دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هفتم، شماره سی و یکم، مرداد و شهریور ۱۴۰۰
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

بیشترین مقیاس بهره‌وری تولید با حضور عوامل زیست محیطی در تحلیل پوششی داده‌ها

هاجر حقیقت پیشه[۱]، سهراب کردرستمی[۲*]، علیرضا امیرتیموری[۳]

[(۱و۲)] گروه ریاضی، واحد لاهیجان، دانشگاه آزاد اسلامی، لاهیجان، ایران
[(۳)] گروه ریاضی کاربردی، واحد رشت، دانشگاه آزاد اسلامی، رشت، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۰۴/۱۶ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۱۱/۳۰

چکیده

امروزه ارزیابی کارایی سازمان‌ها و دانستن اینکه چگونه منابع باید سازماندهی شوند و برای رسیدن به نتایج بهینه استفاده موثر شوند بسیار حائز اهمیت می‌باشد. از جمله روش‌های ارزیابی کارایی، تحلیل پوششی داده‌ها می‌باشد. یکی از موضوعات مهم در تحلیل پوششی داده‌ها تخمین بیشترین اندازه مقیاس بهره‌وری (MPSS) تولید است. با توجه به حضور عوامل نامطلوب در سیستم‌های تولیدی، در این پژوهش مدل‌هایی جهت ارزیابی MPSS و تعیین بزرگترین و کوچکترین MPSS (نزدیکترین و دورترین نقاط MPSS) پیشنهاد می‌شود در حالی که خروجی‌های نامطلوب با دسترسی ضعیف در نظرگرفته می‌شوند. مدل‌های پیشنهادی نقش عوامل محیطی را در برآورد میزان کارایی واحدها مشخص می‌کنند. این مدل‌ها به‌علت سهولت و زمان کوتاه در محاسبات می‌توانند در کارخانه‌ها، بیمارستان‌ها و همچنین توسط نگهبان محیط زیست برای نظارت مستمر بر وضعیت زیست محیطی تحت تاثیر فعالیت‌های صنعتی استفاده شوند و تاثیر عوامل محیطی را در برآورد کارایی نشان دهند. برای ارایه نتایج نظری از داده‌های صنعت چین با ۳۱ واحد تصمیم‌گیرنده استفاده می‌کنیم.

کلمات کلیدی: تحلیل پوششی داده‌ها، کارایی، عوامل زیست محیطی، بیشترین اندازه بهره‌وری، خروجی نامطلوب.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: kordrostami@liau.ac.ir

۱- مقدمه

تحلیل پوششی داده‌ها (DEA) تکنیک برنامه‌ریزی خطی برای ارزیابی کارایی نسبی واحدهای تصمیم گیرنده می‌باشد که با ارائه مدل CCR توسط چارنز و همکاران [۷] ابداع شد.سپس مدل CCR توسط بنکر و همکاران [۵] به مدل BCC گسترش یافت. تفاوت مدل CCR با مدل BCC در متغییر آزاد u_0 می‌باشد. علامت این متغییر نشانگر نوع بازده به مقیاس (RTS) تولید واحد ارزیابی است. بنکر و همکاران [۴] با استفاده از دوال مدل BCC نوع بازده به مقیاس را مشخص کردند. بنکر و همکاران [۴] روش‌هایی را برای تعیین موقعیت RTS بیان نمودند. برای بازده به مقیاس می‌توان سه وضعیت افزایشی، کاهشی و ثابت در نظر گرفت. در حالتی که بازده به مقیاس ثابت باشد، واحد تحت ارزیابی، بیشترین مقیاس بهره‌وری (MPSS) نامیده می‌شود. مفهوم MPSS اولین بارتوسط بنکر [۳] معرفی شد. به این صورت که واحد تصمیم گیرنده تحت ارزیابی، یک MPSS است اگر و تنها اگر ورودی‌ها را به اندازه α کاهش دهیم و خروجی‌ها را به اندازه β افزایش دهیم و کماکان در مجموعه امکان تولید قرار داشته باشد و داشته باشیم $\beta\geq\alpha$. یک واحد تصمیم گیرنده تحت ارزیابی MPSS است اگر تحت هر دو مدل CCR و BCC کارا باشد. ناحیه مشترک مرز کارای CCR و BCC که در این خاصیت صدق می‌کند را MPSS می‌نامند. یکی از موضوعات بسیار مهم در تحلیل پوششی داده‌ها (MPSS) و برآورد آن می‌باشد. کوپر و همکارانش [۸] یک مدل با تابع هدف کسری را برای تعیین MPSS ارائه دادند. جهانشاهلو و خدابخشی نیز [۱۵] برای تعیین MPSS مدلی با ماهیت خروجی- ورودی با تابع هدف خطی معرفی کردند که مشکلات مدل‌های قبلی را که تابع هدف کسری داشتند، برطرف می‌کرد. خدابخشی [۱۷]،MPSS را با در نظر گرفتن داده تصادفی در تحلیل پوششی داده‌ها مورد بررسی قرار داد. بنابراین ماهیت خروجی– ورودی معرفی شده توسط جهانشاهلو و خدابخشی در تحلیل پوششی داده تصادفی گسترش پیدا کرده است. مقدس و واعظ قاسمی [۲۰] برای تعیین MPSS داده صحیح و حقیقی را مورد مطالعه قرار دادند.

یونیتا ساری [۲۴] نیز برای تخمین MPSS به بررسی داده با مقادیر صحیح در تحلیل پوششی داده‌ها پرداختند. خدابخشی و جهانشاهلو [۱۶] بعد از تعیین MPSS، مدل‌هایی را برای برآورد بزرگترین و کوچکترین MPSS ارایه دادند. در مدل‌های مقدماتی تحلیل پوششی داده‌ها هدف مینیمم کردن ورودی‌های مطلوب و ماکزیمم کردن خروجی‌های مطلوب می‌باشد. در اغلب فرآیندهای واحدها و سازمان‌هایی مثل کارخانه‌ها و بیمارستان- ها ممکن است علاوه بر تولید خروجی‌های مطلوب، خروجی‌های نامطلوبی نیز تولید شوند که تولید این خروجی‌های نامطلوب باعث زیان می‌شود. حضور خروجی‌های نامطلوب در ارزیابی واحدها نقش مهمی در برآورد میزان کارایی دارد.

در ارزیابی چنین واحدهایی، دنبال روشی هستیم که به کمک آن قادر به کاهش خروجی‌های نامطلوب و افزایش خروجی‌های مطلوب باشیم. به همین دلیل مدل‌های تحلیلپوششی داده‌ها باید طوری طراحی شوند که خروجی‌های نامطلوب را نیز همانند ورودی‌ها به حداقل برسانند. پژوهش‌های بسیاری در رابطه با خروجی‌های نامطلوب صورت گرفته است. از جمله کارهای انجام شده در این زمینه می‌توان به مقاله‌های بال و همکاران [۲]، فارو گراسکوف و همکاران [۱۲-۱۱-۱۰]، هایلو و ویمن [۱۴-۱۳]، جهانشاهلو و همکاران [۱۶] کاسمانن [۱۸]، کاسمانن و پودینوسکی [۱۹]، بنکر و ماندیرتا [۶] و شفرد [۲۲] اشاره نمود.

هر دو مقوله بزرگترین و کوچکترین MPSS می‌توانند به ترتیب به دورترین و نزدیکترین نقاط

MPSS تعبیر شوند و در تئوری‌های اقتصاد تاثیر داشته باشند. در حالت کوچکترین یا نزدیکترین نقاط MPSS چون مدت زمان کوتاهی را برای رسیدن به نقاط بهینه صرف می‌کنیم لذا مدل پیشنهادی برای برآورد کوچکترین MPSS با حضور خروجی‌های نامطلوب می‌تواند در ارزیابی کارایی واحدها و سازمان‌ها موثر باشد. از طرفی یافتن بزرگترین MPSS با عوامل زیست محیطی می‌تواند با کاهش ورودی‌ها و خروجی‌های نامطلوب در اقتصاد کشور تاثیرگذار باشد و باعث رونق اقتصادی و سود آوری واحدها و سازمان‌ها شود. در فضای ۳ بعدی بزرگترین و کوچکترین MPSS اصلاً تعریف ندارد. از نظر هندسی برای پیدا نمودن بزرگترین و کوچکترین MPSS متناظر تصویر، ابتدا هر نقطۀ MPSS را با مدل‌های پیشنهادی بدست می‌آوریم. آنگاه آنها را به مبدأ وصل می‌کنیم. یک شعاع رسم می‌نماییم و امتداد می‌دهیم. این شعاع انتهای MPSS را که می‌گذراند بزرگترین MPSS نام دارد و ابتدای این شعاع کوچکترین MPSS نام دارد. به عبارتی دیگر، بزرگترین MPSS بیشترین نرم را دارد و کوچکترین MPSS، کمترین نرم را می‌دهد.

در این مقاله ابتدا به معرفی روش کاسمانن در برخورد با خروجی‌های نامطلوب می‌پردازیم و روش‌هایی را جهت تخمین MPSS با تابع هدف کسری و خطی پیشنهاد می‌کنیم. با استفاده از مدل‌های پیشنهادی، فرم‌های غیرارشمیدوسی را برای تعیین MPSS به‌کار می‌بریم. سپس بزرگترین و کوچکترین MPSS متناظر DMUp را با در نظر گرفتن بازده به‌مقیاس متغیر و بااستفاده از مدل‌های طراحی شده و قضایای بکار رفته پیدا می‌کنیم و الگوریتمی را جهت یافتن ماکسیمم و مینیمم MPSS ارائه می‌دهیم. بزرگترین MPSS در مجموعه امکان تولید با در نظر گرفتن بازده به مقیاس متغیر T_v وجود ندارد. ماکزیمم و مینیمم MPSS متناظر لزوماً یک DMU نیست بلکه نقطه‌ای از MPSS است. مدل‌های طراحی شده را برای ۳۱ داده‌های صنعت چین اجرا می‌کنیم.

بخش‌های این مقاله عبارتنداز: در بخش ۲ مفاهیم پایه ارایه می‌شود. بخش ۳ شامل روش پیشنهادی به منظور برآورد بیشترین مقیاس بهره‌وری در حضور خروجی‌های نامطلوب است. در بخش ۴ کاربرد بیشترین اندازه بهره‌وری تولیددر صنعت چین در ۲۰۱۰ نشان داده می‌شود. نتیجه‌گیری و پیشنهادها در بخش ۵ مطرح می‌شود.

۲- مفاهیم پایه

فرض کنید در یک فعالیت تولیدی، M ورودی در تولید S خروجی مطلوب و G خروجی نامطلوب به کار برده شود. $x \in R_+^M$ بردار ورودی مصرف شده و $V \in R_+^S$، $W \in R_+^G$ به ترتیب نشان دهندۀ بردارهای خروجی‌های مطلوب و خروجی‌های نامطلوب باشند. مجموعه امکان تولیدارایه شده توسط کاسمانن به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$P(x) = \{(V,W) : (V,W,X) \in \mathrm{Y}\}\,.$$

فارو گراسکوف، تعریف دسترسی پذیری ضعیف را بر اساس دیدگاه شفرد[۲۲] به‌صورت زیر ارائه دادند.

تعریف ۱. (دسترسی‌پذیری ضعیف): خروجی‌ها دسترسی پذیری ضعیف دارند، اگر کاهش یکنواخت خروجی‌های شدنی همچنان شدنی باشد. یعنی: اگر $(V,W) \in P(x)$، $0 \le \theta \le 1$ آنگاه:

$$(\theta V, \theta W) \in P(x)$$

کاسمانن دراصل دسترسی‌پذیری ضعیف، فاکتورهای انقباض غیریکنواختی را در مولفه‌های خروجی مطلوب و نامطلوب هریک از واحدها به کار می‌برد.

۲-۱- تکنولوژی کاسمانن با فرض دسترسی پذیری ضعیف

در رویکردی که کاسمانن [۱۸] از تکنولوژی

امکان‌پذیری ضعیف ارائه کرد، به جای به کار بردن یک فاکتور انقباض یکنواخت برای امکان‌پذیری ضعیف، از فاکتورهای کاهش غیریکنواخت در مدل استفاده می‌نماید. اصول موضوعه‌ای که کاسمانن برای مدل‌بندی استفاده نمود شامل دسترسی پذیری آزاد ورودی‌ها و خروجی‌های مطلوب، دسترسی پذیری ضعیف خروجی‌های نامطلوب، اصل شمول، اصل کمینه برون‌یابی و اصل تحدب می‌باشد. مجموعه امکان تولید حاصل از تکنولوژی کاسمانن شامل $(\mathrm{V,W,X})$های شدنی با $T=\{(\mathrm{V,W},X):$ را تولید کند (V,W) می‌تواند $\mathrm{X}\}$ نشان داده می‌شود. تکنولوژی ارایه شده توسط کاسمانن [۱۸] و مطرح شده در مقاله رضا کاظمی متین [۱] در حالت بازده به مقیاس ثابت به صورت زیر است.

$$
T_c=\left\{\begin{array}{ll}(x,v,w):\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij}\le x_i & i=1,\dots,m\\ \sum\limits_{j=1}^{n}\theta_j\lambda_j v_{rs}\ge v_r & r=1,\dots,s\\ \sum\limits_{j=1}^{n}\theta_j\lambda_j w_{gj}=w_g & g=1,\dots,G\\ \lambda_j\ge 0, 0\le\theta\le 1 \;\;, & j=1,\dots,n\end{array}\right\} \qquad (1)
$$

همچنین برای در نظر گرفتن خروجی نامطلوب تحت بازده به مقیاس متغیر از رویکرد کاسمانن داریم:

$$
T_v=\left\{\begin{array}{ll}(x,v,w):\sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij}\le x_i & i=1,\dots,m\\ \sum\limits_{j=1}^{n}\theta_j\lambda_j v_{rs}\ge v_r & r=1,\dots,s\\ \sum\limits_{j=1}^{n}\theta_j\lambda_j w_{gj}=w_g & g=1,\dots,G\\ \sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j=1 & \\ \lambda_j\ge 0, 0\le\theta\le 1 \;\;, & j=1,\dots,n\end{array}\right\} \qquad (2)
$$

مشکل فرمول‌بندی کاسمانن غیرخطی بودنآن است که با یک روش ساده خطی می‌شود. برای خطی‌سازی، فرض کنید وزن‌های $\mathrm{DMU_k}$ به دو قسمت به صورت $\lambda=\delta+\mu$ تجزیه شود.مؤلفه اول δ نشان‌دهندهٔ قسمتی از خروجی است که فعال باقیمی‌ماند. یعنی $\delta=\theta\lambda$ و مؤلفهٔ دوم μ نشان دهندهٔ قسمتی از خروجی است که سطح فعالیت را کم می‌کند. $\mu=(1-\theta)\lambda$ متغیر انقباض از رابطه $\theta=\dfrac{\delta}{\delta+\mu}$ به دست می‌آید.

در این قسمت به ارایه مفهوم MPSS با توجه به مجموعه امکان تولیدهای تعریف شده و مطابق کتاب تحلیل پوششی داده‌ها نوشته‌ی کوپر و همکاران [۹] می‌پردازیم.

مدل‌های (۳) و (۴) را به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم.

$$
\begin{array}{ll}
Min & \frac{1}{2}(\alpha+\phi)\\
s.t & \sum\limits_{j=1}^{n}\theta_j\lambda_j v_j\ge v_0\\
 & \sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j x_j\le\alpha x_0\\
 & \sum\limits_{j=1}^{n}\theta_j\lambda_j w_j=\phi w_0\\
 & \sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j=1\\
 & \lambda_j\ge 0\;,\;0\le\theta_j\le 1\;,\;j=1,\dots,n
\end{array} \qquad (3)
$$

$$
\begin{array}{ll}
Min & \frac{1}{2}(\alpha+\phi)\\
s.t & \sum\limits_{j=1}^{n}\theta_j\lambda_j v_j\ge v_0\\
 & \sum\limits_{j=1}^{n}\lambda_j x_j\le\alpha x_0\\
 & \sum\limits_{j=1}^{n}\theta_j\lambda_j w_j=\phi w_0\\
 & \lambda_j\ge 0\;,\;0\le\theta_j\le 1\;,\;j=1,\dots,n
\end{array} \qquad (4)
$$

واحد تحت ارزیابی $\mathrm{DMU_0}$ که تحت مدل (۴) (بازده به مقیاس ثابت) کارا است تحت مدل (۳)

(بازده به مقیاس متغیر) هم کارا است.
جهت نشان دادن این موضوع می‌توان این گونه بیان داشت که در جواب بهینه تحت مدل (۴) اگر مینیمم مقدار تابع هدف ۱ باشد در این صورت DMU_0 روی مدل T_C قرار دارد و کاراست و مدل همواره شدنی است. زیرا $\frac{1}{2}(\alpha+\phi)=1$ و $\lambda_0=1,\ \lambda_j=0\ \ (j=1,...,n,\ j\neq 0)$ یک جواب شدنی است. در هر دو مدل (۳) و (۴) قیود شبیه هستند و فقط مدل (۴) قید $\sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1$ را نیز دارد. لذا چون مدل (۴) یک قید کمتر از مدل (۳) دارد. لذا ناحیه شدنی مدل (۴) بزرگ‌تر یا مساوی ناحیه شدنی مدل (۳) است. بنابراین اگر یک واحد در مدل (۴) کارا باشد با توجه به اینکه مسأله کمینه‌سازی است و چون ناحیه مدل (۳) بخشی از مدل (۴) است مینیمم مقدار تابع هدف مدل (۳) برابر با ۱ است؛ بنابراین جواب آنبرابر با یک و کارا می‌باشد. ولی عکس آن لزوماً صحیح نیست.
به این ترتیب فرم خطی مدل (۳) بصورت زیر قابل ارایه است. با توجه به اینکه مدل های بیان شده (۳) و (۴) ساختاری غیر خطی دارند، به خطی‌سازی آنها می‌پردازیم. بر طبق آنچه در کاسمانن [۱۸] ارایه گردیده است، فرم خطی مدل (۳) به صورت زیر می‌باشد.

$$
\begin{aligned}
Min\ & \frac{1}{2}(\alpha+\phi) \\
s.t\ & \sum_{j=1}^{n}\delta_j v_j \geq v_0 \\
& \sum_{j=1}^{n}(\delta_j+\mu_j)\leq \alpha x_0 \\
& \sum_{j=1}^{n}\delta_j w_j=\phi w_0 \\
& \sum_{j=1}^{n}\delta_j+\mu_j=1 \\
& \delta_j,\mu_j\geq 0
\end{aligned}
\qquad (5)
$$

به همین ترتیب فرم خطی مدل (۴) نیز به صورت زیر قابل ارایه است.

$$
\begin{aligned}
Min\ & \frac{1}{2}(\alpha+\phi) \\
s.t\ & \sum_{j=1}^{n}\delta_j v_j \geq v_0 \\
& \sum_{j=1}^{n}(\delta_j+\mu_j)\leq \alpha x_0 \\
& \sum_{j=1}^{n}\delta_j w_j=\phi w_0 \\
& \delta_j,\mu_j\geq 0
\end{aligned}
\qquad (6)
$$

مدل در ماهیت ورودی با حضور خروجی‌های نامطلوب تحت دسترسی‌پذیری ضعیف بصورت زیر می‌باشد. در مدل پیشنهادی زیر از رویکرد کاسمانن استفاده شده است.

$$
\begin{aligned}
Min\ & \eta \\
s.t\ & \sum_{j=1}^{n}\lambda_j x_{ij}\leq \eta\ x_{io} & i=1,\dots,m \\
& \sum_{j=1}^{n}\theta_j\lambda_j v_{rj}\geq v_{ro} & r=1,\dots,s \\
& \sum_{j=1}^{n}\theta_j\lambda_j w_{gj}=w_{go} & g=1,\dots,G \\
& \sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1 \\
& 0\leq\theta\leq 1\quad \lambda_j\geq 0 & j=1,\dots,n
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

با معرفی متغیرهای S_i^-, S_r^+ و با به کار بردن نمادهای فوق، مدل (۷) که غیرخطی بود به صورت زیر خطی می‌شود.

$$
\begin{aligned}
Min\ & \eta \\
st\ & \sum_{j=1}^{n}(\delta_j+\mu_j)x_{ij}+s_i^-=\eta x_{io} & i=1,..,m \\
& \sum_{j=1}^{n}\delta_j v_{rj}-s_r^+=v_{ro} & r=1,...,s \\
& \sum_{j=1}^{n}\delta_j w_{gj}=w_{go} & g=1,...,G \\
& \sum_{j=1}^{n}(\delta_j+\mu_j)=1\ ,\ \delta_j,\mu_j\geq 0 \\
& s_i^-\geq 0\ ,\ s_r^+\geq 0 & i=1,...,m\ ,\ r=1,...,s \\
& \delta_j,\mu_j\geq 0 & j=1,...,n
\end{aligned}
\qquad (8)
$$

۳- بیش‌ترین مقیاس بهره‌وری با خروجی‌های نامطلوب

در این بخش فرض کنیم که بالانویس * نشان‌دهنده جواب بهینه می‌باشد. در مدل‌های زیر، ورودی‌ها X_i و خروجی‌های مطلوب V_r و خروجی‌های نامطلوب W_g می‌باشد. در ادامه این بخش به تعریف MPSS می‌پردازیم و مدل‌هایی را برای برآورد MPSS پیشنهاد و قضیه‌ای را در مورد این مدل بیان می‌نماییم.

تعریف۲. DMU_p یک MPSS است اگر و فقط اگر در T_c تعریف شده (۱) و در T_v تعریف شده (۲) کارا باشد.

برای تعیین MPSS با خروجی نامطلوب مدل پیشنهادی به‌صورت زیر است. ساختار همه‌ی مدل‌های این بخش غیرخطی می‌باشد و همانند روش مطرح شده در بخش قبلی خطی می‌شود.

$$
\begin{aligned}
Max \quad & \frac{\beta}{\frac{۱}{۲}(\alpha+\phi)} \\
s.t \quad & \beta V_{\circ} \le \sum_{j=۱}^{n} \theta_j \lambda_j V_j \\
& \alpha x_{\circ} \ge \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j x_j \\
& \phi W_{\circ} = \sum_{j=۱}^{n} \theta_j \lambda_j W_j \\
& ۱ = \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j \\
& \alpha,\beta,\phi \ge \circ \qquad \lambda_j \ge \circ \quad j=۱,\ldots,n
\end{aligned} \tag{۹}
$$

قضیه ۱. DMU_k یک MPSS است اگر و فقط اگر دو شرط زیر برقرار باشد.

۱) $\dfrac{\beta_k^*}{\frac{۱}{۲}(\alpha_k^*+\phi_k^*)}=۱$

۲) همه متغیرهای کمکی در هر جواب بهینه صفر باشد.

اثبات: فرض کنید DMU_k یک MPSS باشد ثابت می‌کنیم شرط (۱) و (۲) برقرار است. با عبارت $(\alpha x,\beta v,\phi w)$ شروع می‌کنیم. (α,β,ϕ) اسکالرهایی هستند که انبساط یا انقباض شاخص‌ها را نشان می‌دهند. مدل (۹) را به کار می‌بریم.

$$
\begin{aligned}
\text{Max} \quad & \frac{\beta}{\frac{۱}{۲}(\alpha+\phi)} \\
s.t \quad & \beta v_{\circ} \le \sum_{j=۱}^{n} \theta_j \lambda_j v_j \\
& \alpha x_{\circ} \ge \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j x_j \\
& \phi w_{\circ} = \sum_{j=۱}^{n} \theta_j \lambda_j w_j \\
& \sum_{j=۱}^{n} \lambda_j = ۱ \\
& \alpha,\beta,\phi \ge \circ \ , \ \lambda_j \ge \circ \ , \ j=۱,\ldots,n
\end{aligned} \tag{۹}
$$

بر طبق آن چه که در قضیه کوپرو همکاران [۹] ارایه شده است، یک شرط لازم برای اینکه یک واحد DMU0 با بردارهای $w_{\circ},v_{\circ},x_{\circ}$ یک MPSS باشد این است که در مدل (۹)، $\text{Max} \ \frac{\beta}{\frac{۱}{۲}(\alpha+\phi)}=\frac{\beta^*}{\frac{۱}{۲}(\alpha^*+\phi^*)}=۱$ که در آن $\beta^*=\frac{۱}{۲}(\alpha^*+\phi^*)$ و بازده به مقیاس ثابت خواهد بود.

بنابراین متغیرهای کمکی غیرصفر در جواب بهینه مدل (۹) با توجه به MPSS بودن DMU_k و شرط اول قضیه ($\frac{\beta^*}{\frac{۱}{۲}(\alpha^*+\phi^*)}=۱$) باعث تضاد بودن با MPSS می‌شود لذا شرط (۱) و (۲) برقرار است.

برعکس: فرض کنید دو شرط (۱) و (۲) برقرار باشد ثابت می کنیم DMU_k یک MPSS است. به عبارت دیگر DMU_k روی مرز T_v و T_c است.چون شرط $\frac{\beta^*}{\frac{۱}{۲}(\alpha^*+\phi^*)}=۱$ برقرار است لذا

$$۲\beta^*=\alpha^*+\phi^* .$$

با به کار بردن قضیه بالا و استفاده از مدل (۹) داریم:

$$\text{Max} \quad \frac{\beta}{\frac{1}{2}(\alpha+\phi)}=\frac{\beta^*}{\frac{1}{2}(\alpha^*+\phi^*)}=\frac{\frac{1}{2}(\alpha^*+\phi^*)}{\frac{1}{2}(\alpha^*+\phi^*)}=1$$

که در آن $\beta^*=\frac{1}{2}(\alpha^*+\phi^*)$ است. لذا شرط لازم برای یک MPSS را دارد و بازده به مقیاس ثابت خواهد بود.

مدل (۹) غیرخطی می‌باشد که با استفاده از نمادهای بخش ۱ بصورت زیر خطی شده است.

$$\begin{aligned}
&Max \quad \frac{\beta}{\frac{1}{2}(\alpha+\phi)}\\
&s.t \quad \beta V_0 \le \sum_{j=1}^{n} \delta_j V_j\\
&\qquad \alpha X_0 \ge \sum_{j=1}^{n} (\delta+\mu)_j X_j\\
&\qquad \phi W_0 = \sum_{j=1}^{n} \delta_j W_j \qquad\qquad (10)\\
&\qquad 1=\sum_{j=1}^{n} (\delta_j+\mu_j)\\
&\qquad \delta_j, \mu_j \ge 0 \qquad j=1,\dots,n\\
&\qquad \alpha,\beta,\phi \ge 0
\end{aligned}$$

در این قسمت مدلی با تابع هدف خطی برای تعیین MPSS معرفی می‌کنیم. مدل (۱۱) مشکلاتی که مدل (۱۰) با تابع هدف کسری داشت را برطرف می‌نماید و چون تابع هدف مدل زیر خطی است و نیازی به مقیاس داده‌ها نیست، لذا می‌توان از این مدل جهت تعیین MPSS، DMUs استفاده نمود.فرض می‌کنیم جهت خروجی‌های مطلوب و نامطلوب وورودی مدل (۱۰) در زمان یکسان در نظر گرفته شوند و ضریب بردار ورودی مصرف شده و خروجی‌های مطلوب و نامطلوب در مدل (۱۰) به ترتیب ϕ,β,α باشند و در مدل (۱۱) نیز ضرایب را بترتیب γ_0,ξ_0,κ_0 در نظر می‌گیریم. θ نیز در این پژوهش فاکتور انقباض می‌باشد.

در این قسمت ثابت می‌کنیم با استفاده از مدل زیر می‌توان MPSS، واحدها را تخمین زد.

$$\begin{aligned}
&Max \quad \xi_0-\frac{(\kappa_0+\gamma_0)}{2}\\
&s.t \quad \xi_0 V_0 \le \sum_{j=1}^{n} \theta_j \lambda_j V_j\\
&\qquad \kappa_0 x_0 \ge \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \qquad\qquad (11)\\
&\qquad \gamma_0 W_0 = \sum_{j=1}^{n} \theta_j \lambda_j W_j\\
&\qquad 1=\sum_{j=1}^{n} \lambda_j\\
&\qquad \lambda_j \ge 0 \qquad j=1,\dots,n
\end{aligned}$$

قضیه۲. مدل (۱۱) همواره شدنی است.

اثبات: مقدار بهینه تابع هدف مدل (۱۱) نامنفی است. زیرا

$$\xi_0=1\ ,\ (\kappa_0+\gamma_0)=2\ ,\ \lambda_0=1\ ,\ \lambda_j=0\ (j\neq 0)$$

یک جواب شدنی است. از این جواب شدنی نتیجه می‌شود که مقدار بهینه تابع هدف صفر است. بنابراین واضح است که مقدار بهینه تابع هدف در جایی که $\xi_0^* \ge \frac{(\kappa_0^*+\gamma_0^*)}{2}$ باشد، نامنفی است.

یک مشکل فرمول‌بندی (۱۱) غیرخطی بودن آن است که می‌توان با استفاده از نمادگذاری بخش (۲-۱) بصورت زیر خطی نمود.

$$\begin{aligned}
&Max \quad \xi_0-\frac{1}{2}(\kappa_0+\gamma_0)\\
&s.t \quad \xi_0 V_0 \le \sum_{j=1}^{n} \delta_j V_j\\
&\qquad \kappa_0 x_0 \ge \sum_{j=1}^{n} (\delta_j+\mu_j)\ x_j \qquad\qquad (12)\\
&\qquad \gamma_0 W_0 = \sum_{j=1}^{n} \delta_j W_j\\
&\qquad \sum_{j=1}^{n} (\delta_j+\mu_j) = 1\\
&\qquad \delta_j, \mu_j \ge 0 \qquad j=1,\dots,n
\end{aligned}$$

ملاحظه می‌شود که مدل (۱۲) بر حسب متغیرهای δ و μ خطی است.

قضیه۳: DMU_0، MPSS است اگر و فقط اگر ۲ شرط زیر برای مدل (۱۱) صدق کند.
۱) مقدار بهینه تابع هدف صفر باشد.
۲) مقادیر تمام متغیرهای کمکی در هر جواب‌های بهینه صفر باشند.

اثبات: فرض کنیم DMU_0، MPSS باشد. اگر $(\xi_0^*,\kappa_0^*,\gamma_0^*,\lambda_0^*)$ جواب بهینه مدل (۱۱) باشد که در آن مقدار تابع هدف صفر نیست، چون $\alpha=\kappa_\circ^*, \beta=\xi_\circ^*, \phi=\gamma_\circ^*, \lambda^*$ در مدل (۴) که در آن مقدار تابع هدف بزرگتر از ۱ است صدق می‌کنند، لذا با MPSS بودن DMU_0 در تناقض خواهد بود. بنابراین مقدار تابع هدف برای مدل (۱۱) صفر است ودر سایر جاها داریم:

$$\phi=\gamma_\circ^*, \beta=\xi_\circ^* \; \xi_\circ^*=\frac{1}{2}(\kappa_\circ^*+\gamma_\circ^*)$$

بنابراین متغیرهای کمکی غیرصفر در جواب بهینه مدل (۱۱) باعث خواهند شد که متغیرهای کمکی غیرصفر در جواب بهینه مدل (۹) نیز یکسان باشند که با MPSS بودن DMU_0 در تناقض است.

برعکس: فرض کنیم شرایط (۱) و (۲) در قضیه ۲ صدق کنند. ثابت می‌کنیم که در این حالت DMU_0، MPSS است.

اگر $\dfrac{\beta^*}{\frac{1}{2}(\alpha_\circ^*+\phi_\circ^*)}>1$ باشد آنگاه با تعاریف زیر

$$\beta_\circ^*=\xi_\circ$$
$$\alpha_\circ^*=\kappa_\circ$$
$$\gamma_\circ=\phi_\circ^* \quad , \quad \lambda=\lambda^*$$

می‌خواهیم یک جواب برای مدل (۱۱) داشته باشیم که باعث می‌شود مقدار بهینه تابع هدف بزرگتر از صفر باشد که با شرط (۱) در تناقض است. بنابراین باید $\dfrac{\beta_\circ^*}{\frac{1}{2}(\alpha_\circ^*+\phi_\circ^*)}=1$ باشد و در سایر جاها:

$$\beta_\circ^*=\frac{1}{2}(\alpha_\circ^*+\phi_\circ^*)$$

اکنون اگر بعضی متغیرهای کمکی در جواب بهینه مدل (۹) غیرصفر باشند، با تعریف

$$\beta_\circ^*=\xi_\circ$$
$$\alpha_\circ^*=\kappa_\circ$$
$$\gamma_\circ=\phi_\circ^* \quad , \quad \lambda=\lambda^*$$

جواب یکسان صدق شده در مدل (۱۱) به‌عنوان جواب بهینه است زمانی که متغیرهای کمکی غیرصفر باشند و همچنین با شرط (۲) قضیه در تناقض است. بنابراین اثبات کامل است.

توجه کنید که با استفاده از مدل‌های (۹) و (۱۱) می‌توان فرم‌های غیر ارشمیدسی را برای تعیین MPSS، به‌صورت زیربه کار برد. مدل (۱۱) غیر ارشمیدوسی به‌صورت زیر تعریف شده است:

$$\begin{aligned}
Max \quad & \xi_\circ-\frac{1}{2}(\kappa_\circ+\gamma_\circ)+\varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m}s_i^-+\sum_{r=1}^{s}s_r^+\right) \\
st \quad & \sum_{j=1}^{m}\lambda_j x_{ij}+s_i^-=\kappa_\circ x_{i\circ} && i=1,\dots,m \\
& \sum_{j=1}^{n}\lambda_j v_{rj}-s_r^-=\xi_\circ v_{r\circ} && r=1,\dots,s \qquad (13) \\
& \sum_{j=1}^{n}\lambda_j w_{gj}=\gamma_\circ w_{g\circ} && g=1,\dots,G \\
& \sum_{j=1}^{n}\lambda_j=1 \\
& \lambda_j\geq 0 && j=1,\dots,n
\end{aligned}$$

مدل (۱۳) را می‌توان در دو گام حل نمود به طوری که در گام اول ماکزیمم $\xi_\circ-\frac{1}{2}(\kappa_\circ+\gamma_\circ)$ را بدون توجه به متغیرهای کمکی به‌دست می‌آوریم و سپس

در گام دوم متغیرهای کمکی را با ثابت نگه داشتن مقادیر $\xi_0^*, \kappa_0^*, \gamma_0^*$ به جای $\xi_0, \kappa_0, \gamma_0$، ماکزیمم می‌نماییم. بنابراین در این رویکرد ضروری نیست که هر مقداری را برای ε اختصاص دهیم.

نکته: برای DMU_0 با ترکیب ورودی، خروجی‌های مطلوب و نامطلوب (x_o, v_o, w_o)، DMU مجازی با ترکیب ورودی و خروجی‌های مطلوبو نامطلوب $(\kappa_0^* x_0 - s^{*-}, \zeta_0^* v_0 + s^{+*}, \gamma_0^* w_0)$، MPSS است.

فرم برداری نوشته شده مدل (۱۳) را می‌توان با استفاده از تغییر متغیرهای زیر خطی نمود. فرض کنید وزن‌های DMU_k به دو قسمت $\lambda = \delta + \mu$ تجزیه شده باشد که مولفه‌های اول و دوم به ترتیب δ و μ می‌باشند و مولفه اول نشان‌دهندهٔ قسمتی از خروجی است که فعال باقی می‌ماند و مولفه دوم قسمتی از خروجی می‌باشد که سطح فعالیت را کم می‌کند.

$$\delta = \theta\lambda$$
$$\theta = \frac{\delta}{\delta+\mu}$$
$$\mu = (1-\theta)\lambda$$

با جایگذاری در مدل (۱۳) به‌صورت زیر خطی می‌شود.

$$\begin{array}{lll}
Max & \xi_0 - \frac{1}{2}(\kappa_0+\gamma_0) + \varepsilon\left(\sum_{i=1}^{m} s_i^- + \sum_{r=1}^{s} s_r^+\right) & \\
st & \sum_{j=1}^{m}(\delta_j+\mu_j)x_{ij} + s_i^- - \kappa_0 x_{io} = 0 & i=1,\dots,m \\
 & \sum_{j=1}^{n}\delta_j v_{rj} - s_r^+ - \xi_0 v_{ro} = 0 & r=1,\dots,s \\
 & \sum_{j=1}^{n}\delta_j w_{gj} - \gamma_0 w_{go} = 0 & g=1,\dots,G \\
 & \sum_{j=1}^{n}(\delta_j+\mu_j) = 1 & \delta_j,\mu_j \ge 0 \\
 & s_i^- \ge 0 \ , \ s_r^+ \ge 0 & i=1,\dots,m \ , \ r=1,\dots,s \\
 & \delta_j,\mu_j \ge 0 & j=1,\dots,n
\end{array} \qquad (۱۴)$$

تعریف ۳: برای یک $\begin{pmatrix} X_p \\ Y_p \end{pmatrix} \in T$ بزرگترین MPSS متناظر نقطه‌ای مانند $\begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{pmatrix} \in T$ است به طوری که:

$$\begin{pmatrix} \bar{X} \\ \bar{Y} \end{pmatrix} = \frac{\bar{\alpha}}{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^*}\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^* X_j \\ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^* Y_j \end{pmatrix}$$

به طوری که λ^* جواب بهینه مدل CCR فرم پوششی متناظر DMUp است و

$$\bar{\alpha} = Max\left\{\alpha \left| \frac{\alpha}{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^*}\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^* X_j \\ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^* Y_j \end{pmatrix} \in T_v, \alpha \ge 0 \right.\right\}،$$

به همین ترتیب کوچک‌ترین MPSS متناظر به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\bar{\alpha} = Min\left\{\alpha \left| \frac{\alpha}{\sum_{j=1}^{n}\lambda_j^*}\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^* X_j \\ \sum_{j=1}^{n}\lambda_j^* Y_j \end{pmatrix} \in T_v, \alpha \ge 0 \right.\right\}$$

قضیه۳: اگر (x_0, v_0, w_0)، MPSS باشد، آنگاه برای $(\alpha x_0, \alpha v_0, \alpha w_0) \in T_v, \alpha > 0$ نیز MPSS است.

نتیجه ۱: الف): اگر $(X_o, V_o, W_o) \in T$، MPSS باشد بزرگترین MPSS متناظر با DMU_o را می‌توان با استفاده از حل مدل زیر به‌دست آورد.

$$\begin{array}{lll}
Max & \alpha & \\
st & \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j \le \alpha x_{io} & i=1,\dots,m \\
 & \sum_{j=1}^{n} v_{rj}\theta_j\lambda_j \ge \alpha v_{ro} & r=1,\dots,s \\
 & \sum_{j=1}^{n} w_{gj}\theta_j\lambda_j = \alpha w_{go} & g=1,\dots,G \\
 & \sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1 & \\
 & \lambda_j, \alpha \ge 0 & j=1,\dots,n
\end{array} \qquad (۱۵)$$

مدل (۱۵) غیرخطی است که با استفاده از تغییر متغیر بیان شده در بخش (۲-۱) بصورت زیر خطی شده است.

$$
\begin{aligned}
&Max\ \alpha \\
&st\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij}(\delta_j+\mu_j)\le \alpha x_{io} && i=1,\dots,M \\
&\sum_{j=1}^{n} V_{rj}\delta_j \ge \alpha V_{ro} && r=1,\dots,S \qquad (16)\\
&\sum_{j=1}^{n} W_{gj}\delta_j = \alpha W_{go} && g=1,\dots,G \\
&\sum_{j=1}^{n}(\delta_j+\mu_j)=1 \\
&\alpha,\delta_j,\mu_j\ge 0 && j=1,\dots,n
\end{aligned}
$$

بنابراین اگر α^* مقدار بهینه تابع هدف (۱۶) باشد، $(\alpha^* x_\circ,\alpha^* v_\circ,\alpha^* w_\circ)$ بزرگترین MPSS متناظر با DMU0 است.

ب) اگر در مدل (۱۵) به جای استفاده از ماکزیمم تابع هدف از مینیمم تابع هدف استفاده نماییم می‌توانیم کوچکترین MPSS متناظر با DMU_0 را به‌دست آوریم.

$$
\begin{aligned}
&Min\ \ \alpha \\
&st\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\lambda_j \le \alpha x_{io} && i=1,\dots,m \\
&\sum_{j=1}^{n} v_{rj}\theta_j\lambda_j \ge \alpha v_{ro} && r=1,\dots,s \qquad (17)\\
&\sum_{j=1}^{n} w_{gj}\theta_j\lambda_j = \alpha w_{go} && g=1,\dots,G \\
&\sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1 \\
&\lambda_j,\alpha\ge 0 && j=1,\dots,n
\end{aligned}
$$

اگر α_* مقدار بهینه تابع هدف (۱۷) باشد. آنگاه کوچکترین MPSS متناظر با DMU_0 به صورت $(\alpha_* x_\circ,\alpha_* v_\circ,\alpha_* w_\circ)$ می‌باشد.

مدل(۱۷) غیرخطی می‌باشد لذا می‌توان به‌صورت زیر خطی نمود.

$$
\begin{aligned}
&\text{Min}\ \ \alpha \\
&st\ \sum_{j=1}^{n} x_{ij}(\delta_j+\mu_j)\le \alpha x_{io} && i=1,\dots,M \\
&\sum_{j=1}^{n} V_{rj}\delta_j \ge \alpha V_{ro} && r=1,\dots,S \qquad (18)\\
&\sum_{j=1}^{n} W_{gj}\delta_j = \alpha W_{go} && g=1,\dots,G \\
&\sum_{j=1}^{n}(\delta_j+\mu_j)=1 \\
&\delta_j,\mu_j,\alpha\ge 0 && j=1,\dots,n
\end{aligned}
$$

ج) به وضوح به ازای $0\le\lambda\le 1$، $\lambda\alpha_*(\mathrm{x}_\circ,\mathrm{v}_\circ,\mathrm{w}_\circ)+(1-\lambda)\alpha^*(\mathrm{x}_\circ,\mathrm{v}_\circ,\mathrm{w}_\circ)$ نیز MPSS است.

با توجه به مدل‌های طراحی‌شده و قضایای مطرح شده، الگوریتم یافتن بزرگترین و کوچکترین MPSS متناظر DMUp به شرح ذیل است. در گام اول، تمامی واحدهای تصمیم گیرنده را با مدل CCR اجرا می‌کنیم. بعد از به دست آوردن مقادیر بهینه در گام اول، نقاط تصویر متناظر هر واحد تصمیم‌گیرنده را در گام دوم حساب می‌کنیم. در گام سوم با استفاده از حل مدل‌های (۱۶) و (۱۸) بزرگترین و کوچکترین MPSS متناظر هر واحد تصمیم‌گیرنده را پیدا می‌کنیم. بیان ریاضی الگوریتم فوق به شرح ذیل می‌باشد:

گام ۱: $DMU_P=(X_P,V_P,W_P)$ را توسط مدل ذیل حل می‌کنیم.

$$
\begin{aligned}
&Min\ \eta \\
&st\ \sum_{j=1}^{n}(\delta_j+\mu_j)x_{ij}+s_i^-=\eta x_{ip} && i=1,\dots,M \\
&\sum_{j=1}^{n}\delta_j V_{rj}-s_r^-=V_{rp} && r=1,\dots,S \qquad (19)\\
&\sum_{j=1}^{n}\delta_j W_{gj}=W_{gp} && g=1,\dots,G \\
&\delta_j\ge 0\ ,\ \mu_j\ge 0 && j=1,\dots,\mathrm{n}
\end{aligned}
$$

گام ۲: با فرض اینکه (δ^*,μ^*,η^*) بهینه مسأله گام (۱) است. نقطه تصویر DMUp را با فرض بازده به

مقیاس ثابت متناظر θ از رابطه ذیل محاسبه می‌نماییم:

$$=\left(\sum_{j=1}^{n}(\delta_j^*+\mu_j^*)X_j\ ,\ \sum_{j=1}^{n}\delta_j^*V_j\ ,\ \sum_{j=1}^{n}\delta_j^*W_j\right)=(\bar{X}_P,\bar{V}_P,\bar{W}_P)$$

تصویر DMUp.

گام۳: نقطه تصویر یافته‌شده در گام (۲) را توسط مدل‌های (۱۶) و (۱۸) جهت یافتن ماکزیمم MPSS و مینیمم MPSS متناظر DMUp حل می‌کنیم.

۴- کاربرد بیشترین مقیاس بهره‌وری تولید صنعت چین در ۲۰۱۰

در این بخش مدل‌های پیشنهاد شده به منظور تحلیل عملکرد صنعت چین از ۳۱ ناحیه استفاده شده است. مجموعهداده‌ها برگرفته از [۲۲] است که در جدول ۱ نمایش داده شده است. این داده‌ها از دو ورودی X_1 و X_2 تشکیل شده استکه X_1 سرمایه گذاری نهایی در دارایی‌های ثابت شده صنعتی (TIFA) و X_2 مصرف الکتریسیته بوسیله صنعت (EC) می‌باشد و یک خروجی مطلوب V_1^D که مقدار خروجی صنعتی ناخالص (GIOV) را نشان می‌دهدو دو خروجی نامطلوب W_1^{UD} و W_2^{UD} می‌باشد که W_1^{UD} توده‌ی کلی ضایعات صنعتی انتشار گاز (TWGE) و W_2^{UD} توده‌ی کلی ضایعات تخلیه آب (TWWD) است. صنایع چین از ۱ تا ۳۱ شماره‌گذاری شده است که در ستون ۱ جدول داده‌ها نشان داده شده است.در جدول ۲ نتایج نقاط تصویر ۳۱ واحد صنعت چین نمایش داده شده است. جدول ۳، نتایج BCC وروش ارائه شده برای ارزیابی بیشترین مقیاس بهره‌وری با حضور خروجی‌های نامطلوب را نشان می‌دهد. ستون سوم جدول ۳ نتایجی که با استفاده از مدل (۷) محاسبه شده است را نشان می‌دهد. صنایع با شماره‌های ۲،۶،۱۶،۲۰،۲۴،۲۷،۲۸ به‌عنوان صنایع کارای محیطی تشخیص داده شده است و MPSS هستند. از این‌رو این هفت صنایع به کاهش آلاینده‌ها توجه دارند. بعضی صنایع مانند صنایع شماره‌ی۱۰و ۳۱ در کنترل آلاینده‌ها و ضایعات ناتوان هستند. به‌عنوان یک نتیجه، این صنایع باید بطور جدی درباره آلاینده‌ها و ضایعات نگران باشند. بطور ویژه آنها باید توجه ویژه‌ای به عوامل زیست محیطی داشته باشند. ستون چهارم جدول ۳ نتایجی را نشان می‌دهد که از حل مدل (۱۳) بدست آمده است. در این ستون نیز ۲،۶،۱۶،۲۰،۲۴،۲۷،۲۸صنایع کارای محیطی محسوب می‌شوند و توجه زیادی به عوامل زیست محیطی داشته‌اند. در حقیقت در ستون چهارم بعد از حل دو گام نتایج غیرارشمیدوسی ۷ واحد بدست می‌آید و بیانگر این است که DMU_k روی مرز کارا قرار دارند. اما به‌عنوان مثال صنایع با شماره‌های ۹ و ۳۱ توانایی کنترل با عوامل محیطی را ندارند. برای یافتن بزرگترین MPSS و کوچکترین MPSS متناظر DMU_p از الگوریتمی که در بخش ۳ معرفی نمودیم، استفاده می‌نماییم.بزرگترین MPSS متناظر هر DMU، لزوماً یک DMU نیست، نقطه‌ای از MPSS است. لذا با توجه به داده‌های صنعت چین برای نقاط کارا و کارای ضعیف و ناکارا گام‌های۲،۱و ۳ را اجرا می‌نماییم و بزرگترین و کوچکترین MPSS متناظر را با حل مدل‌های ۱۶ و ۱۸بدست می‌آوریم که نتایج مدل‌ها در جدول ۴ نمایش داده شده است. نتایج نشان می‌دهد که بزرگترین و کوچکترین MPSS متناظر صنایع با شماره‌های ۱، ۲، ۳، ۶، ۷، ۸، ۱۰، ۱۱، ۱۵، ۱۷، ۱۸، ۲۰، ۲۲، ۲۳، ۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸، ۳۱ باهم یکی است. به عبارتی بزرگترین و کوچکترین MPSS متناظر هر DMU همان داده‌های ورودی و خروجی مطلوب و نامطلوب می‌شود. نتایج سایر واحدها بعد از اجرای گام ۱، ۲و ۳ در جدول ۴ نشان داده شده است.

جدول ۱: مجموعه داده‌ها

DMU	ناحیه	X1 TIFA	X2 EC	V_1^D GIOV	W_1^{UD} *TWGE*	W_2^{UD} *TWWD*
۱	Anhui	۹,۱۲۱.۸۲۹	۱۰۷۷.۹۱	۱۸,۷۳۲	۱۴,۸۴۹	۷۰,۹۷۱
۲	Beijing	۴,۵۵۴.۳۵۶	۸۰۹.۹	۱۳,۶۹۹.۸۴	۴,۷۵۰	۸,۱۹۸
۳	Chongqing	۵,۰۴۹.۲۵۸	۶۲۶.۴۴	۹,۱۴۳.۵۵	۱۰,۹۴۳	۴۵,۱۸۰
۴	Fujian	۶,۵۳۴.۸۰۳	۱۳۱۵.۰۹	۲۱,۹۰۱.۲۳	۱۳,۵۰۷	۱۲۴,۱۶۸
۵	Gansu	۷,۲۷۴.۳۰۶	۸۰۴.۴۳	۴,۸۸۲.۶۸	۶,۲۵۲	۱۵,۳۵۲
۶	Guangdong	۱۱,۹۰۳.۳۶	۴۰۶۰.۱۳	۸۵,۸۲۴.۶۴	۲۴,۰۹۲	۱۸۷,۰۳۱
۷	Guangxi	۶,۱۶۶.۱۳۵	۹۹۳.۲۴	۹,۶۴۴.۱۳	۱۴,۵۲۰	۱۶۵,۲۱۱
۸	Guizhou	۲,۴۸۳.۰۱۲	۸۳۵.۳۸	۴,۲۰۶.۳۷	۱۰,۱۹۲	۱۴,۱۳۰
۹	Hainan	۹۰۳.۸۲۶۴	۱۵۹.۰۲	۱,۳۸۱.۲۵	۱,۳۶۰	۵,۷۸۲
۱۰	Hebei	۱۱,۷۳۷.۰۴	۲۶۹۱.۵۲	۳۱,۱۴۳.۲۹	۵۶,۳۲۴	۱۱۴,۲۳۲
۱۱	Heilongjiang	۵,۰۱۴.۰۸۵	۷۴۷.۸۴	۹,۵۳۵.۱۵	۱۰,۱۱۱	۳۸,۹۲۱
۱۲	Henan	۱۲,۸۶۸.۲۴	۲۳۵۳.۹۶	۳۴,۹۹۵.۵۳	۲۲,۷۰۹	۱۵۰,۴۰۶
۱۳	hubei	۷,۲۷۶.۶۳۸	۱۳۳۰.۴۴	۲۱,۶۲۳.۱۲	۱۳,۸۶۵	۹۴,۵۹۳
۱۴	Hunan	۷,۳۷۴.۱۵۷	۱۱۷۱.۹۱	۱۹,۰۰۸.۸۳	۱۴,۶۷۳	۹۵,۶۰۵
۱۵	Inner Mngolia	۶,۸۳۱.۴۱۶	۱۵۳۶.۸۳	۱۳,۴۰۶.۱۱	۲۷,۴۸۸	۳۹,۵۳۶
۱۶	Jiangsu	۱۸,۹۷۷.۹۲	۳۸۶۴.۳۷	۹۲,۰۵۶.۴۸	۳۱,۲۱۳	۲۶۳,۷۶۰
۱۷	Jiangxi	۶,۶۹۶.۱۴۹	۷۰۰.۵۱	۱۳,۸۸۳.۰۶	۹,۸۱۲	۷۲,۵۲۶
۱۸	Jilin	۶,۳۱۳.۷۴۸	۵۷۶.۹۸	۱۳,۰۹۸.۳۵	۸,۲۴۰	۳۸,۶۵۶
۱۹	Liaoning	۱۲,۴۸۰.۹۴	۱۷۱۵.۲۶	۳۶,۲۱۹.۴۲	۲۶,۹۵۵	۷۱,۵۲۱
۲۰	Ningxia	۱,۱۷۳.۷۰۲	۵۴۶.۷۷	۱,۹۲۱.۳۹	۱۶,۳۲۴	۲۱,۹۷۷
۲۱	Qinghai	۷۸۹.۵۰۵۱	۴۶۵.۱۸۸	۱,۴۸۰.۹۹	۳,۹۵۲	۹,۰۳۱
۲۲	Shaanxi	۵,۴۶۲.۷۸۴	۸۵۹.۲۲	۱۱,۱۹۹.۸۴	۱۳,۵۱۰	۴۵,۴۸۷
۲۳	Shandong	۱۷,۶۶۴.۳۴	۳۲۹۸.۴۶	۸۳,۸۵۱.۴	۴۳,۸۳۷	۲۰۸,۲۶۷
۲۴	Shanghai	۴,۲۵۲.۳۲	۱۲۹۵.۸۷	۳۰,۱۱۴.۴۱	۱۲,۹۶۹	۳۶,۶۹۶
۲۵	Shanxi	۴,۷۰۲.۰۹۱	۱۴۶۰	۱۲,۴۷۱.۳۳	۳۵,۱۹۰	۴۹,۸۸۱
۲۶	Sichuan	۹,۷۹۰.۲۷۴	۱۵۴۸.۰۳	۲۳,۱۴۷.۳۸	۲۰,۱۰۷	۹۳,۴۴۴
۲۷	Tianjin	۴,۵۷۱.۸۸۸	۶۴۵.۷۴	۱۶,۷۵۱.۸۲	۷,۶۸۶	۱۹,۶۸۰
۲۸	Tibet	۳۰۶.۵۶۷	۲۰.۴۱	۶۲.۲۲	۱۶	۷۳۶
۲۹	Xinjiang	۲,۷۴۹.۸۳۸	۶۶۱.۹۶	۵,۳۴۱.۹	۹,۶۱۰	۲۵,۴۱۳
۳۰	Yunnan	۴,۰۲۴.۹۷۲	۱۰۰۴.۰۴	۶,۴۶۴.۶۳	۱۰,۹۷۸	۳۰,۹۳۶
۳۱	zhejiang	۱۰,۲۴۶.۴۱	۲۸۲۰.۹۳	۵۱,۳۹۴.۲	۲۰,۴۳۴	۲۱۷,۴۲۶

جدول ۲:نتایج گام ۲ (نقاط تصویر)

DMU	Z	X۱ تصویر	X۲ تصویر	V۱ تصویر	W۱ تصویر	W۲ تصویر
۱	۱.۰۰۰۰۰۰۰	۹۱۲۱.۸۳	۱۰۷۷.۹۱	۲۹۷۳۲.۰۰	۱۷۸۴۹.۰۰	۷۰۹۷۱.۰۰
۲	۱.۰۰۰۰۰۰۰	۴۵۵۴.۳۶	۸۰۹.۹۰	۱۳۶۹۹.۸۴	۴۷۵۰.۰۰	۸۱۹۸.۰۰
۳	۰.۸۷۹۱۷۵	۳۳۹۲.۲۴	۵۵۰.۷۵	۹۱۴۳.۵۵	۱۰۹۴۳.۰۰	۴۵۱۸۰.۰۰
۴	۰.۹۳۸۸۴۲	۶۱۳۵.۱۵	۱۲۳۴.۶۶	۲۱۹۰۱.۲۳	۱۳۵۰۷.۰۰	۱۲۴۱۶۸.۰۰
۵	۰.۴۴۰۷۷۰	۱۰۰۲.۴۵	۳۵۴.۵۷	۴۸۸۲.۶۸	۶۲۵۲.۰۰	۱۵۳۵۲.۰۰
۶	۱.۰۰۰۰۰۰۰	۱۱۹۰۳.۳۶	۴۰۶۰.۱۳	۸۵۸۲۴.۶۴	۲۴۰۹۲.۰۰	۱۸۷۰۳۱.۰۰
۷	۱.۰۰۰۰۰۰۰	۶۱۶۶.۱۳	۹۹۳.۲۴	۹۶۴۴.۳۱	۱۴۵۲۰.۰۰	۱۶۵۲۱۱.۰۰
۸	۱.۰۰۰۰۰۰۰	۲۴۸۳.۰۱	۸۳۵.۳۸	۴۲۰۶.۳۷	۱۰۱۹۲.۰۰	۱۴۱۳۰.۰۰
۹	۰.۴۷۱۹۲۵	۴۲۶.۵۴	۷۵.۰۵	۱۳۸۱.۲۵	۱۳۶۰.۰۰	۵۷۸۲.۰۰
۱۰	۰.۷۵۰۵۸۱	۵۴۶۴.۴۵	۲۰۲۰.۲۰	۸۷۳۱.۲۵	۴۵۳۲۴.۰۰	۱۱۴۲۳۲.۰۰
۱۱	۰.۶۸۸۲۷۷	۳۳۴۰.۷۵	۵۱۴.۷۲	۹۵۳۵.۱۵	۱۰۱۱۱.۰۰	۳۸۹۲۱.۰۰
۱۲	۰.۷۱۱۹۴۵	۹۱۶۱.۴۸	۱۶۷۵.۸۹	۳۴۹۹۵.۵۳	۲۲۷۰۹.۰۰	۱۵۰۴۰۶.۰۰
۱۳	۰.۷۸۱۴۰۸	۵۶۸۶.۰۲	۱۰۳۹.۶۲	۲۱۶۲۳.۱۲	۱۳۸۶۵.۰۰	۹۴۵۹۳.۰۰
۱۴	۰.۸۲۵۱۶۲	۶۰۸۴.۸۷	۹۶۷.۰۲	۱۹۰۰۸.۸۳	۱۴۶۷۳.۰۰	۹۵۶۰۵.۰۰
۱۵	۰.۸۵۹۱۹۱	۴۸۴۹.۹۳	۱۳۲۰.۴۳	۱۳۴۰۶.۱۱	۲۷۴۸۸.۰۰	۳۹۵۳۶.۰۰
۱۶	۱.۰۰۰۰۰۰۰	۱۸۹۷۷.۹۲	۳۸۶۴.۳۷	۹۲۰۵۶.۴۸	۳۱۲۱۳.۰۰	۲۶۳۷۶۰.۰۰
۱۷	۰.۹۸۹۴۴۷	۴۷۸۷.۰۷	۶۹۳.۱۲	۱۳۸۸۳.۰۶	۹۸۱۲.۰۰	۷۳۵۲۶.۰۰
۱۸	۰.۸۸۲۶۳۶	۴۱۵۵.۷۴	۵۰۹.۲۶	۱۳۰۹۸.۳۵	۸۲۴۰.۰۰	۰.۸۸۲۶۳۶
۱۹	۰.۹۳۹۳۶۵	۱۰۷۵۶.۸۷	۱۶۱۱.۲۶	۳۶۲۱۹.۴۲	۲۶۹۵۵.۰۰	۰.۹۳۹۳۶۵
۲۰	۱.۰۰۰۰۰۰۰	۱۱۹۳.۷۰	۵۴۶.۷۷	۱۹۲۴.۳۹	۱۶۳۲۴.۰۰	۱.۰۰۰۰۰۰۰
۲۱	۰.۵۹۶۰۵۵	۴۷۰.۵۹	۱۷۴.۹۳	۱۴۸۱.۹۹	۳۹۵۰.۰۰	۰.۵۹۶۰۵۵
۲۲	۰.۷۵۶۶۰۸	۳۹۴۳.۵۱	۶۵۰.۰۹	۱۱۱۹۹.۸۴	۱۳۵۱۰.۰۰	۴۵۴۸۷.۰۰
۲۳	۱.۰۰۰۰۰۰۰	۱۷۶۶۴.۳۴	۳۲۹۸.۴۶	۸۳۸۵۱.۴۰	۴۳۸۳۷.۰۰	۲۰۸۲۵۷.۰۰
۲۴	۱.۰۰۰۰۰۰۰	۴۲۵۲.۳۲	۱۲۹۵.۸۷	۳۰۱۱۴.۴۱	۱۲۹۶۸.۰۰	۳۶۶۹۶.۰۰
۲۵	۱.۰۰۰۰۰۰۰	۴۷۰۲.۰۹	۱۴۶۰.۰۰	۱۲۴۷۱.۳۰	۳۵۱۹۰.۰۰	۴۹۸۸۱.۰۰
۲۶	۰.۷۴۷۵۹۵	۷۳۱۶.۲۲	۱۱۵۷.۵۸	۲۳۱۴۷.۳۸	۲۰۱۰۷.۰۰	۹۳۴۴۴.۰۰
۲۷	۰.۰۰۰۰۰۰۰	۴۵۷۱.۸۹	۶۴۵.۷۴	۱۶۷۵۱.۸۲	۷۶۸۶.۰۰	۱۹۶۸۰.۰۰
۲۸	۰.۰۰۰۰۰۰۰	۳۰۶۵۷	۲۰.۴۱	۶۲.۲۲	۱۶.۰۰	۷۳۶.۰۰
۲۹	۰.۶۲۷۹۹۵	۱۷۲۶.۸۹	۴۱۵.۷۱	۵۳۴۱.۹۰	۹۳۱۰.۰۰	۲۵۴۱۳.۰۰
۳۰	۰.۴۹۷۷۹۱	۲۰۰۳.۵۹	۴۹۹.۸۲	۶۴۶۴.۶۳	۱۰۹۷۸.۰۰	۳۰۹۲۶.۰۰
۳۱	۰.۷۹۵۳۳۵	۸۱۴۹.۳۲	۱۳۴۵.۳۳	۱۲۷۵۱.۴۵	۲۰۴۳۴.۰۰	۲۱۷۴۲۶.۰۰

جدول ۳: نتایج تعیین بیشترین اندازه بهره‌وری تولید و فرم غیرارشمیدوسی

DMU	ناحیه	BCC	نتایج مدل ۱۴
۱	Anhui	۱	۰.۰۸۸
۲	Beijing	۱	۰
۳	Chongqing	۰.۲۶۴۹۱۴	۳.۲۴۴
۴	Fujian	۰.۶۶۲۹۷۱	۰.۶۸۶
۵	Gansu	۰.۲۶۳۲۹۸	۳.۵۵۲
۶	Guangdong	۱	۰
۷	Guangxi	۱	۰.۰۲۶
۸	Guizhou	۱	۰.۱۹۳
۹	Hainan	۰.۳۲۰۶۰۰	۲۶.۵۳
۱۰	Hebei	۰.۰۱۹۱۲۴	۷.۵۵۴
۱۱	Heilongjiang	۰.۳۰۱۹۹۶	۲.۷۱۳
۱۲	Henan	۰.۴۴۸۷۲۰	۰.۹۷۷
۱۳	hubei	۰.۴۵۱۱۶۸	۱.۴۷۱
۱۴	Hunan	۰.۳۷۸۵۵۳	۱.۸۵۹
۱۵	Inner Mngolia	۱	۰.۱۹۴
۱۶	Jiangsu	۱	۰
۱۷	Jiangxi	۰.۴۰۱۸۹۱	۲.۰۹۸
۱۸	Jilin	۰.۵۷۹۰۹۹	۰.۸۳
۱۹	Liaoning	۱	۰.۱۶۶
۲۰	Ningxia	۱	۰
۲۱	Qinghai	۰.۱۲۷۲۴۷	۱۳.۱۶۹
۲۲	Shaanxi	۰.۲۷۰۱۶۴	۱.۸۷۳
۲۳	Shandong	۱	۰.۰۴۵
۲۴	Shanghai	۱	۰
۲۵	Shanxi	۱	۰.۱۲۸
۲۶	Sichuan	۰.۳۵۸۳۷۰	۱.۳۸۰
۲۷	Tianjin	۱	۰
۲۸	Tibet	۱	۰
۲۹	Xinjiang	۰.۱۹۱۴۵۶	۳.۹۰۶
۳۰	Yunnan	۰.۱۹۵۸۴۹	۳.۴۶۹
۳۱	zhejiang	۰.۰۳۵۸۱۴	۱۴.۱۲۹

جدول ۴: نتایج بزرگترین و کوچکترین MPSS

DMU	بزرگترین MPSS متناظر $(\alpha^*\overline{x}_p,\alpha^*\overline{v}_p,\alpha^*\overline{w}_p)$	کوچکترین MPSS متناظر $(\alpha_*\overline{x}_p,\alpha_*\overline{v}_p,\alpha_*\overline{w}_p)$
۱	(۹,۱۲۱.۸۲۹ / ۱۰۷۷.۹۱ , ۱۸,۷۳۲ , ۱۷,۸۴۹ / ۷۰,۷۹۱)	(۹,۱۲۱.۸۲۹ / ۱۰۷۷.۹۱ , ۱۸,۷۳۲ , ۱۷,۸۴۹ / ۷۰,۷۹۱)
۲	(۴,۵۵۴.۳۵۶ / ۸۰۹.۹ , ۱۳,۶۹۹.۸۴ , ۷,۷۵۰ / ۸,۱۹۸)	(۴,۵۵۴.۳۵۶ / ۸۰۹.۹ , ۱۳,۶۹۹.۸۴ , ۷,۷۵۰ / ۸,۱۹۸)
۳	(۵,۰۴۹.۲۵۸ / ۶۲۶.۴۴ , ۹,۱۴۳.۵۵ , ۱۰,۹۴۳ / ۴۵,۱۸۰)	(۵,۰۴۹.۲۵۸ / ۶۲۶.۴۴ , ۹,۱۴۳.۵۵ , ۱۰,۹۴۳ / ۴۵,۱۸۰)
۴	(۹۴,۱۰,۱۱۶.۳۲ / ۱,۸۹۳.۷۲۹۶ , ۳۱,۵۳۷.۷۷۱۲ , ۱۹,۴۵۰.۰۸ / ۱۷۸,۸۰۱.۹۲)	(۶,۵۳۴.۸۰۳ / ۱۳۱۵.۰۹ , ۲۱,۹۰۱.۲۳ , ۱۳,۵۰۷ / ۱۲۴,۱۶۸)
۵	(۶,۳۶۸.۰۵۴ / ۲,۲۵۲.۴۰۴ , ۱۳,۶۷۱.۵۰۴ , ۱۷,۵۰۵.۶ / ۴۲,۹۸۵.۶)	(۲,۲۷۴.۳۰۵ / ۸۰۴.۴۳ , ۴,۸۸۲.۶۸ , ۶,۲۵۲ / ۱۵,۳۵۲)
۶	(۱۱,۹۰۳.۲۶ / ۴۰۶۰.۱۳ , ۸۵,۸۲۴.۶۴ , ۲۴,۰۹۲ / ۱۸۷.۰۳۱)	(۱۱,۹۰۳.۲۶ / ۴۰۶۰.۱۳ , ۸۵,۸۲۴.۶۴ , ۲۴,۰۹۲ / ۱۸۷.۰۳۱)
۷	(۵,۱۶۶.۱۳۵ / ۹۹۳.۲۴ , ۹,۶۴۴.۱۳ , ۱۴,۵۲۵ / ۱۶۵,۲۱۱)	(۵,۱۶۶.۱۳۵ / ۹۹۳.۲۴ , ۹,۶۴۴.۱۳ , ۱۴,۵۲۵ / ۱۶۵,۲۱۱)
۸	(۲,۴۸۳.۰۱۲ / ۸۳۵.۳۸ , ۴,۲۰۶.۳۷ , ۱۰,۹۲ / ۱۴,۱۳۰)	(۲,۴۸۳.۰۱۲ / ۸۳۵.۳۸ , ۴,۲۰۶.۳۷ , ۱۰,۹۲ / ۱۴,۱۳۰)
۹	(۱,۲۷۸,۰۱۰,۵۳۰,۵۰۳.۸ / ۲۳۴,۸۵۴,۲۸۰,۱۵۹.۰۲ , ۱,۹۵۳,۰۸۷,۵۰۱,۳۸۱.۲ , ۱,۹۲۳,۰۴۰,۰۰۱,۳۶۰ / ۸,۱۷۵,۷۴۸,۰۰۵,۷۸۲)	(۹۰۳.۸۲۶۴ / ۱۵۹.۰۲ , ۱,۳۸۱.۲۵ , ۱,۳۶۰ / ۵,۷۸۲)
۱۰	(۱۱,۷۳۷.۰۷ / ۲۶۹۱.۵۲ , ۳۱,۱۴۳.۲۹ , ۵۶,۳۲۴ / ۱۱۴,۲۳۲)	(۱۱,۷۳۷.۰۷ / ۲۶۹۱.۵۲ , ۳۱,۱۴۳.۲۹ , ۵۶,۳۲۴ / ۱۱۴,۲۳۲)
۱۱	(۵,۰۱۹.۰۸۵ / ۷۴۷.۸۴ , ۹,۵۳۵.۱۵ , ۱۰,۱۱۱ / ۳۸,۹۲۱)	(۵,۰۱۹.۰۸۵ / ۷۴۷.۸۴ , ۹,۵۳۵.۱۵ , ۱۰,۱۱۱ / ۳۸,۹۲۱)
۱۲	(۱۵,۲۶۱.۷۳۲۶۴ / ۲,۷۹۱.۷۹۶۵۶ , ۴۱,۵۰۴.۶۹۸۵۸ , ۲۶,۹۳۲.۸۷۱۴ / ۱۷۸.۳۸۱.۵۱۴)	(۱۲,۸۶۸.۲۴ / ۲۳۵۳.۹۶ , ۳۴,۹۹۵.۵۳ , ۲۲,۷۰۹ / ۱۵۰,۴۰۹)
۱۳	(۱۳,۹۷۱,۱۴۴.۹۶ / ۲,۵۵۴.۴۴۴۸ , ۴۱,۵۱۴.۳۹۰۴ , ۲۶,۶۲۰.۸ / ۱۸۱,۶۱۸.۵۶)	(۷,۲۷۶.۶۳۸ / ۱۳۳۰.۴۴ , ۲۱,۶۲۳.۱۲ , ۱۳,۸۶۵ / ۹۴,۵۹۳)
۱۴	(۱۰.۱۰۲.۵۹۵۰۹ / ۱,۶۰۵.۵۱۶۷ , ۲۶.۰۴۲.۰۹۷۱ , ۲۰,۱۰۲.۰۱ / ۱۳۰,۹۷۸.۸۵)	(۷,۳۰۰.۴۱۵۴۳ / ۱,۱۶۰.۱۹۰۹ , ۱۸,۸۱۸.۷۴۱۷ , ۵۲۶.۲۷ / ۹۴,۶۴۸.۹۵)
۱۵	(۶,۸۳۱.۴۱۶ / ۱۵۳۶.۸۳ , ۱۳,۴۰۶.۱۱ , ۲۷,۴۸۸ / ۳۹,۵۳۶)	(۶,۸۳۱.۴۱۶ / ۱۵۳۶.۸۳ , ۱۳,۴۰۶.۱۱ , ۲۷,۴۸۸ / ۳۹,۵۳۶)
۱۶	(۱۸,۹۷۷.۹۲ / ۳۸۶۴.۳۷ , ۹۲,۰۵۶.۴۸ , ۳۱,۲۱۳ / ۲۶۳,۷۶۰)	(۱۸,۹۷۷.۹۲ / ۳۸۶۴.۳۷ , ۹۲,۰۵۶.۴۸ , ۳۱,۲۱۳ / ۲۶۳,۷۶۰)

۱۷	(۹,۸۱۲ ۷۲,۵۲۶ , ۱۳,۸۸۳.۰۶ , ۶,۶۹۶.۱۴۹ ۷۰۰.۵۱)	(۹,۸۱۲ ۷۲,۵۲۶ , ۱۳,۸۸۳.۰۶ , ۶,۶۹۶.۱۴۹ ۷۰۰.۵۱)
۱۸	(۸.۲۴۰ ۳۸,۶۵۶ , ۱۳,۰۸۷.۳۵ , ۶,۳۱۳.۷۴۸ ۵۷۶.۹۸)	(۸.۲۴۰ ۳۸,۶۵۶ , ۱۳,۰۸۷.۳۵ , ۶,۳۱۳.۷۴۸ ۵۷۶.۹۸)
۱۹	(۲۶,۹۵۵ ۷۱,۵۲۱ , ۳۶,۲۱۹.۴۳ , ۱۲,۴۸۰.۹۴ ۱۷۱۵.۲۶)	(۱۲,۱۲۹.۷۵ ۳۲,۱۸۴.۴۵ , ۱۶,۲۹۸.۷۳۹ , ۵,۶۱۶.۴۲۳ ۷۷۱.۸۶۷)
۲۰	(۱۶,۳۲۴ ۲۱,۹۷۷ , ۱,۹۲۴.۳۹ , ۱,۱۹۳.۷۵۲ ۵۴۶.۷۷)	(۱۶,۳۲۴ ۲۱,۹۷۷ , ۱,۹۲۴.۳۹ , ۱,۱۹۳.۷۵۲ ۵۴۶.۷۷)
۲۱	(۱۳,۵۱۰ ۴۵,۴۸۷ , ۱۱,۱۹۹.۸۴ , ۴,۳۱۵.۷۸۴ ۸۵۹.۲۲)	(۳,۹۵۲ ۹,۰۳۱ , ۱,۴۸۱.۹۹ , ۷۸۹.۵۰۵۱ ۴۶۵.۱۸)
۲۲	(۱۳,۵۱۰ ۴۵,۴۸۷ , ۱۱,۱۹۹.۸۴ , ۵,۴۶۲.۷۸۴ ۸۵۹.۲۲)	(۱۳,۵۱۰ ۴۵,۴۸۷ , ۱۱,۱۹۹.۸۴ , ۵,۴۶۲.۷۸۴ ۸۵۹.۲۲)
۲۳	(۴۳,۸۳۷ ۲۰۸,۲۵۷ , ۸۳,۸۵۱.۴ , ۱۷,۶۶۴.۳۴ ۳۲۹۸.۴۶)	(۴۳,۸۳۷ ۲۰۸,۲۵۷ , ۸۳,۸۵۱.۴ , ۱۷,۶۶۴.۳۴ ۳۲۹۸.۴۶)
۲۴	(۱۲,۹۶۹ ۳۶,۶۹۶ , ۳۰,۱۱۴.۴۱ , ۴,۲۵۲.۳۲ ۱۲۹۵.۸۷)	(۱۲,۹۶۹ ۳۶,۶۹۶ , ۳۰,۱۱۴.۴۱ , ۴,۲۵۲.۳۲ ۱۲۹۵.۸۷)
۲۵	(۳۵.۱۹۰ ۴۹.۸۸۱ , ۱۲,۴۷۱.۳۳ , ۴,۷۰۲.۰۹۱ ۱۴۶۰)	(۳۵.۱۹۰ ۴۹.۸۸۱ , ۱۲,۴۷۱.۳۳ , ۴,۷۰۲.۰۹۱ ۱۴۶۰)
۲۶	(۲۰,۱۰۷ ۹۳,۴۴۴ , ۲۳,۱۴۷.۳۸ , ۹,۷۹۰.۲۷۴ ۱۵۴۹.۰۳)	(۲۰,۱۰۷ ۹۳,۴۴۴ , ۲۳,۱۴۷.۳۸ , ۹,۷۹۰.۲۷۴ ۱۵۴۹.۰۳)
۲۷	(۷,۶۸۶ ۱۹,۶۸۰ , ۱۶,۷۵۱.۸۲ , ۴,۵۷۱.۸۸۸ ۶۴۵.۷۴)	(۷,۶۸۶ ۱۹,۶۸۰ , ۱۶,۷۵۱.۸۲ , ۴,۵۷۱.۸۸۸ ۶۴۵.۷۴)
۲۸	(۱۶ ۷۳۶ , ۶۲.۲۲ , ۳۰۶.۵۶۷ ۲۰.۶۱)	(۱۶ ۷۳۶ , ۶۲.۲۲ , ۳۰۶.۵۶۷ ۲۰.۶۱)
۲۹	(۱۸,۱۵۴.۵ ۴۹,۵۵۵.۳۵ , ۱۰,۴۱۶.۷۰۵ , ۵,۳۶۲.۱۸۴۱ ۱,۲۹۰.۸۲۲)	(۹,۳۱۰ ۲۵,۴۱۳ , ۵,۳۴۱.۹ , ۲,۷۴۹.۸۳۸ ۶۶۱.۹۶)
۳۰	(۱۸,۶۶۲.۶ ۵۲,۵۷۴.۲ , ۱۰,۹۸۹.۸۷۱ , ۶,۸۴۲.۴۵۲۴ ۱,۷۰۶.۹۱۹)	(۱۵,۹۷۸ ۳۰,۹۲۶ , ۶,۴۶۴.۶۳ , ۴,۰۲۴.۹۷۲ ۱۰۰۴.۰۷)
۳۱	(۲۰,۴۳۴ ۲۱۷,۴۲۶ , ۵۱,۳۹۴.۲ , ۱۰,۲۴۶.۴۱ ۲۸۲۰.۹۳)	(۲۰,۴۳۴ ۲۱۷,۴۲۶ , ۵۱,۳۹۴.۲ , ۱۰,۲۴۶.۴۱ ۲۸۲۰.۹۳)

۵- نتیجه‌گیری و پیشنهادات

در این تحقیق مدل‌هایی ارائه شده است که توسط آن‌ها میزان تأثیر عوامل محیطی به‌عنوان مثال آلاینده‌ها و ضایعات و... درارزیابی عملکرد واحدهای تصمیم‌گیری مشخص می‌شود. در این پژوهش اثر خروجی نامطلوب را بارویکرد کاسمانن و با فرض دسترسی‌پذیری ضعیف روی مدل‌های کوپر و همکاران [۸] و جهانشاهلو و همکاران [۱۵] در نظر گرفتیم و به ارزیابی و تخمین بیشترین مقیاس بهره‌وری تولید (MPSS) و یافتن بزرگترین MPSS و کوچکترین MPSS متناظر هر DMU باعوامل زیست محیطی پرداختیم. یک مطالعه کاربردی به منظور توضیح و تحلیل روش و نتایج استفاده شده است.

برتری مدل پیشنهادی نسبت به مدل‌های موجود در این است که در مدل پیشنهادی نقش عوامل محیطی در برآورد میزان کارآیی واحدها در نظر گرفته شده است درحالی که مدل‌های کوپر و جهانشاهلو و همکاران زمانی قابل استفاده هستند که ورودی‌ها و خروجی‌های مساله مطلوب باشند.

به نظر می‌رسد محاسبه بیشترین مقیاس بهره‌وری تولید (MPSS) در حضور همزمان ورودی‌ها و خروجی‌های نامطلوب و یا با حضور داده‌های غیرقابل کنترل می‌توانند موضوعات جالبی برای تحقیقات آتی باشند.

۶- سپاسگزاری

از انجمن ایرانی تحلیل پوششی داده‌ها جهت حمایت در اجرای این پژوهش تشکر و قدردانی می‌گردد.

فهرست منابع

[۱] رضا کاظمی متین، (۱۳۹۰)، "روش‌های ناپارامتری مدل‌بندی خروجی نامطلوب در DEA: رویکرد استفاده از اصل دسترسی‌پذیری ضعیف"، مجله تحقیق در عملیات و کاربردهای آن، سال هشتم، شماره ۳ (پیاپی ۳۰)، ص ص ۵۳-۶۹ شاپا ۲۲۵۱-۷۲۸۶.

[2] Ball V. E., C. A. K.Lovell., R.Nehring and A. Somwaru, (1994)," Incorporating Undesirable Outputs into Models of Production", *An Application to U.S. Agriculture. Cah. Econ. SociologieRurales,* 3, 60-74.

[3] Banker, R.D, (1984), "Estimating most productive scale size using data envelopment analysis", *European Journal of Operational Research*, 17, 35–44.

[4] Banker, R. D.,A. Charnes andW.W. Cooper, 1984), "Some models for the estimation of technical and scale inefficiencies in data envelopment analysis",*Management Science*,30.1078-92.

[5] Banker, R.D., W.W. Cooper., R.M. Thrall., L.M. Seiford and Zhu, J, (2004), "Returns to scale in different DEA models", *European Journal of Operational Research*, 154, 345–362.

[6] Banker, R. D and A. Maindiretta, (1988),"Nonparametric Analysis of Technical and Allocative Efficiencies in Production" ,*Econometrica*, 56,1315-32.

[7] Charnes A., W. W. Cooper and E. Rhodes, (1978),"Measuring the efficiency of decision making units". *European Journal of Operational Resrarch*, 2,429-444.

[8] Cooper, W. W., R.G., Thampson and Thrall, R.M, (1996),"Extensions and new developments in DEA", *The Annals of Operations Research*, 66.

[9] Cooper, W.W., Seiford, L.M. and Tone, K. (2007) "Data Envelopment Analysis "AComprehensive Text with Models, Applications, References and DEA-Solver Software. 2nd Edition, Springer, New York.

[10] Fare, R and S.Groosskopf, (2003)." Nonparametric Productivity Analysis with Undesirable Outputs", Comment. *American Journal of Agricultural Economics*, 85, 1070-74.

[11] Far, R and S. Grosskopf, (2008),"A Comment on weak Disposability in Nonparametric Productivity Analysis with Undesirable Outputs", *American Journal of Agricultural Economics*.

[12] Fare, R., S. Grosskopf., C. A. K.Lovell and C. Pasurka, (1984), "Multilateral Productivity Comparisons When Some Output Are Undesirable", A Nonparametric Approach *Rev. Econ, Stat.* 73, 374-80.

[13] Hailu A., (2003),"Nonparametric Productivity Analysis with Undesirable Outputs", *Reply, American Journal of Agricultural Economics,* 85, 1075-77.

[14] HailuA and T.s.Veeman, (2001),"Nonparametric Productivity Analysis with Undesirable Output", An Application to the Canadian Pulp and Paper Industry.*American Journal of Agricultural Economics*, 83.605-16.

[15] Jahanshahloo G. R., A. Hadi Vencheh, A. A. Foroughi and R. Kazemi Matin (2004), "Inputs/Outputs estimation in DEA when some factors are undesirable", *Appl. Math. Comput*, 156, 19-32.

[16] Jahanshahloo, G. R and, M. Khodabakhshi, (2003)," Using input-

output orientation model for determiningmost productive scale size in DEA", *Applied Mathematics and Computation* 146, 849-855.

[17] Khodabakhshi M., (2009), "Estimating most productive scale size with stochastic data in data envelopment analysis ", *Economic Modelling* 26, 968-973.

[18] Kuosmanen T., (2005),"Weak Disposability in Nonparametric Productivity Analysis with Undesirable Outputs", *Amerilcan Journal of Agricultural Economics*, 87, 1077-1082.

[19] Kuosmanen T andV.Poidnovski, (2009), "Weak Disposability in Nonparametric Productivity Analysis with Undesirable Outputs",*Reply to Far and Grosskopf. American Journal of Agricultural Economics.*

[20] Moghaddas Z and M. Vaez-Ghasemi., (2014),"Estimating most productive scale size in dea with real and integer value data". *Vol. 6, No.2, 2014 Article ID IJIM-00342, 8 pages Resaerch Article*.

[21] Podinovski V. V., (2004),"Bridging the Gap between the constant and Variable Returns-to-Scale Model", Sslective Proportionlity in Date Envelopment Analysis *.Journal of the Operational.*

[22] Shephard R.W., (1970),"Theory of Cost and production Functions. Princeton", *Princeton University Press.*

[23] Wu J., Q. An Y .Xiong and Y. Chen., (2013),"Congestion measurement for regional industries in China: A data envelopment analysis approach with undesirable output", *Energy Policy* 57, 7-13.

[24] Dwi Sari Yunita.,Layla Angria S., Syahril Efendi and Muhammad Zarlis, (2018),"Estimating Most Productive Scale Size in Data Envelopmesnt Analysis With Integer Value Data",*IOP Conference Series: Materials Science and Engineering.*