_N$. در این صورت $N(x^-.y) = 0$. از $x^-.y = (y^- \oplus x)^-$ و مشابه قسمت قبل $x \le y$. بنا به (9)، $y.x^- = 0 \in I_N$.

گزاره زیر ارتباط بین PMV -شبه نرم‌ها روی شبه MV- جبرهای خارج قسمتی را نشان می‌دهد.

قضیه ۳-۷. فرض کنید I یک ایدال نرمال در شبه MV-جبر A باشد. دراین صورت:

(i) اگر N یک PMV- شبه نرم روی A باشد و $\frac{1}{I} = 1$، آنگاه تابع $n(\frac{x}{I}) = inf\{N(z) : z \in \frac{x}{I}\}$ یک PMV - شبه نرم روی $\frac{A}{I}$ است.

(ii) اگر n یک PMV-شبه نرم روی $\frac{A}{I}$باشد، آنگاه $N(x) = n(\frac{x}{I})$ یک PMV -شبه نرم روی A است.

اثبات. (i) از اینکه N یک تابع حقیقی مقدار مثبت است، به راحتی خوش تعریفی تابع n حاصل می‌شود. حال به اثبات شرط (N1)، برای تابع n می‌پردازیم.

فرض کنید x, y متعلق به A باشند، اگر $z_1 \in \frac{x}{I}$ و $z_2 \in \frac{x}{I}$ باشند، آنگاه

$$z_1 \oplus z_2 \in \frac{x \oplus y}{I}$$

بنابراین

$$n(\frac{x \oplus y}{I}) \leq N(z_1 \oplus z_2) \leq N(z_1) + N(z_2)$$

از نامساوی $n(\frac{x \oplus y}{I}) - N(z_2) \leq N(z_1)$، نامساوی $n(\frac{x \oplus y}{I}) - N(z_2) \leq n(\frac{x}{I})$ نتیجه می‌شود. نامساوی اخیر، درستی نامساوی $n(\frac{x \oplus y}{I}) \leq n(\frac{x}{I}) + n(\frac{y}{I})$ را تضمین می‌کند. برای اثبات شرط (N2)، فرض کنید $z \in (\frac{x}{I})^{-}$. در این صورت $z^{-} \in \frac{x}{I}$. در نتیجه

$$n(\frac{x}{I}) \leq N(z^{-}) = N(1) - N(z).$$

از نامساوی اخیر نتیجه می‌شود که

$$N(z) \leq N(1) - n(\frac{x}{I})$$

چون $\frac{1}{I} = 1$، به آسانی دیده می‌شود که $N(1) = n(\frac{1}{I})$. بنابراین

$$n(\frac{x}{I})^{-} \leq n(\frac{1}{I}) - n(\frac{x}{I}).$$

$$N(x \oplus y) \leq n(\frac{x}{I}) + n(\frac{y}{I}) = N(x) + N(y)$$

و

$$N(x^{-}) = n(\frac{1}{I}) - n(\frac{x}{I}) = N(1) - N(x).$$

بنابراین N یک PMV -شبه نرم روی A است.

گزاره ۳-۸. فرض کنید $f : A_1 \to A_2$ یک بروریختی بین شبه MV - جبرها باشد بطوریکه معادله $f(x) = 1$ دارای تنها جواب 1 است. اگر N_1 یک PMV- شبه نرم روی A_1 باشد، آنگاه نگاشت حقیقی مقدار N_2 تعریف شده با ضابطه

$$N_2(y) = inf\{N_1(z) : f(z) = y\}$$

یک PMV - شبه نرم روی A_2 است.

اثبات. فرض می کنیم y_1 و y_2 دو عضو دلخواه از A_2 باشند. می توانیم عناصر x_1 و x_2 را به گونه انتخاب کنیم که $f(x_1) = y_1$ و $f(x_2) = y_2$. از همریختی f تساوی $f(x_1 \oplus x_2) = y_1 \oplus y_2$ حاصل می‌شود. بنابراین

$$N_2(y_1 \oplus y_2) \leq N_1(x_1 \oplus x_1) \leq N_1(x_1) + N_1(x_2)$$

و لذا $N_2(y_1 \oplus y_2) - N_1(x_2) \leq N_1(x_1)$. بنابراین

$$N_2(y_1 \oplus y_2) - N_1(x_2) \leq N_2(y_1).$$

بنا به نامساوی فوق

$$N_2(y_1 \oplus y_2) - N_2(y_1) \leq N_1(x_2).$$

بنابراین

$$N_2(y_1 \oplus y_2) - N_2(y_1) \leq N_2(y_2).$$

فرض کنید n یک PMV- شبه نرم روی $\frac{A}{I}$ و $N(x) = n(\frac{x}{I})$ یک تابع حقیقی مقدار روی A باشد. برای هر $x, y \in A$،

بدین ترتیب شرط (N1) برای تابع N_2 برقرار است. برای اثبات شرط (N2) فرض کنید $y \in A$ باشد. فرض کنید $S = \{N_1(z) \ : f(z) \ = y^{\neg}\}$ و $N_1(z) \in S$. در این صورت $f(z) = y^{\neg}$ و لذا $f(z^{-}) = y$. این نتیجه می‌دهد

$$N_2(y) \le N_1(z^{-}) \ = N_1(1) - N_1(z).$$

از آنجایی که $N_1(z) \ge infS = N_2(y^{\neg})$،

$$N_1(1) - N_1(z) \le N_1(1) - N_2(y^{\neg})$$

با توجه به اینکه $N_2(1) = N_1(1)$ نامساوی زیر نتیجه می‌شود.

$$N_2(y) \le N_1(z^{-}) \le N_1(1) - N_1(z)$$
$$\le N_2(1) - N_2(y^{\neg}).$$

لذا N_2 یک PMV-شبه نرم روی A_2 است. به راحتی می‌توان ثابت کرد که نامساوی $N_2(f(x)) \le N_1(x)$ برقرار است.

گزاره ۳-۹. فرض کنید A_1 و A_2 دو شبه MV - جبر باشند.

(۱) اگر N_1 و N_2 به ترتیب دو PMV - شبه نرم روی A_1 و A_2 باشند، آنگاه

$$N(x, \ y) \ = N_1(x) \ + N_2(y)$$

یک PMV - شبه نرم روی $A_1 \times A_2$ است.

(۲) اگر N یک PMV - شبه نرم روی شبه MV - جبر $A_1 \times A_2$ باشد بطوریکه برای $a_1 \in A_1$ و $a_2 \in A_2$،

$$N(a_1, 1) = N(1, a_2) = N(1,1)$$

آنگاه تابع‌های

$$N_1(x) \ = inf\{N(x, \ z) \ : z \in A_2\},$$

و

$$N_2(x) \ = inf\{N(x, \ z) \ : z \in A_1\}$$

به ترتیب PMV-شبه نرم روی A_1 و A_2 هستند.

اثبات. (۱) فرض کنید (a,b) و (x,y) دو عضو دلخواه $A_1 \times A_2$ باشند، آنگاه

$$N((x, \ y) \oplus (a, \ b)) \ = N(x \oplus a, \ y \oplus b)$$
$$\le N_1(x) \ + N_1(a) + N_2(y) \ + N_2(b)$$
$$= N(x, \ y) \ + N(a, \ b)$$

و

$$N((x, \ y)^{\neg}) \ = N(x^{\neg}, \ y^{\neg}) = N_1(x^{\neg}) +$$
$$N_2(y^{\neg}) = N_1(1) - N_1(x) + N_2(1) - N_2(y)$$
$$= N(1,1) - N(x, y).$$

بنابراین N یک PMV- شبه نرم روی $A_1 \times A_2$ است.

(۲) برای $i = 1, 2$، تابع $P_i : A_1 \times A_2 \to A_i$ تعریف شده با ضابطه $P_i(a_1, \ a_2) \ = a_i$ یک بروریختی است. چون برای هر $x \in A_i$،

$$N_i(x) \ = inf\{N \circ P_i(a_1, \ a_2) : P_i(a_1, \ a_2) = x\}$$

مشابه گزاره (۳-۸)، می‌توان ثابت کرد که تابع N_i در شرط (N1) صدق می‌کند. برای اثبات شرط (N2)، ابتدا دقت کنید که بنا به فرض

$$N_1(1) = N_2(1) = N(1,1).$$

حال فرض کنید $x \in A_1$ و $z \in A_2$، آنگاه

$$N_1(x) \le N(x, \ z) \ = N(x^{\neg\neg}, \ z^{\neg\neg})$$
$$\le N(1,1) - N(x^{\neg}, z^{\neg}) \le N_1(1) - N(x^{\neg}).$$

رابطه اخیر نشان می‌دهد که تابع N_1 در شرط (N2) صدق می‌کند. اثبات برای N_2 مشابه است.

قضیه ۳-۱۰. فرض کنید تابع $f : A_1 \to A_2$ یک یکریختی بین شبه MV -جبرها باشد. اگر N_1 یک PMV-شبه نرم روی A_1 باشد، آنگاه تابع

$$N_2(y) = N_1 \circ f^{-1}(y)$$

یک PMV - شبه نرم روی A_2 است و هم چنین

$$N_2(f(x)) = N_1(x).$$

اثبات. فرض کنید $y,\ y' \in A_2$. در این صورت

$$N_2(y \oplus y') = N_1(f^{-1}(y \oplus y')) \le N_1(f^{-1}(y) + N_1(f^{-1}(y')) = N_2(y) + N_2(y').$$

این بدین معنی است که تابع N_2 در شرط (N1) صدق می‌کند. اکنون برای هر $y \in A_2$،

$$N_2(y^-) \le 1 - N_2(y).$$

زیرا اگر $y = f(x) \in A_2$، آنگاه

$$N_2(y^-) = N_1(x^-) \le 1 - N_1(x) = 1 - N_1 \circ f^{-1}(y) = 1 - N_2(y).$$

لذا N_2 یک PMV- شبه نرم روی A_2 است. همچنین واضح است که برای هر $x \in A$،

$$N_2(f(x)) = N_1(x).$$

قضیه ۳-۱۱. یک تابعگون پادورد از رسته شبه MV-جبرها به رسته تکواره‌ها وجود دارد.

اثبات. فرض کنید A یک شبه MV-جبر باشد و N(A) گردایه همه PMV -شبه نرم‌ها روی A باشد. به وضوح تابع حقیقی $0(x) = 0$ عضوی از مجموعه N(A) است. گزاره (۳-۵)، نشان می‌دهد که N(A) به همراه عمل زیر یک تکواره با عضو خنثی $0(x) = 0$ است.

$$(N_1 + N_2)(x) = N_1(x) + N_2(x).$$

فرض کنید M رسته تکواره‌ها و PMV رسته شبه MV- جبرها باشد. در این صورت تابع $\aleph : \mathrm{PMV} \to \mathrm{M}$ که به هر شبه MV -جبر A، تکواره $(N(A),+,0)$ را نسبت می‌دهد یک تابعگون پادورد است. زیرا اگر $f : A_1 \to A_2$ یک هم ریختی بین شبه MV- جبرها باشد، آنگاه تابع $\aleph(f) : N(A_2) \to N(A_1)$ با ضابطه

$$\aleph(f)(N_2) = N_2 \circ f$$

خوش تعریف است. برای اثبات خوش تعریفی این تابع کافی است نشان دهیم $N_2 \circ f \in N(A_1)$. فرض کنید x و y دو عضو دلخواه A_1 باشند. در این صورت

$$N_2 \circ f(x \oplus y) = N_2(f(x) \oplus f(y)) \le N_2(f(x)) + N_2(f(y))$$

و

$$N_2 \circ f(x^-) = N_2(1) - N_2(f(x)) = N_2(f(1)) - N_2(f(x)).$$

روابط فوق نشان می‌دهند که نگاشت $N_2 \circ f$ یک PMV- شبه نرم روی A_1 است. اثبات اینکه تابع $\aleph(f)$ یک هم ریختی بین تکواره‌ها است ساده است. حال فرض کنید تابع $f : A_1 \to A_2$ و تابع $g : A_2 \to A_3$ دو هم ریختی بین شبه MV-جبرها باشند. برای هر $N_3 \in N(A_3)$،

$$\aleph(g \circ f)(N_3) = N_3 \circ g \circ f = \aleph(f)(N_3 \circ g) = \aleph(f) \circ \aleph(g)(N_3).$$

بنابراین $\aleph(g \circ f) = \aleph(f) \circ \aleph(g)$. از طرفی اگر $I : A_1 \to A_1$ مورفیسم همانی در PMV باشد، آنگاه برای هر $N_1 \in N(A_1)$،

$$\aleph(I)(N_1) = N_1 \circ I = N_1.$$

این نتیجه می‌دهد که $\aleph(I)$ یک مورفیسم همانی در M است.

۴- شبه MV -جبرهای پاراتوپولوژیکی

در این بخش شبه MV - جبرهای (پارا) توپولوژیکی را تعریف کرده و ارتباط پیوستگی عمل‌های موجود در این فضا را بیان می‌نماییم. با کمک ایدال‌ها و PMV-شبه نرم‌ها توپولوژی‌هایی روی شبه MV - جبرها تعریف می کنیم که آن راتبدیل به یک شبه MV-جبر توپولوژیکی نماید.

فرض کنید τ یک توپولوژی روی شبه MV - جبر $(A,\oplus,{}^-,{}^\neg)$ باشد. در این صورت

(i) (A,τ) را شبه MV -جبر پاراتوپولوژیکی نامیم هرگاه عمل $\oplus$ پیوسته باشد.

(ii) (A,τ) را شبه MV - جبر توپولوژیکی گوییم هرگاه عمل‌های $\oplus$، ${}^-$ و ${}^\neg$ پیوسته باشند.

قضیه ۴-۱. فرض کنید I یک خانواده از ایدال‌های نرمال در شبه MV - جبر A باشد که نسبت به عمل اشتراک بسته است. در این صورت توپولوژی τ روی A وجود دارد بطوریکه (A,τ) یک شبه MV -جبر توپولوژیکی است.

اثبات. مجموعه τ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$\tau=\{U\subseteq A:\forall x\in U\exists I\in \mathrm{I},\ \frac{x}{I}\subseteq U\}.$$

از آنجایی که برای هر ایدال I رابطه $\equiv^I$ یک رابطه هم نهشتی روی A است، به سادگی دیده می‌شود که برای هر $x\in A$ و $I\in \mathrm{I}$ مجموعه $\frac{x}{I}$ متعلق به τ است. از آنجایی که I نسبت به اشتراک بسته است، می‌توان به راحتی ثابت کرد که τ نسبت به اجتماع دلخواه و اشتراک متناهی بسته است و در نتیجه τ یک توپولوژی روی A است. نشان می‌دهیم عمل‌های $\oplus$، ${}^-$ و ${}^\neg$ در (A,τ) پیوسته هستند. فرض کنید $x\oplus y\in U\in\tau$. در این صورت یک $I\in \mathrm{I}$ وجود دارد بطوریکه $\frac{x\oplus y}{I}\subseteq U$. اکنون $\frac{x}{I}$ و $\frac{y}{I}$، به ترتیب دو مجموعه باز شامل x و y هستند بطوریکه

$$\frac{x}{I}\oplus\frac{y}{I}=\frac{x\oplus y}{I}\subseteq U.$$

این پیوستگی عمل $\oplus$ را نشان می‌دهد. از تساوی‌های $(\frac{x}{I})^-=\frac{x^-}{I}$ و $(\frac{x}{I})^\neg=\frac{x^\neg}{I}$ به راحتی پیوستگی عمل های ${}^-$ و ${}^\neg$ به دست می آیند. بنابراین (A,τ) یک شبه MV - جبر توپولوژیکی است.

گزاره ۴-۲. فرض کنید τ یک توپولوژی روی شبه MV-جبر A باشد بطوریکه عمل‌های ${}^-$ و ${}^\neg$ پیوسته هستند. آنگاه (A,τ) یک شبه MV - جبر است اگر و تنها اگر حداقل یکی از عمل‌های $\oplus, ., !, \%, \rightarrow$ و خ پیوسته باشند.

اثبات. برای هر $x, y\in A$،

$$x.y=(y^-\oplus x^-)^\neg, x!\ y=x.y^-$$
$$x\% y=x^\neg.y, x\rightarrow y=x^-\oplus y$$

و x خ $y=y\oplus x^\neg$. از آنجایی که ترکیب توابع پیوسته، یک تابع پیوسته را نتیجه می‌دهد روابط فوق بیان می کند که پیوستگی عمل‌های ذکر شده معادل هستند. بدین ترتیب اثبات گزاره واضح است.

گزاره ۴-۳. فرض کنید τ یک توپولوژی روی شبه MV-جبر A باشد. در این صورت:

(۱) تابع ${}^-$ باز است اگر و فقط اگر نگاشت ${}^\neg$ پیوسته است.

(۲) تابع ${}^\neg$ باز است اگر و فقط اگر نگاشت ${}^-$ پیوسته است.

(۳) اگر A هاسدورف و فشرده باشد، آنگاه ${}^-$ پیوسته است اگر و فقط اگر ${}^\neg$ پیوسته است.

اثبات. (۱) فرض کنید تابع ${}^-$ باز باشد و $U\in\tau$. تساوی $U=(U^-)^\neg$ پیوستگی عمل ${}^\neg$ را نتیجه می‌دهد. به عکس فرض کنید تابع ${}^\neg$ پیوسته و U

یک مجموعه باز دلخواه باشد. نشان می‌دهیم $U^{-} \in \tau$. برای این منظور x را عضو دلخواهی از U^{-} در نظر می‌گیریم. چون $(U^{-})^{\neg} = U$ و تابع $^{\neg}$ پیوسته است، مجموعه باز V ای شامل x وجود دارد بطوریکه $V^{\neg} \subseteq U$. در نتیجه

$$x \in V = (V^{\neg})^{-} \subseteq U^{-}$$

که نتیجه می‌دهد U^{-} یک مجموعه باز است.

(۲) اثبات مشابه حالت (۱) صورت می‌پذیرد.

(۳) فرض کنید $f : A \to A$ و $g : A \to A$ دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = x^{-}$ و $g(x) = x^{\neg}$ باشند. از رابطه (PM8)، به سادگی دیده می‌شود که f و g معکوس پذیرند. حال فرض کنید A هاسدورف و فشرده و $^{-}$ پیوسته باشد. برای اثبات پیوستگی $^{\neg}$ کافی است نشان دهیم که برای هر مجموعه بسته K در A، مجموعه $g^{-1}(K)$ در A بسته است. فرض کنید K در A بسته باشد، چون A فشرده است، مجموعه K در A فشرده می‌باشد. از پیوستگی f نتیجه می‌گیریم که

$$f(K) = g^{-1}(K)$$

در A فشرده است. اکنون هاسدورف بودن فضای A، بسته بودن $g^{-1}(K)$ را نتیجه می‌دهد. بنابراین تابع g و در نتیجه تابع $^{\neg}$ پیوسته است. اثبات عکس به صورت مشابه صورت می‌گیرد.

گزاره ۴-۴. فرض کنید (A,τ) یک شبه MV-جبر توپولوژیکی باشد. در این صورت:

(۱) نگاشت‌های $^{-}$ و $^{\neg}$ همیومورفیسم هستند.

(۲) برای هر a و b متعلق به A یک تابع پیوسته $f : A \to A$ وجود دارد بطوریکه $f(a) = b$.

(۳) اگر 0 نقطه درونی ایدال I در A باشد، آنگاه I یک مجموعه باز است.

اثبات. چون نگاشت‌های $^{-}$ و $^{\neg}$ معکوس یکدیگرند به وضوح هر دو همیومورفیسم هستند.

(۲) فرض کنید a و b دو عضو دلخواه A باشند. تابع $r : A \to A$ با ضابطه $r(x) = a.x^{-}$ و تابع $t : A \to A$ با ضابطه $t(x) = x \oplus b$ هر دو پیوسته هستند. بنابراین تابع $f = t \circ r$ .... از A به A تابعی پیوسته است و

$$f(a) = t \circ r(a) = t(a.a^{-}) = t(0) = b.$$

(۳) فرض کنید 0 نقطه درونی ایدال I و x عضو دلخواهی از آن باشد. مجموعه باز Wای شامل 0 وجود دارد بطوریکه $0 \in W \subseteq I$. چون $x ! x = 0 \in W$ و $!$ پیوسته است، مجموعه باز Uای شامل x وجود دارد بطوریکه $U ! U \subseteq W \subseteq I$. حال اگر y را عضو دلخواهی از U در نظر بگیریم، از اینکه $U ! U \subseteq I$ نتیجه می‌شود که $y ! x \in U ! U \subseteq I$. بنا به (30)، $(y ! x) \oplus x \in I$، $y \le (y ! x) \oplus x$ و لذا $y \in I$. بدین ترتیب $x \in U \subseteq I$ و در نتیجه I یک مجموعه باز خواهد بود.

گزاره ۴-۵. فرض کنید (A,τ) یک شبه MV-جبر توپولوژیکی و N یک PMV - شبه نرم روی A باشد. در این صورت N پیوسته است اگر و فقط اگر N در 0 پیوسته است.

اثبات. قبل از اینکه به برهان گزاره بپردازیم ابتدا نشان می‌دهیم که نامساوی زیر که آن را نامساوی (٭) می‌نامیم برای هر $x, a \in A$، برقرار است.

$$| N(x) - N(a) | \le max\{N(x ! a), N(a ! x)\}$$

فرض کنید $x, a \in A$. از $x \le (x ! a) \oplus a$ نتیجه می‌گیریم که

$$N(x) - N(a) \le max\{N(x ! a), N(a ! x)\}$$

اکنون با تعویض x و a با یکدیگر در نامساوی بالا می‌توان نامساوی (*) را نتیجه گرفت. حال به اثبات گزاره می‌پردازیم. اگر N تابعی پیوسته باشد، به وضوح N در 0 پیوسته است. فرض کنید N در 0 پیوسته و a یک عضو دلخواهی از A باشد. فرض کنید $0 <$ ٍ دلخواه داده شده باشد. چون N در 0 پیوسته است، همسایگی باز U از 0 وجود دارد بطوریکه برای هر $x \in U$، ٍ $> N(x)$. چون عمل ! پیوسته است و $a\,!\,a = 0 \in U$، یک مجموعه باز مانند V شامل a وجود دارد که $a\,!\,V \subseteq U$ و $V\,!\,a \subseteq U$ اکنون برای هر $x \in V$، چون $x\,!\,a$ و $a\,!\,x$ متعلق به V هستند، بنا به نامساوی (*)، $|N(x)-N(a)| \le$ ٍ.

یاد آوری می کنیم که تابع حقیقی d روی $X \times X$ را یک شبه متریک روی X نامند هرگاه برای هر $x, y, z \in X$، شرایط زیر برقرار باشند:

$(D1)\ d(x, y) \ge 0,\ d(x, x) = 0$،

$(D2)\ d(x, y) = d(y, x)$،

$(D3)\ d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$.

قضیه ۴-۶. فرض کنید N یک PMV -شبه نرم روی شبه MV- جبر A باشد. در این صورت یک توپولوژی τ روی A هست بطوریکه (A,τ)، یک شبه MV - جبر توپولوژیکی است.

اثبات. تابع $d: X\times X \to \mathrm{R}$ با ضابطه زیر را در نظر بگیرید.

$$d(x, y) = N(x\,!\,y) + N(y\,!\,x).$$

از آنجایی که N یک تابع حقیقی مقدار مثبت است، به وضوح $d(x, y) \ge 0$. از اینکه $x\,!\,x = 0$، نتیجه می‌گیریم که $d(x, x) = 0$. پس تابع d در شرط (D1) صدق می‌کند. از تعریف d به سادگی ملاحظه می‌شود که شرط (D2) نیز برای d برقرار است. با توجه به شرط (26)، چون

$$x\,!\,z \le (x\,!\,y) \oplus (y\,!\,z)$$

پس $N(x\,!\,z) \le N(x\,!\,y) + N(y\,!\,z)$. با کمک نامساوی به دست آمده می‌توان نشان داد که تابع d در شرط (D3)، نیز صدق می کند. بنابراین d یک شبه متریک روی A است. فرض کنید τ_d توپولوژی تولید شده توسط d باشد. نشان می‌دهیم $\oplus$ روی (A,τ_d) پیوسته است.

فرض کنید $(a, b) \in A\times A$ باشد. برای هر زوج مرتب $(x, y) \in A\times A$، بنا به (28)، نامساوی

$$(x\oplus y)\,!\,(a\oplus b) \le (x\,!\,a) \oplus (y\,!\,b)$$

نتیجه می‌شود و لذا $N((x\oplus y)\,!\,(a\oplus b))$ کمتر یا مساوی $N(x\,!\,a) + N(y\,!\,b)$ است. با کمک این نامساوی می‌توان نشان داد که

$$d(x\oplus y,\ a\oplus b) \le d(x,\ a) + d(y,\ b).$$

نامساوی اخیر پیوستگی عمل $\oplus$ را ثابت می‌کند.

قضیه۴-۷. فرض کنید N یک PMV -شبه نرم روی شبه MV - جبر A باشد. فرض کنید برای هر x و y متعلق به A $N(x\,!\,y) = N(x \% y)$. در این صورت‌ی توپولوژی τ روی A وجود دارد بطوریکه (A,τ) یک شبه MV- جبر توپولوژیکی است.

اثبات. بنا به قضیه (۴-۶)، تابع

$$d(x, y) = N(x\,!\,y) + N(y\,!\,x)$$

یک شبه متریک روی A است. اگر τ_d توپولوژی تولید شده توسط d روی A باشد، همچنان که در قضیه قبل دیدیم، $\oplus$ در (A,τ_d) پیوسته است. فرض کنید x و y دو عضو A باشند، در این صورت

$$d(x^{-}, y^{-}) = N(x^{-}\,!\,y^{-}) + N(y^{-}\,!\,x^{-})$$
$$= N(x^{-}.y) + N(y^{-}.x) = N(x \% y)$$

$$+N(y\%x)=N(x!\ \ y)\ +N(y!\ \ x)=d(x,\ y).$$

تساوی اخیر پیوستگی عمل $^{\neg}$را نشان می دهد. از طرف دیگر

$$d(x^{-},\ y^{-})\ =N(x^{-}!\ \ y^{-})\ +N(y^{-}!\ \ x^{-})$$
$$=N(x^{-}\%y^{-})\ +N(y^{-}\%x^{-})=N(x.y^{-})$$
$$+N(y.x^{-})=N(x!\ \ y)\ +N(y!\ \ x)=d(x,\ y).$$

این تساوی نیز پیوستگی عمل $^{-}$را ثابت می‌کند. در قضیه زیر می‌پذیریم که

$$\xi=\{\frac{m}{2^{n}}:m=1,2,3,\ \dots,2^{n},\ n\geq 0\}.$$

قضیه ۴-۸. فرض کنید $\{U_n\}_{n=0}^{\infty}$ یک خانواده از زیر مجموعه‌ها از یک شبه MV - جبر A باشد بطوریکه برای هر $n\geq 0$، $0\in U_n$ و $U_{n+1}\oplus U_{n+1}\subseteq U_n$. در این صورت یک شبه متریک d روی A وجود دارد بطوریکه (A,τ_d) یک شبه MV- جبر پاراتوپولوژیکی است، جاییکه τ_d توپولوژی تولید شده توسط d است. به ویژه،

$$\{x:d(x,0)<\frac{1}{2^{n}}\}\ \subseteq\ \{x:d(x,0)\leq\frac{2}{2^{n}}\}.$$

اثبات. فرض کنید $V(1)=U_0$ و $n\geq 0$ و بپذیرید که برای $m=1,2,3,\ \dots,2^{n}$، مجموعه $V(\frac{m}{2^{n}})$ طوری تعریف شده است که $0\in V(\frac{m}{2^{n}})$. حال برای $m=1,2,3,\ \dots,2^{n}$، قرار دهید

$$V(\frac{1}{2^{n+1}})=U_{n+1},V(\frac{2m}{2^{n+1}})=V(\frac{m}{2^{n}}).$$

برای هر $m=1,2,3,\ \dots,2^{n}-1$، فرض کنید

$$(b)V(\frac{2m+1}{2^{n+1}})=V(\frac{m}{2^{n}})\oplus U_{n+1}$$
$$=V(\frac{m}{2^{n}})\oplus V(\frac{1}{2^{n+1}})$$

اگر $m>2^{n}$، آنگاه تعریف می کنیم $V(\frac{m}{2^{n}})=A$. با کمک استقرا روی n ثابت می‌کنیم که برای هر $n\geq 0$

$$(*)V(\frac{m}{2^{n}})\oplus V(\frac{1}{2^{n}})\subseteq V(\frac{m+1}{2^{n}}).$$

ابتدا توجه کنید که اگر $m+1>2^{n}$، آنگاه رابطه (*) به وضوح برقرار است زیرا $V(\frac{m+1}{2^{n}})=A$. حال فرض کنید $m<2^{n}$، اگر $n=1$، آنگاه $m=1$ و لذا

$$V(\frac{1}{2})\oplus V(\frac{1}{2})\subseteq U_1\oplus U_1\subseteq U_0=V(1).$$

فرضکنید رابطه (*) برای عدد طبیعی n درست باشد. اگر $m=2k$، آنگاه بنا به تعریف $V(\frac{2m+1}{2^{n+1}})$ تساوی زیر برقرار است.

$$V(\frac{m}{2^{n+1}})\oplus V(\frac{1}{2^{n+1}})\ =V(\frac{k}{2^{n}})\oplus V(\frac{1}{2^{n+1}})$$
$$=V(\frac{2k+1}{2^{n}}).$$

فرض کنید $m=2k+1<2^{n+1}$، برای یک $k\geq 0$، آنگاه با استفاده از رابطه (b)،

$$V(\frac{m}{2^{n+1}})\oplus V(\frac{1}{2^{n+1}})=V(\frac{2k+1}{2^{n+1}})$$
$$\oplus U_{n+1}=V(\frac{k}{2^{n}})\oplus U_{n+1}\oplus U_{n+1}$$
$$\subseteq V(\frac{k}{2^{n}})\oplus U_{n}=V(\frac{k}{2^{n}})\oplus V(\frac{1}{2^{n}}).$$

بنا به فرض استقرا

$$V(\frac{k}{2^{n}})\oplus V(\frac{1}{2^{n}})\subseteq V(\frac{2k+2}{2^{n+1}})=V(\frac{m+1}{2^{n+1}}).$$

بدین ترتیب اثبات رابطه (*)، کامل می‌شود. حال فرض کنید برای $r\in\xi$،

$$V'(r) = \{x \in A : \exists y \in V(r) s.t\ x \le y\}.$$

به آسانی ثابت می‌شود که $0 \in V'(r)$ و اگر $x \le y$ و $y \in V'(r)$، آنگاه x نیز متعلق به $V'(r)$ است. با توجه به نتایج به دست آمده تابع $f : A \to \mathrm{R}$ تعریف شده با ضابطه

$$f(x) = inf\{r \in \xi : x \in V'(r)\}$$

کراندار و صعودی است. اثبات صعودی بودن تابع f، از این نکته نتیجه می‌شود که اگر $r, s \in \xi$ و $r \le s$، آنگاه $V'(r) \subseteq V'(s)$. حال تابع $N_f : A \to \mathrm{R}$ را با ضابطه زیر در نظر بگیرید.

$$N_f(x) = sup\{f(x \oplus z) - f(z)\ : z \in A\}.$$

از اینکه $z \le x \oplus z$ و نگاشت f صعودی و کراندار است می‌توان خوش تعریفی تابع N_f را نتیجه گرفت. اما اگر $x \le y$، بنا به (21)، $N_f(x) \le N_f(y)$ بدین ترتیب N_f یک تابع صعودی است. مشابه قضیه قبل، می‌توان نشان داد که تابع

$$d(x, y) = N_f(x!\ y) + N_f(y!\ x)$$

یک شبه متریک روی A است که در شرط زیر صدق می‌کند.

$$d(x \oplus y,\ a \oplus b) \le d(x,\ a) + d(y,\ b)$$

اکنون اگر τ_d توپولوژی تولید شده توسط d باشد. آنگاه نامساوی اخیر پیوستگی عمل $\oplus$ را در (A, τ_d) تضمین می‌کند. لذا (A, τ_d) شبه MV - جبر پارا توپولوژیکی است. برای اتمام اثبات نشان می‌دهیم که

$$\{x : d(x,0) < \frac{1}{2^n}\} \subseteq \{x : d(x,0) \le \frac{2}{2^n}\}.$$

فرض کنید $x \in A$ چنان باشد که $d(x,0) < \frac{1}{2^n}$. از اینکه $f(0) = 0$، نتیجه می‌شود که

$$f(x) = f(x \oplus 0) - f(0) \le d(x,0) < \frac{1}{2^n}.$$

بنابراین برای یک $0 \le r \le \frac{1}{2^n}$، $x \in V'(r)$. از اینکه $V'(r) \subseteq V'(\frac{1}{2^n}) = U'_n$ نتیجه می‌گیریم که $x \in U'_n$. بنا به تعریف U'_n، یک $y \in U'_n$ وجود دارد بطوریکه $x \le y$. حال برای هر $z \in A$، یک $k \ge 0$ وجود دارد بطوریکه $\frac{k-1}{2^n} \le f(z) < \frac{k}{2^n}$. این نامساوی نشان می‌دهد که $z \in V'(\frac{k}{2^n})$. بنابراین به ازای یک $z' \in V(\frac{k}{2^n})$، $z \le z'$. از شرط (*) نتیجه می‌گیریم که

$$z' \oplus y \in V(\frac{k}{2^n}) \oplus V(\frac{1}{2^n}) \subseteq V(\frac{k+1}{2^n}).$$

نامساوی $z \oplus x \le z' \oplus y$ نشان می‌دهد که $z \oplus x \in V'(\frac{k+1}{2^n})$. بنابراین

$$f(x \oplus z) - f(z) \le \frac{k+1}{2^n} - \frac{k-1}{2^n} = \frac{2}{2^n}.$$

ولذا $d(x,0) \le \frac{2}{2^n}$. بدین ترتیب اثبات قضیه کامل می‌شود.

نتیجه ۴-۹. در قضیه (۴-۸)، اگر $g : A \to A$ یک یکریختی باشد که برای هر $n \ge 0$، $g(U_n) = U_n$، آنگاه تابع $g : (A, \tau_d) \to (A, \tau_d)$ پیوسته یکنواخت است.

اثبات. از آنجایی که g یکریختی است و برای هر $n \ge 0$، $g(U_n) = U_n$. می‌توانیم ثابت کنیم که برای هر $r \in \xi$، $g(V(r)) = V(r)$. فرض کنید

$x\in A$ باشد. در این صورت با توجه به دوسو بودن g داریم:

$$f\circ g(x) = inf\{r\in\xi : g(x)\in V(r)\}$$
$$= inf\{r : x\in V(r)\} = f(x).$$

اکنون با توجه به رابطه به دست آمده و تعریف N_f داریم:

$$N_f(g(x)) = sup\{f(g(x)\oplus z) - f(z)\ : z\in A\}$$
$$= sup\{f(g(x)\oplus g(z')) - f\circ g(z')\ : z'\in A\}$$
$$= sup\{f\circ g(x\oplus z') - f\circ g(z')\ : z'\in A\}$$
$$= sup\{f(x\oplus z') - f(z')\ : z'\in A\} = N_f(x).$$

بدین ترتیب $d(g(x),\ g(y)) = d(x,y)$ برای هر $x,y\in A$، که پیوسته یکنواختی g را نتیجه می‌دهد.

۵- فیلتر توپولوژی روی شبه MV -جبرها

در راستای مطالعه شبه MV- جبرهای پارا توپولوژیکی، در این بخش فیلتر توپولوژی روی این ساختار تعریف و برخی از خواص توپولوژیکی آن از جمله رابطه بین هاسدورف بودن فضا با اصول جداسازی T_0 و T_1 بیان می‌شود. برای نیل به این هدف ابتدا تعریف فیلتر و برخی از خواص آن در شبه MV- جبرها یادآوری می‌شود.

فرض کنید A یک شبه MV - جبر و F یک زیر مجموعه ناتهی آن باشد. F را یک فیلتر در A گویند هرگاه روابط زیر برقرار باشند:

(F1) برای هر $x,\ y\in F$، $x.y\in F$،

(F2) برای هر x و y متعلق به F، اگر $x\in F$ و $x\le y$، آنگاه y هم متعلق به F باشد.

فیلتر F را نرمال گویند هرگاه شرط

$$y^{\neg}.x\in F \Leftrightarrow x.y^{-}\in F$$

برقرار باشد. رابطه زیر برای هر فیلتر نرمال F یک رابطه هم نهشتی روی A است.

$$x\equiv^{F} y \Leftrightarrow x^{\neg}.y,\ y\neg.x\in F.$$

تعریف ۵-۱. [5] فرض کنید A یک شبه MV - جبر باشد. تابع های $\rho_1,\rho_2 : A\times A\to A$ تعریف شده با ضابطه

$$\rho_1(x,\ y)\ =\ (x!\ \ y)\oplus(y!\ \ x)$$
$$\rho_2(x,\ y)\ =\ (x\%y)\oplus(y\%x)$$

دارای شرایط زیر می‌باشند:

$$\rho_i(x,\ y)\ = 0 \Leftrightarrow x = y(\rho 1)$$
$$\rho_i(x,z)\le\rho_i(x,y)\oplus\rho_i(y,z)(\rho 2)$$
$$\rho_1(x^{\neg},\ y^{\neg})\ = \rho_2(x,\ y)\ (\rho 3)،$$
$$\rho_2(x^{-},\ y^{-})\ = \rho_1(x,\ y)$$
$$\rho_i(x,\ y)\ = \rho_i(y,\ x)\ (\rho 4)،$$
$$\rho_i(x\oplus s,\ y\oplus t)\le\rho_i(x,\ y)\oplus\rho_i(s,\ t)\ (\rho 5)$$

تعریف ۵-۲. فرض کنید A شبه MV - جبر، F یک فیلتر و ..... باشد. در این صورت

$$\bigcup_{x_0,r,\rho} = \{x\in A : \rho(x,\ x_0)\%r\in F\}$$

$$\overset{\cdots}{\bigcup}_{x_0,r,\rho} = \{x\in A : r!\ \ \rho(x,\ x_0)\in F\}$$

را به ترتیب F- گوی باز نسبت به % و ! با شعاع $r\in F$ و مرکز $x_0\in A$ می‌نامیم.

در ادامه حرف ρ نشان دهنده ρ_1 یا ρ_2 خواهد بود.

$$F^{-} = \{x^{-} : x\in F\}$$
$$F^{\neg} = \{x^{\neg} : x\in F\}$$

گزاره ۵-۲. فرض کنید F یک فیلتر در شبه MV - جبر A باشد. در این صورت برای هر $x\in A$ و هر $r\in F$ شرایط زیر برقرارند.

(۱) $\bigcup_{0,1,\rho} = \bigcup_{0,r,\rho} = F^{-}$،

(۲) $\bigcup_{x,1,\rho} = \bigcup_{x,r,\rho} = \{y : \rho(x,y)\in\bigcup_{0,r,\rho}\}$ ، (۳) $\bigcup_{0,r,\rho}$ نسبت به عمل $\vee$ و $\oplus$ بسته است و اگر $x \le y$ و $y \in \bigcup_{0,r,\rho}$ باشد، آنگاه $x \in \bigcup_{0,r,\rho}$،

(۴) برای هر $x \in \bigcup_{y,r,\rho}$ یک $s \in F$ وجود دارد بطوریکه $\bigcup_{x,s,\rho} \subseteq \bigcup_{y,r,\rho}$.

اثبات. (۱) با توجه به (24)، داریم:

$$x \in \bigcup^{\neg}_{0,r,\rho} \Leftrightarrow x^{-} \in \bigcup_{0,r,\rho} \Leftrightarrow x.r \in F \Leftrightarrow x \in F.$$

بنابراین $\bigcup^{\neg}_{0,r,\rho} = F$ و لذا $\bigcup_{0,r,\rho} = F^{-}$. چون تساوی اخیر مستقل از r است، حکم برقرار است.

(۲) تساوی برقرار است زیرا

$$y \in \bigcup_{x,r,\rho} \Leftrightarrow \rho(x,\ y)\,\%r \in F \Leftrightarrow$$
$$\rho(\rho(x,\ y),0)\,\%r \in F \Leftrightarrow \rho(x,\ y) \in \bigcup_{0,r,\rho}.$$

با توجه به قسمت اول اثبات $\bigcup_{x,r,\rho} = \bigcup_{x,1,\rho}$ واضح است.

(۳) فرض کنید $y \in \bigcup_{0,r,\rho}$ و $x \le y$. در این صورت $x\,\%r \ge y\,\%r \in F$ و لذا $x\,\%r \in F$، یعنی $x \in \bigcup_{0,r,\rho}$. حال فرض کنید $x, y \in \bigcup_{0,r,\rho}$. در این صورت $x \vee y \in \bigcup_{0,r,\rho}$ زیرا

$$\rho(x \vee y, 0)\,\%r = (x \vee y)\,\%r =$$
$$(x\,\%r) \vee (y\,\%r) \ge x\,\%r \in F.$$

هم چنین با توجه به قسمت اول $x^{\neg}$ و $y^{\neg}$ هر دو متعلق به فیلتر F هستند و لذا $y^{\neg}.x^{\neg} \in F$. بنا به تعریف عمل ضرب $(x \oplus y)^{\neg} \in F$. این نشان می‌دهد که $\bigcup_{0,r,\rho}$ نسبت به عمل $\oplus$ بسته است.

(۴) قرار دهید $s = \rho(y,\ x)\,\%r \in F$. در این صورت برای هر $z \in \bigcup_{x,s,\rho}$ داریم:

$$\rho(y,\ z)\,\%r \ge (\rho(y,\ x) \oplus \rho(x,\ z))\,\%r =$$
$$(\rho(y,\ x) \oplus \rho(x,\ z))^{\neg}.r = \rho(x,\ z)^{\neg}.\rho(y,\ x)^{\neg}.r$$
$$= \rho(x,\ z)\,\%s \in F.$$

بنابراین $\rho(y,\ z)\,\%r \in F$ و لذا نتیجه می‌شود که $\bigcup_{x,s,\rho} \subseteq \bigcup_{y,r,\rho}$ می‌باشد.

گزاره ۵-۳. فرض کنید F یک فیلتر در شبه MV - جبر A باشد. آنگاه برای هر $x \in A$ و $r \in F$ شرایط زیر برقرار است:

(۱) $\bigcup^{\cdots}_{0,1,\rho} = \bigcup^{\cdots}_{0,r,\rho} = F^{\neg}$.

(۲) $\bigcup^{\cdots}_{x,1,\rho} = \bigcup^{\cdots}_{x,r,\rho} = \{y : \rho(x,\ y) \in \bigcup^{\cdots}_{0,r,\rho}\}$

(۳) $\bigcup^{\cdots}_{0,r,\rho}$ نسبت به عمل $\vee$ و $\oplus$ بسته است و اگر $x \le y$ و $y \in \bigcup^{\cdots}_{0,r,\rho}$ باشد، آنگاه $x \in \bigcup^{\cdots}_{0,r,\rho}$.

(۴) برای هر $x \in \bigcup^{\cdots}_{y,r,\rho}$ یک $s \in F$ وجود دارد بطوریکه $\bigcup^{\cdots}_{x,s,\rho} \subseteq \bigcup^{\cdots}_{y,r,\rho}$.

اثبات. اثبات مشابه گزاره قبل است.

لم ۵-۴. فرض کنید A یک شبه MV -جبر و $a,b,c,x,y \in A$. اگر $a \le b \oplus c$ و $\rho(x,\ y) = \rho_0$ آنگاه $\rho_0\,\%a \le \rho_0\,\%(b \oplus c)$.

اثبات. فرض کنید $a \le b \oplus c$. بنا بر (9)، وجود دارد یک $m \in A$ بطوریکه $b \oplus c = a \oplus m$. اکنون با توجه به (41)،

$$\rho_0\,\%(a \oplus m) = (\rho_0\,\%a)\,\%m.$$

در این صورت

$$a \le b \oplus c \Rightarrow (b \oplus c)^{-} \le a^{-} \Rightarrow (a \oplus m)^{-} \le a^{-}$$
$$\Rightarrow (a \oplus m)^{-} \oplus \rho_0 \le a^{-} \oplus \rho_0$$
$$\Rightarrow (\rho_0\,\%(a \oplus m))^{-} \le (\rho_0\,\%a)^{-}$$
$$\Rightarrow ((\rho_0\,\%a)\,\%m)^{-} \le (\rho_0\,\%a)^{-}$$
$$\Rightarrow \rho_0\,\%a \le \rho_0\,\%(b \oplus c).$$

قضیه ۵-۵. فرض کنید A یک شبه MV - جبر و F یک فیلتر از A باشد، آنگاه خانواده F – گوی‌های باز نسبت به عمل % تشکیل یک پایه برای یک

توپولوژی $\tau_{F,\rho}$ روی A را می‌دهند بطوریکه $(A,\tau_{F,\rho})$ شبه MV - جبر پارا توپولوژیکی است.
اثبات. چون $0\%r=r$ برای هر $r\in F$، بنا به ($\rho1$)، $x_0\in\bigcup_{x_0,r,\rho}$. بنابراین F- گوی‌های باز نسبت به عمل % تشکیل یک پوشش باز برایA را می‌دهند. حال فرض کنید $z_0\in\bigcup_{x_0,r,\rho}\cap\bigcup_{y_0,r,\rho}$ دلخواه باشد. بپذیرید که

$$c_1=\rho(z_0,x_0)\%r\in F$$

و

$$c_2=\rho(z_0,y_0)\%R\in F.$$

در این صورت $\bigcup_{z_0,\varepsilon,\rho}\subseteq\bigcup_{x_0,r,\rho}\cap\bigcup_{y_0,r,\rho}$ برای $\varepsilon=c_1\wedge c_2$. زیرا برای هر $x\in\bigcup_{z_0,\varepsilon,\rho}$، داریم

$$\rho(x,z_0)\%\varepsilon\in F.$$

همچنین بنا بر لم قبل و (22)، (41)، و (42) داریم:

$$\begin{aligned}&\rho(x_0,x)\%r\ge(\rho(x_0,z_0)\oplus\rho(z_0,x))\%r\\&=(\rho(x_0,z_0)\oplus\rho(z_0,x))^{\neg}.r\\&=\rho(z_0,x)^{\neg}.\rho(z_0,x_0)^{\neg}.r\\&=\rho(z_0,x)\%c_1\ge\rho(z_0,x)\%\varepsilon\in F.\end{aligned}$$

در این صورت $\rho(x,x_0)\%r\in F$ و این نشان می‌دهد که $x\in\bigcup_{x_0,r,\rho}$. بطور مشابه می‌توان نشان داد که $x\in\bigcup_{y_0,R,\rho}$ و لذا اثبات کامل می‌شود. بدین ترتیب خانواده $\{\bigcup_{x,r,\rho}:x\in A,r\in F\}$ تشکیل یک پایه برای یک توپولوژی $\tau_{F,\rho}$ روی A را می‌دهد.
حال نشان می‌دهیم عمل $\oplus$ پیوسته است. برای این منظور برای هر $\varepsilon\in F$ فرض کنید U یک F-گوی باز نسبت به % با شعاع ε حول $x_0\oplus y_0$ و $V=\{x\in A:\rho(x,x_0)\%\varepsilon\in F\}$ باشد. فرض کنید $x\in V$ و $\rho(x,x_0)\%r=c_x\in F$ و W یک F-گوی باز نسبت به % با شعاع c_x حول y_0 باشد. در این صورت $V\times W$ یک همسایگی باز حول (x_0,y_0) می‌باشد. حال $(x,y)\in V\times W$ را انتخاب می‌کنیم. لذا

$$\begin{aligned}&\rho(x\oplus y,\ x_0\oplus y_0)\%\varepsilon\ge(\rho(x,\ x_0)\oplus\\&\rho(y,\ y_0))\%\varepsilon=\ (\rho(x,\ x_0)\oplus\rho(y,\ y_0))^{\neg}.\varepsilon\\&=\rho(y,\ y_0)^{\neg}.\rho(x,\ x_0)^{\neg}.\varepsilon=\rho(y,\ y_0)\%c_x\in F.\end{aligned}$$

بدین ترتیب $V\oplus W\subseteq U$ و لذا $\oplus$ پیوسته است.
به توپولوژی تولید شده در قضیه بالا فیلتر توپولوژی نسبت به عمل % می‌گوییم. لازم به ذکر است که با توجه به گزاره (۵-۲)، مجموعه $\{\bigcup_{x,1,\rho}:x\in A\}$ پایه توپولوژی $\tau_{F,\rho}$ خواهد بود. در ضمن قضیه فوق برای F -گوی‌های باز نسبت به ! نیز برقرار است. این توپولوژی را فیلتر توپولوژی نسبت به عمل ! می‌گوییم.

نتیجه ۵-۶. فیلتر توپولوزی‌ها نسبت به % و !، به ترتیب به وسیله F^{-} و $F^{\neg}$ به صورت یکتا تعیین می‌شوند. بعلاوه، اگر F_1و F_2 فیلترهایی از A باشند، آنگاه $\tau_{F_1}\subseteq\tau_{F_{2_1}}$ اگر وتنها اگر $F^{-}{}_1\subseteq F^{-}{}_2$. نتیجه مشابهی برای $F^{\neg}$ برقرار است.

اثبات. بنا به گزاره‌ها (۲-۵) و (۵-۳) اثبات واضح است.

گزاره ۵-۷. پارا توپولوژیکال شبه MV - جبر $(A,\tau_{F,\rho})$ نسبت به عمل%، (!)، یک توپولوزیکال شبه MV - جبر است اگر و فقط اگر نگاشت‌های ρ_1 و ρ_2 پیوسته هستند.

اثبات. اثبات برای حالتی که $\tau_{F,\rho}$ فیلتر توپولوژی نسبت به % باشد، ارایه می‌شود. برهان برای حالت دیگر مشابه است. اگر $(A,\tau_{F,\rho})$ توپولوژیکال شبه MV- جبر باشد، آنگاه چون نگاشت‌های ρ_1 و ρ_2 ترکیبی از سه عمل $^{-}$ و $^{\neg}$ و $\oplus$ می‌باشند، به وضوح پیوسته هستند. به عکس فرض کنید نگاشت‌های ρ_1

و ρ_2 پیوسته باشند. برای اثبات قضیه کافیست پیوستگی عمل‌های $^-$ و $^\neg$ ثابت شود. فرض کنید $x_0^\neg \in \bigcup_{x_0^\neg, r}$ بدین ترتیب $\rho_2(x_0,1) = x_0^\neg \in \bigcup_{x_0^\neg,r}$. با توجه به پیوستگی تابع ρ_2 یک $s \in F$ وجود دارد به طوریکه $x_0 \in \bigcup_{x_0,s}$ و $\rho_2(\bigcup_{x_0,s},1)$ زیرمجموعه $\bigcup_{x_0^\neg,r}$ است. نشان می‌دهیم $\bigcup^\neg_{x_0,s} \subseteq \bigcup_{x_0^\neg,r}$. برای این منظور فرض کنید $z \in \bigcup^\neg_{x_0,s}$. در این صورت به ازای یک $y \in \bigcup_{x_0,s}$، $z = y^\neg$. بنابراین

$$z = y^\neg = \rho_2(y,1) \in \bigcup_{x_0^\neg,r}.$$

بدین ترتیب اثبات پیوستگی $^\neg$ تکمیل می‌شود. اثبات پیوستگی عمل $^-$مشابه است.

گزاره ۵-۸. فرض کنید N (0) مجموعه همسایگی‌های 0 نسبت به عمل % در $(A,\tau_{F,\rho})$ باشد. در این صورت یک یکنواختی U روی A وجود دارد بطوریکه عمل $\oplus$ پیوسته یکنواخت است و $\tau_{F,\rho}$ توپولوژی تولید شده توسط U است.

اثبات. بنا به گزاره (۵-۲)، مجموعه تک عضوی $\{F^-\}$ پایه N (0) است. فرض کنید

$$B=\{U^*: U\in \mathrm{N}(0)\}$$

باشد، جاییکه $U^*=\{(x,y) : \rho(x,y)\in U\}$ است. به وضوح برای هر همسایگی باز U از نقطه 0، $\Delta\subseteq U^*$ و $(U^*)^{-1}=U^*$. فرض کنید $U^*\in B$ و $(x,y)\in F^{-*}\circ F^{-*}$ باشد. در این صورت به ازای $z\in A$، زوج‌های مرتب (x,z) و (z,y) متعلق به F^{-*} هستند. اکنون نامساوی

$$\rho(x,y)\le \rho(x,z)\oplus\rho(z,y)\in F^-$$

نتیجه می‌دهد که $\rho(x,y)\in U$ و لذا (x,y) متعلق به U^*است. بنابراین $F^{-*}\circ F^{-*}\subseteq U^*$. بدین ترتیب B پایه ایی برای یک یکنواختی U روی A است.

برای اثبات پیوستگی یکنواخت $\oplus$، مجموعه U^* را عضوی از B در نظر بگیرید و فرض کنید (x,y) و (a,b) زوج‌هایی متعلق به F^{-*} باشند. بنا به $(\rho 5)$

$$\rho(x\oplus a, y\oplus b)\le \rho(x,y)\oplus\rho(a,b)\in F^-\subseteq U.$$

بنابراین $(x\oplus a, y\oplus b)\in F^{-*}\subseteq U^*$. اکنون رابطه شمول $F^{-*}\oplus F^{-*}\subseteq U^*$ پیوستگی یکنواخت $\oplus$ را نتیجه می‌دهد.

برای اتمام برهان، می‌دانیم که مجموعه

$$\tau=\{W: \forall x\in W \exists U\in B\ s.t\ U^*[x]\subseteq W\}$$

توپولوژی تولید شده توسط U روی مجموعه A است، جاییکه $U^*[x]=\{y: (x,y)\in U^*\}$. بدین ترتیب $U^*[x]=\{y:\rho(x,y)\in U\}=\bigcup_{x,1,\rho}$. بنابراین

$$\tau=\{W\subseteq A: \forall x\in W, \bigcup_{x,1,\rho}\subseteq W\}$$

و این همان $\tau_{F,\rho}$ است.

گزاره فوق را می‌توان نسبت به عمل ! بیان و ثابت نمود.

گزاره ۵-۹. فرض کنید $\tau_{F,\rho}$ فیلتر توپولوژی نسبت به عمل % باشد. در این صورت شرایط زیر معادلند.

(۱) $F^- = 0$.

(۲) فضای $(A,\tau_{F,\rho})$ هاسدورف است.

(۳) فضای $(A,\tau_{F,\rho})$ فضای T_1 است.

(۴) فضای $(A,\tau_{F,\rho})$ فضای T_0 است.

اثبات. گزاره را برای $\rho=\rho_2$ ثابت می کنیم. برای حالت دیگر اثبات مشابه است.

(۱) $\Rightarrow$ (۲) فرض کنید $F^- = 0$ و x و y دو عضو متمایز A باشند. در این صورت $\rho(x,y)\neq 0$ می‌دانیم دو مجموعه $\bigcup_{x,1,\rho}$ و $\bigcup_{y,1,\rho}$، به ترتیب، دو مجموعه باز شامل x و y هستند. اگر $z\in A$ متعلق به هر دو مجموعه باشد، آنگاه عناصر $\rho(x,z)$ و

$\rho(y, z)$ متغلق به F^{-} هستند. بنا به $(\rho 5)$ و گزاره (۲-۵)، $\rho(x, y) \in F^{-} = 0$ که یک تناقض است. بنابراین $\bigcup_{x,1,\rho} \cap \bigcup_{y,1,\rho} = \varnothing$ که هاسدورف بودن فضا را ثابت می‌کند.

اثبات‌های (۳) $\Rightarrow$ (۲) و (۴) $\Rightarrow$ (۳) واضح هستند.

(۱) $\Rightarrow$ (۴) فرض کنید $x > 0$. چون فضا T_0 است، $x \notin F^{-}$ یا $0 \notin \bigcup_{x,1,\rho}$. در حالت دوم

$\rho(x,\ 0)\,\%1 \notin F.$

این نتیجه می دهد که $x^{\neg} \notin F$ و لذا $x \notin F^{-}$. در هر دو حالت نتیجه می‌شود که $x \notin F^{-}$، پس $F^{-} = 0$.

با تعویض F^{-} با $F^{\neg}$، گزاره قبل نسبت به عمل ! نیز برقرار است.

گزاره ۵-۱۰. فرض کنید $\tau_{F,\rho}$ فیلتر توپولوژی روی A نسبت به عمل % یا ! باشد. در این صورت شرایط زیر برقرارند.

(۱) اگر U یک باز باشد، آنگاه $U \oplus F^{-} = U$ و $U \oplus F^{\neg} = U$.

(۲) اگر F یک فیلتر نرمال و $cl\{x\}$، بستار x باشد، آنگاه $cl\{x\} = \frac{x}{F^{-}} (= \frac{x}{F^{\neg}})$.

اثبات. (۱) فرض کنید U زیر مجموعه باز و x عضو دلخواهی از U باشد. چون $x \oplus 0 \in U$ و $\oplus$ پیوسته است، مجموعه باز V شامل 0 هست بطوریکه $x \oplus V \subseteq U$. چون $F^{-} \subseteq V$ و x عضو دلخواهی از U است، $U \oplus F^{-} \subseteq U$. اثبات عکس رابطه شمول واضح است. اثبات تساوی دیگر بطور مشابه انجام می‌شود.

(۲) فرض کنید $x \in A$ باشد. لذا $cl\{x\} = \frac{x}{F^{-}}$. زیرا

$$y \in cl\{x\} \Leftrightarrow x \in \bigcup_{y,1,\rho} \Leftrightarrow \rho(x, y) \in F^{-} \Leftrightarrow y \in \frac{x}{F^{-}}.$$

اثبات تساوی دیگر بطور مشابه انجام می‌شود.

نتیجه‌گیری

هدف از نگارش این مقاله معرفی و مطالعه شبه MV-جبرهای پارا توپولوژیکی است. برای این منظور از PMV- شبه نرم‌ها و فیلترتوپولوژی استفاده شده است. علاقه‌مندان به مطالعه در این زمینه می‌توانند به دنبال شرایطی باشند که شبه MV - جبرهای پارا توپولوژیکی را تبدیل به شبه MV - جبرهای توپولوژیکی نماید. مطالعه پیوستگی یکنواخت عمل‌های این ساختار جبری نیز می‌تواند مد نظر قرار گیرد.

سپاس گذاری

نویسندگان برخود لازم می دانند که از داوران محترم به خاطر دقت نظر و پیشنهادهای مناسب، کمال تشکر و قدردانی را داشته باشند.

فهرست منابع

[1] R.A. Borzooei, Hee sik kim, N. Kouhestani, *Constracting (pre) norms in BLalgebras and its action on topological BLalgebras*, journal of Intelligent fuzzy systems 37(2019), 69696959.

[2] R. A. Borzooei, G. R. Rezaei, N. Kouhestani, *On (semi) Topological BL-algebra*, Iranian Journal of Mathematical Sciences and Informatics (1)6,(2011),5977.

[3] C.C. Chang, *Algebraic analysis of manyvalued logics*, Trans. Am. Math. Soc. 88 (1958), 490467.

[4] A. Dvurecenskij, *Pseudo MValgebras are intervals in lgroups*. j.Austral. Math. soc, 72(2002), 445427.

[5] G. Georgescu, A. Iorgulescu , *Pseudo MValgebras*, Mult valued log 6 (2001), 13593.

[6] N. Kouhestani, R. A. Borzooei, *Topological Residuated lattices*, Int. j. Industrial mathematics (2017), val(9), no.3, 195183.

[7] S. Mehrshad, N. Kouhestani, *On PseudoValuations on BCK algebras*, Filomat, (2018), 43324319.

[8] M. Najafi, G. R. Rezaei, N. Kouhestani, *On (para, quasi) Topological MValgebra*, Fuzzy sets and Systems 313(2017), 10493.

[9] F. R. Setudeh, N. Kouhestani, *On (semi) Topological BCCalgebras*. Apple. Apple. Math. (2017), 161143.

[10] G. Zegorz dymek, A. walendziak. *Semisimple archimedean and semilocal pseudo MValgebras*, Scientiae Mathematicae Japonicae Online,e2007, 315–324.