

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال هفتم، شماره سی و دوم، مهر و آبان ۱۴۰۰

شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

حل عددی مدل کسری عفونت HIV در سلول‌های $CD4^+ T$

محمد رضا دوستدار^۱، طیبه دمرچلی^{۲*}، علیرضا وحیدی^۳

^(۳ و ۲، ۱) گروه ریاضی، واحد یادگار امام خمینی (ره) شهرری، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۰۲/۰۷ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۵/۲۳

چکیده

در این مقاله، مدل کسری عفونت HIV در سلول‌های $CD4^+ T$ با استفاده از یک روش عددی مبتنی بر توابع ترکیبی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در این مدل، مشتقات کسری در مفهوم کاپوتو در نظر گرفته می‌شوند. در این روش، دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی از مرتبه کسری به یک دستگاه معادلات جبری تبدیل می‌گردد که می‌توان آن را با استفاده از یک روش عددی مناسب حل نمود. همچنین، در بحث آنالیز خطا، کران بالای خطا ارائه شده است. کارایی و دقت روش، با استفاده از یک نمونه عددی برای برخی مشتقات صحیح و کسری بررسی و برخی مقایسه‌ها و نتایج گزارش شده است.

واژه‌های کلیدی: مشتق کسری، دستگاه معادلات دیفرانسیل، ماتریس عملیاتی، توابع بلاک-پالس، چندجمله‌ای-های لژاندر.

۱- مقدمه

ویروس نقص ایمنی انسانی (HIV)، به عنوان یک مسئله مرتبط با بهداشت عمومی جهانی، تاکنون افراد بسیاری را آلوده ساخته و باعث مرگ انسان‌های زیادی شده است. بر اساس گزارش سازمان بهداشت جهانی، مبتلایان به HIV در پایان سال ۲۰۱۹ حدود ۳۸ میلیون نفر برآورد شده است. این ویروس که عامل بیماری ایدز می‌باشد، سلول‌های ایمنی بدن یعنی سلول‌های $CD4^+ T$ را هدف قرار می‌دهد. اگرچه HIV، سلول‌های دیگر را نیز آلوده می‌کند، اما بیشترین آسیب به سیستم ایمنی، به دلیل کاهش تعداد سلول‌های $CD4^+ T$ وارد می‌شود. با استفاده از تعداد سلول‌های $CD4^+ T$ در خون، پزشکان می‌توانند میزان آسیب به سیستم ایمنی بدن را تعیین کنند.

در دهه‌های اخیر، تلاش‌های زیادی برای طراحی و حل مدل‌های ریاضی صورت گرفته است که تجزیه و تحلیل این مدل‌ها، نقش اساسی در کنترل و جلوگیری از شیوع بیماری‌های مرتبط با HIV دارد [۱]-[۷]. معمولاً بیشتر این مدل‌های ریاضی رابطه بین HIV و سلول‌های $CD4^+ T$ آلوده نشده و نیز تأثیر دارو درمانی بر سلول‌های آلوده را تشریح می‌کنند.

یکی از این مدل‌ها که توسط یک سیستم سه بعدی از معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی مربعی توصیف می‌شود به صورت زیر در نظر گرفته می‌شود [۷]:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = s' - \theta x - \kappa xz, \\ \frac{dy}{dt} = \kappa xz - \mu y, \\ \frac{dz}{dt} = \mathcal{N} y - \eta z, \end{cases} \quad (1)$$

که $0 \leq t < 1$ و $x(0) = \rho_1, y(0) = \rho_2, z(0) = \rho_3$ مقادیر اولیه هستند. این مدل شامل سه دسته

متفاوت از سلول‌ها است:

سلول‌های سالم ($x(t)$)، سلول‌های آلوده ($y(t)$) و بار ویروسی ($z(t)$).

از آنجایی‌که، مدل‌های ریاضی مبتنی بر حساب انتگرال و دیفرانسیل کلاسیک، همواره قادر به توصیف مناسب سیستم‌های دینامیکی نیستند، از این‌رو، بررسی رفتار این سیستم‌ها با معادلات انتگرالی و دیفرانسیل مرتبه کسری مورد توجه دانشمندان و محققان قرار گرفت. حساب انتگرال و دیفرانسیل کسری (FC^α) بخشی از آنالیز ریاضی است که بر عملگرهای دیفرانسیلی و انتگرالی با مرتبه حقیقی و مختلط تمرکز دارد. تا سال ۱۹۷۴، FC اغلب به صورت تئوری توسط ریاضیدانان مورد مطالعه قرار می‌گرفت، که البته منجر به موفقیت‌ها و پیشرفت‌های چشمگیری نیز گردید. از سال ۱۹۷۴، هنگامی که اولین کنفرانس بین‌المللی با عنوان دیفرانسیل کسری و کاربردهای آن برگزار شد، FC مورد توجه ویژه محققان قرار گرفت [۸]-[۱۱]. نقش ارزشمند FC در توصیف پدیده‌های با اثرات حافظه، آن را به ابزاری قدرتمند در مدل‌سازی ریاضی بسیاری از پدیده‌ها در فیزیک، مهندسی، اقتصاد و زیست‌شناسی تبدیل نموده است [۱۲]-[۱۸].

فرم کسری مدل (۱) را با همان مقادیر اولیه به صورت زیر در نظر بگیرید [۱۳]:

$$\begin{cases} D^\alpha x = s' - \theta x - \kappa xz, \\ D^\alpha y = \kappa xz - \mu y, \\ D^\alpha z = \mathcal{N} y - \eta z, \end{cases} \quad (2)$$

که $0 < \alpha \leq 1$.

برخی روش‌های عددی همچون آنالیز هموتوپی، هموتوپی مجانبی بهینه، اختلال هموتوپی، اویلر تعمیم یافته، تجزیه آدومیان، تکرار تغییرات، موجک لژاندر، آدامز-بشفورث-مولتن و ... برای حل

که α مرتبه عملگر است و $\Gamma(\cdot)$ نیز به تابع گاما دلالت دارد.

تعریف ۲: ([۸]) عملگر مشتق کسری کاپوتو از مرتبه α که با D^α نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(D^\alpha f)(t) = (J^{n-\alpha} D^n f)(t) \\ = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\zeta)^{n-\alpha-1} f^{(n)}(\zeta) d\zeta; t > 0, \quad (۴)$$

که $n-1 < \alpha \leq n \in \mathbb{N}$. یادآوری می‌کنیم که عملگر D^α یک عملگر خطی است. برخی از ویژگی‌های عملگرهای کسری فوق به صورت زیر بیان می‌شوند:

(i) برای عدد ثابت C ، رابطه $D^\alpha C = 0$ برقرار است.

(ii)

$$(J^{\alpha_1} J^{\alpha_2} f)(t) \\ = (J^{\alpha_2} J^{\alpha_1} f)(t) = (J^{\alpha_1+\alpha_2} f)(t). \quad (iii)$$

$$(D^{\alpha_1} D^{\alpha_2} f)(t) = (D^{\alpha_1+\alpha_2} f)(t). \quad (iv)$$

$$D^\alpha t^q = \begin{cases} 0, & q \in \mathbb{Z}^+; q < \alpha, \\ \frac{\Gamma(q+1)}{\Gamma(q-\alpha+1)} t^{q-\alpha}, & \text{o.w.} \end{cases} \quad (v)$$

$$(J^\alpha D^\alpha f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(0^+)$$

۲-۲- توابع ترکیبی

تعریف ۳: توابع بلاک-پالس $b_i(t)$ بر بازه $[0,1]$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$b_i(t) = \begin{cases} 1, & \frac{i-1}{N} \leq t < \frac{i}{N}, \\ 0, & \text{o.w.} \end{cases}$$

مدل‌هایی از نوع مدل (۲) ارائه شده است [۱۳]، [۱۹]-[۲۵].

در این مقاله، حل عددی دستگاه (۲) با استفاده از روش ترکیب توابع بلاک-پالس و چندجمله‌ای‌های لژاندر مورد بررسی قرار می‌گیرد. در بخش ۲، برخی تعاریف مورد نیاز و مفاهیم اساسی ارائه می‌شوند. در بخش ۳، روش ترکیبی بلاک-پالس لژاندر (BPLM) برای حل دستگاه (۲) پیاده‌سازی می‌گردد. همچنین، آنالیز همگرایی روش در بخش ۴ بررسی می‌شود. در بخش ۵، برای نشان دادن کارایی و دقت روش، یک مثال عددی و برخی مقایسه‌ها و گزارش‌ها ارائه می‌شوند.

۲- تعاریف و مفاهیم اساسی

در این بخش، مروری بر تعاریف مورد نیاز، برخی ویژگی‌های حساب انتگرال و دیفرانسیل کسری و توابع ترکیبی مورد استفاده خواهیم داشت.

۲-۱- تعریف عملگرهای مشتق و انتگرال کسری

تعاریف مختلفی برای انتگرال و مشتق کسری توسط گرانوالد-لتنیکوف، ریمان-لیوویل، آدامار، اردلیبی-کوبر، کاپوتو و دیگر دانشمندان ارائه شده است. در اینجا دو مفهوم رایج که توسط ریمان-لیوویل و کاپوتو تعریف شده‌اند، ارائه می‌گردند.

تعریف ۱: ([۸]) برای یک تابع پیوسته $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل که با J^α نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌گردد:

$$(J^\alpha f)(t) \\ = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\zeta)^{\alpha-1} f(\zeta) d\zeta, & \alpha > 0, \\ f(t), & \alpha = 0, \end{cases} \quad (۳)$$

$$\mathbf{D} = [d_{10}, d_{11}, \dots, d_{1(M-1)}, d_{20}, d_{21}, \dots, \\ d_{2(M-1)}, \dots, d_{N0}, d_{N1}, \dots, d_{N(M-1)}]^T, \\ \mathbf{\Phi}(t) = [\phi_{10}(t), \dots, \phi_{1(M-1)}(t), \phi_{20}(t), \dots, \\ \phi_{2(M-1)}(t), \dots, \phi_{N0}(t), \dots, \phi_{N(M-1)}(t)]^T$$

۲-۳- ماتریس‌های عملیاتی

با در نظر گرفتن $\tau = NM$ ، انتگرال بردار $\mathbf{\Phi}(t)$ به صورت زیر تقریب زده می‌شود [۲۶]:

$$\int_0^t \mathbf{\Phi}(\zeta) d\zeta \approx \Omega_{\tau \times \tau} \mathbf{\Phi}(t),$$

که $\Omega_{\tau \times \tau}$ یعنی ماتریس عملیاتی انتگرال به فرم زیر می‌باشد:

$$\Omega_{\tau \times \tau} = \begin{bmatrix} L & E & E & \dots & E \\ \mathbf{0} & L & E & \dots & E \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & L & \dots & E \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & L \end{bmatrix}.$$

که در آن، ماتریس‌های L و E با تعاریف ارائه شده در [۲۶] و ماتریس صفر $\mathbf{0}$ ، همگی ماتریس-های $M \times M$ هستند.

یادآوری می‌گردد که $\mathbf{\Phi}(t)$ را می‌توان به صورت

$$\mathbf{\Phi}(t) \approx \Psi_{\tau \times \tau} B(t), \quad (7)$$

تقریب زد که در آن $\Psi_{\tau \times \tau}$ و $B(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$\Psi_{\tau \times \tau} = [\mathbf{\Phi}(\omega_1) \quad \mathbf{\Phi}(\omega_2) \quad \dots \quad \mathbf{\Phi}(\omega_\tau)], \\ B(t) = [b_1(t), b_2(t), \dots, b_\tau(t)]^T,$$

که $\omega_g = \frac{2g-1}{2\tau}$ به ازای $g = 1, 2, \dots, \tau$ ، نقاط هم‌محلی می‌باشند.

اکنون، برای بدست آوردن $\Omega_{\tau \times \tau}^\alpha$ یعنی ماتریس عملیاتی انتگرال کسری برای ترکیب توابع بلاک-پالس لژاندر، قرار می‌دهیم:

که $i = 1, 2, \dots, N$ و N مرتبه توابع بلاک-پالس است.

تعریف ۴: ([۲۶]) توابع ترکیبی متعامد بلاک-پالس لژاندر $\phi_{ij}(t)$ بر بازه $[0, 1]$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\phi_{ij}(t) = \begin{cases} \phi_j(2Nt - 2i + 1), & \frac{i-1}{N} \leq t < \frac{i}{N}, \\ 0, & \text{o.w.}, \end{cases}$$

که $j = 0, 1, 2, \dots, M-1$ و ϕ_j نیز چند جمله‌ای های لژاندر می‌باشند که از روابط زیر بدست می‌آیند:

$$\phi_0(t) = 1, \quad \phi_1(t) = t, \\ (j+1)\phi_{j+1}(t) = (2j+1)t\phi_j(t) - j\phi_{j-1}(t).$$

با استفاده از توابع پایه‌ای $\{\phi_{ij}\}$ ، می‌توان یک تابع $f \in L^2[0, 1]$ را به صورت زیر تقریب زد [۲۶]:

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} d_{ij} \phi_{ij}(t), \quad (8)$$

که در آن، d_{ij} ها یعنی ضرایب ترکیبی را می‌توان از رابطه

$$d_{ij} = \frac{(f(t), \phi_{ij}(t))}{(\phi_{ij}(t), \phi_{ij}(t))},$$

به ازای $i = 1, 2, \dots, \infty$ و $j = 0, 1, 2, \dots, \infty$ بدست آورد.

اگر تابع $f(t)$ ، قطعه‌ای ثابت باشد و یا بتوان آن را با استفاده از توابع قطعه‌ای ثابت تقریب زد آنگاه می‌توان سری (۵) را در NM جمله محاسبه نمود. یعنی،

$$f(t) \approx f_{NM}(t) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^{M-1} d_{ij} \phi_{ij}(t) = \mathbf{D}^T \mathbf{\Phi}(t), \quad (9)$$

که \mathbf{D} و $\mathbf{\Phi}(t)$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$D^\alpha f(t) = F^T \Phi(t), \quad (13)$$

که در آن $F = [f_1, f_2, \dots, f_\tau]^T$ بردار مجهول است.

با اعمال عملگر انتگرال کسری ریمان-لیوویل به طرفین رابطه (۱۳)، خواهیم داشت:

$$(\mathcal{J}^\alpha D^\alpha f)(t) = F^T (\mathcal{J}^\alpha \Phi)(t). \quad (14)$$

با استفاده از ویژگی (۷) در بخش ۲، و رابطه (۸)، رابطه اخیر را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(t) = \sum_{k=0}^{[\alpha]-1} \frac{t^k}{k!} f^{(k)}(0^+) + F^T \Omega_{\tau \times \tau}^\alpha \Phi(t). \quad (15)$$

به ویژه، برای $0 < \alpha \leq 1$ ، رابطه (۱۵) به صورت زیر خواهد بود:

$$f(t) = f(0^+) + F^T \Omega_{\tau \times \tau}^\alpha \Phi(t). \quad (16)$$

توجه نمائید که تقریب مقدار ثابت $f(0^+)$ برحسب توابع ترکیبی بلاک-پالس لژاندر به صورت زیر می-باشد [۲۷]:

$$f(0^+) = F_0^T \Phi(t),$$

که

$$F_0 = \underbrace{[f(0^+) \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]}_{M-1} \underbrace{[f(0^+) \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]}_{M-1} \dots \underbrace{[f(0^+) \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]}_{M-1}^T.$$

در نتیجه، رابطه (۱۶) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$f(t) = (F_0^T + F^T \Omega_{\tau \times \tau}^\alpha) \Phi(t) = F_\alpha^T \Phi(t). \quad (17)$$

جملات غیرخطی مربعی $f(t)h(t)$ را نیز می‌توان برحسب توابع ترکیبی بلاک-پالس لژاندر به صورت زیر تقریب زد:

$$(\mathcal{J}^\alpha \Phi)(t) = \Omega_{\tau \times \tau}^\alpha \Phi(t). \quad (8)$$

با اعمال عملگر \mathcal{J}^α بر طرفین رابطه (۷)، داریم:

$$(\mathcal{J}^\alpha \Phi)(t) = (\mathcal{J}^\alpha \Psi_{\tau \times \tau} B)(t) = \Psi_{\tau \times \tau} (\mathcal{J}^\alpha B)(t). \quad (9)$$

از روابط (۸) و (۹) رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\Omega_{\tau \times \tau}^\alpha \Phi(t) = \Psi_{\tau \times \tau} (\mathcal{J}^\alpha B)(t). \quad (10)$$

از سوی دیگر داریم [۲۸]:

$$(\mathcal{J}^\alpha B)(t) = \mathcal{F}^\alpha B(t), \quad (11)$$

که \mathcal{F}^α به شکل زیر می‌باشد:

$$\mathcal{F}^\alpha = \frac{1}{\tau^\alpha \Gamma(\alpha + 2)} \begin{bmatrix} 1 & \zeta_1 & \zeta_2 & \dots & \zeta_{\tau-1} \\ 0 & 1 & \zeta_1 & \dots & \zeta_{\tau-2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \zeta_{\tau-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

که $\zeta_g = (g+1)^{\alpha+1} - 2g^{\alpha+1} + (g-1)^{\alpha+1}$ ازای $g = 1, 2, \dots, \tau-1$ بدست می‌آید.

حال، با جایگذاری رابطه (۱۱) در رابطه (۱۰) و با در نظر گرفتن رابطه (۷)، رابطه زیر بدست می‌آید:

$$\Omega_{\tau \times \tau}^\alpha \Psi_{\tau \times \tau} B(t) = \Psi_{\tau \times \tau} \mathcal{F}^\alpha B(t). \quad (12)$$

در نتیجه، $\Omega_{\tau \times \tau}^\alpha$ از رابطه (۱۲) به شکل زیر تعیین می‌گردد:

$$\Omega_{\tau \times \tau}^\alpha = \Psi_{\tau \times \tau} \mathcal{F}^\alpha \Psi_{\tau \times \tau}^{-1}.$$

۳- پیاده‌سازی روش

در این بخش، برای حل دستگاه (۲) به روش ترکیبی بلاک-پالس لژاندر (BPLM)، ابتدا لازم است $D^\alpha f(t)$ با استفاده از توابع ترکیبی بلاک-پالس لژاندر $\phi_j(t)$ (تعریف ۴) تقریب زده شود. بدین منظور، قرار می‌دهیم:

با استفاده از نقاط هم‌محلی $t = \omega_g = \frac{2g-1}{2\tau}$ به ازای $g=1, 2, \dots, \tau$ و حل دستگاه معادلات جبری غیرخطی حاصل با استفاده از یک روش عددی مناسب مانند روش نیوتن، بردارهای مجهول X, Y, Z بدست می‌آیند. اکنون، به کمک بردارهای حاصل، می‌توان متغیرهای $x(t), y(t)$ و $z(t)$ را از رابطه (۲۰) بدست آورد.

۴- آنالیز خطا

در این بخش، ابتدا فضای سوبولف^۳ و نرم متناظر با آن تعریف می‌شوند و در ادامه با ارائه دو لم، یک کران بالا برای خطای روش ارائه شده بدست می‌آید.

تعریف ۵: ([۲۹]) فرض کنید $r \geq 0$ یک عدد صحیح و (a, b) یک بازه کراندار از اعداد حقیقی باشد. فضای برداری توابع $v \in L^2(a, b)$ که به صورت زیر تعریف می‌شود، فضای سوبولف نامیده می‌شود.

$$H^r(a, b) = \{v | v^{(m)} \in L^2(a, b); 0 \leq m \leq r\}$$

که

$$H^0(a, b) \equiv L^2(a, b)$$

و

$$\dots \subset H^{r+1}(a, b) \subset H^r(a, b) \subset \dots \subset H^1(a, b) \subset L^2(a, b).$$

همچنین، نرم متناظر با این فضای برداری به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\|v\|_{H^r(a, b)} = \left(\sum_{m=0}^r \|v^{(m)}\|_{L^2(a, b)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

لم ۱: ([۲۹]) فرض کنید $\{\varphi_j\}_{j=0}^{\tau}$ دنباله چند جمله‌ای‌های لژاندر و چند جمله‌ای

$$\begin{aligned} f(t)h(t) &\approx (F_\alpha^T \Phi(t))(H_\alpha^T \Phi(t)) \\ &= F_\alpha^T \Phi(t) \Phi^T(t) H_\alpha = F_\alpha^T \tilde{H}_\alpha \Phi(t), \end{aligned} \quad (18)$$

که \tilde{H}_α در [۲۷] تعریف شده است.

رابطه (۱۳) را برای متغیرهای $x(t), y(t)$ و $z(t)$ در دستگاه (۲)، به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} \mathcal{D}^\alpha x(t) \approx X^T \Phi(t), \\ \mathcal{D}^\alpha y(t) \approx Y^T \Phi(t), \\ \mathcal{D}^\alpha z(t) \approx Z^T \Phi(t). \end{cases} \quad (19)$$

همچنین، رابطه (۱۷) را برای این متغیرها، به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$\begin{cases} x(t) \approx (X_0^T + X^T \Omega_{\tau \times \tau}^\alpha) \Phi(t) \\ \quad = X_\alpha^T \Phi(t), \\ y(t) \approx (Y_0^T + Y^T \Omega_{\tau \times \tau}^\alpha) \Phi(t) \\ \quad = Y_\alpha^T \Phi(t), \\ z(t) \approx (Z_0^T + Z^T \Omega_{\tau \times \tau}^\alpha) \Phi(t) \\ \quad = Z_\alpha^T \Phi(t), \end{cases} \quad (20)$$

که $Y^* = [y_1, y_2, \dots, y_\tau]^T$ ، $X = [x_1, x_2, \dots, x_\tau]^T$ و $Z = [z_1, z_2, \dots, z_\tau]^T$ بردارهای مجهول هستند. با در نظر گرفتن رابطه (۱۸)، جمله غیرخطی دستگاه (۲) یعنی $x(t)z(t)$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$x(t)z(t) \approx X_\alpha^T \tilde{Z}_\alpha \Phi(t). \quad (21)$$

اکنون، با جایگذاری روابط (۱۹)، (۲۰) و (۲۱) در دستگاه (۲) و جایگزین کردن \approx با $=$ ، دستگاه معادلات جبری غیرخطی زیر بدست می‌آید:

$$\begin{cases} (X^T - S^T + \theta X_\alpha^T + \kappa Z_\alpha^T \tilde{X}_\alpha) \Phi(t) = 0, \\ (Y^T - \kappa Z_\alpha^T \tilde{X}_\alpha + \mu Y_\alpha^T) \Phi(t) = 0, \\ (Z^T - \mathcal{N} Y_\alpha^T + \eta Z_\alpha^T) \Phi(t) = 0. \end{cases} \quad (22)$$

³ Sobolev

که

$$\begin{aligned} \lambda_1(\zeta, U(\zeta)) &= \theta x(\zeta) - \kappa x(\zeta)z(\zeta), \\ \lambda_2(\zeta, U(\zeta)) &= \kappa x(\zeta)z(\zeta) - \mu y(\zeta), \\ \lambda_3(\zeta, U(\zeta)) &= \mathcal{N} y(\zeta) - \eta z(\zeta), \end{aligned}$$

$$.U(t) = [x(t), y(t), z(t)]^T \text{ و}$$

دستگاه (۲۴) را به فرم ماتریسی و به صورت زیر نمایش می‌دهیم:

$$U(t) = A(t) + \int_0^t \frac{(t-\zeta)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \Lambda(\zeta, U(\zeta)) d\zeta, \quad (25)$$

$$A(t) = [s' \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + x(0^+), y(0^+), z(0^+)]^T, \text{ که}$$

و

$$\Lambda(\zeta, U(\zeta)) = \begin{bmatrix} \lambda_1(\zeta, U(\zeta)) \\ \lambda_2(\zeta, U(\zeta)) \\ \lambda_3(\zeta, U(\zeta)) \end{bmatrix}.$$

قضیه ۱: فرض کنید $U \in H^r[0,1)$ برای $r \geq 1$

جواب دقیق و $\hat{U}(t) = U_{NM}(t)$ جواب تقریبی دستگاه معادلات (۲۵) بدست آمده از روش ترکیبی توابع بلاک-پالس لژاندر و $e(t) = U(t) - \hat{U}(t)$ عبارت خطا باشد. بعلاوه، فرض کنید

(i) $\lambda_k(\zeta, U(\zeta))$ به ازای $k = 1, 2, 3$ و $0 \leq \zeta \leq t < 1$ در شرط لیپشیتز

$$|\lambda_k(\zeta, U(\zeta)) - \lambda_k(\zeta, W(\zeta))| \leq L_k \|U - W\|_{\infty},$$

صدق کند که $L_k > 0$ ثابت لیپشیتز است.

$$\mathcal{K}_\alpha = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sup_{0 \leq t < 1} \int_0^t (t-\zeta)^{\alpha-1} d\zeta \quad \text{(ii)}$$

مثبت δ وجود دارد به طوری که

$$\|e\|_{\infty} = \|U - \hat{U}\|_{\infty} \leq \mathcal{K}_\alpha \delta.$$

اثبات: فرض کنید $\hat{x}(t) = x_{NM}(t)$ ، $\hat{y}(t) = y_{NM}(t)$ و

$\hat{z}(t) = z_{NM}(t)$ جواب تقریبی دستگاه معادلات

$$\Pi_J(t) = \sum_{j=0}^J d_j \phi_j(t)$$

بهترین تقریب درجه J تابع $f \in H^r(-1,1)$ باشد. آنگاه، به ازای $r \geq 1$ ، عدد

ثابت $C_0 > 0$ وجود دارد به طوری که رابطه

$$\|f - \Pi_J\|_{L^\infty(-1,1)} \leq C_0 J^{\frac{3-r}{4}} \|f\|_{H^r(-1,1)},$$

برای تمام توابع $f \in H^r(-1,1)$ برقرار است.

لم ۲: فرض کنید $f \in H^r[0,1)$ که $r \geq 1$ یک

عدد صحیح است. همچنین، فرض کنید f_{NM}

تقریب تابع f توسط رابطه (۶) باشد. آنگاه

$$\begin{aligned} \|f - f_{NM}\|_{L^\infty[0,1)} \\ \leq C_0 (NM)^{\frac{3-r}{4}} \max_{1 \leq i \leq N} \|f\|_{H^r(I_i)}, \end{aligned}$$

که C_0 یک ثابت مثبت است و $I_i = [\frac{i-1}{N}, \frac{i}{N}]$

اثبات: به سادگی با استفاده از لم ۱، نتیجه می‌شود.

قبل از بیان قضیه نهایی، ابتدا عملگر \mathcal{J}^α را به

طرفین معادلات دستگاه (۲) اعمال می‌کنیم. در

نتیجه، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} \mathcal{J}^\alpha \mathcal{D}^\alpha x = \mathcal{J}^\alpha (s' - \theta x - \kappa x z), \\ \mathcal{J}^\alpha \mathcal{D}^\alpha y = \mathcal{J}^\alpha (\kappa x z - \mu y), \\ \mathcal{J}^\alpha \mathcal{D}^\alpha z = \mathcal{J}^\alpha (\mathcal{N} y - \eta z). \end{cases} \quad (23)$$

با استفاده از تعاریف ۱ و ۲ و ویژگی بیان شده در

بخش ۲، دستگاه فوق را می‌توان به صورت زیر

نوشت:

$$\begin{cases} x(t) - x(0^+) \\ = s' \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} + \int_0^t \frac{(t-\zeta)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \lambda_1(\zeta, U(\zeta)) d\zeta, \\ y(t) - y(0^+) \\ = \int_0^t \frac{(t-\zeta)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \lambda_2(\zeta, U(\zeta)) d\zeta, \\ z(t) - z(0^+) \\ = \int_0^t \frac{(t-\zeta)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \lambda_3(\zeta, U(\zeta)) d\zeta. \end{cases} \quad (24)$$

می‌توان نوشت:

$$\|e_k\|_{\infty} \leq \mathcal{K}_{\alpha} L \max\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\} = \mathcal{K}_{\alpha} \delta, \quad (30)$$

$$\delta = L \max\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\} \text{ که}$$

با توجه به اینکه $e(t) = U(t) - \hat{U}(t)$ از رابطه (۳۰) نتیجه می‌گیریم:

$$\|e\|_{\infty} = \|U - \hat{U}\|_{\infty} \leq \mathcal{K}_{\alpha} \delta.$$

در اینجا، به این نکته اشاره می‌کنیم که با افزایش τ یعنی درجه بهترین چندجمله‌ای تقریب، δ کاهش می‌یابد. در نتیجه، روش همگراست. البته، سرعت همگرایی به عامل $(\frac{3}{4} - r)$ و توابع λ_1, λ_2 و λ_3 نیز بستگی دارد. هرچه این توابع دارای مشتقات پیوسته بیشتری باشند، سرعت همگرایی سریع‌تر خواهد بود.

۵- نتایج عددی

در این بخش، روش BPLM با در نظر گرفتن پارامترها و مقادیر اولیه زیر [۱۳] برای حل دستگاه معادلات (۲) پیاده‌سازی می‌شود.

$$\begin{aligned} x(0) &= 100, \quad y(0) = 0, \quad z(0) = 1, \\ s' &= 0.272, \quad \theta = 0.00136, \quad \kappa = 0.00027, \\ \mu &= 0.33, \quad \mathcal{N} = 50, \quad \eta = 2. \end{aligned}$$

لازم به توضیح است، همه محاسبات، با استفاده از نرم‌افزار Matlab 2017a انجام شده است. در ابتدا، دستگاه معادلات (۲) برای حالت $\alpha = 1$ در نظر گرفته شده است که جواب‌های تقریبی این دستگاه معادلات با استفاده از روش ارائه شده در این مقاله (BPLM)، و روش‌های HAM^۴ در [۱۳]، LADM^۵ در [۲۴]، LWM^۶ و ABM^۷ در [۲۵] و نیز روش رونگه-کوتا مرتبه چهار کلاسیک (RK4)

(۲۴) باشد که از روش ترکیبی توابع بلاک-پالس لژاندر حاصل شده است. در نتیجه، جواب تقریبی دستگاه (۲۵) را می‌توان به صورت $\hat{U}(t) = U_{NM}(t)$ در نظر گرفت.

جملات خطا را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$\begin{cases} e_1(t) = e_x(t) = x(t) - \hat{x}(t) \\ = \int_0^t \frac{(t-\zeta)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} (\lambda_1(\zeta, U(\zeta)) - \lambda_1(\zeta, \hat{U}(\zeta))) d\zeta, \\ e_2(t) = e_y(t) = y(t) - \hat{y}(t) \\ = \int_0^t \frac{(t-\zeta)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} (\lambda_2(\zeta, U(\zeta)) - \lambda_2(\zeta, \hat{U}(\zeta))) d\zeta, \\ e_3(t) = e_z(t) = z(t) - \hat{z}(t) \\ = \int_0^t \frac{(t-\zeta)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} (\lambda_3(\zeta, U(\zeta)) - \lambda_3(\zeta, \hat{U}(\zeta))) d\zeta. \end{cases} \quad (26)$$

با استفاده از روابط (۲۶)، مفروضات (i) و (ii) در قضیه و اینکه $t \in [0, 1]$ ، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} |e_k(t)| &\leq \mathcal{K}_{\alpha} L_k \|U - \hat{U}\|_{\infty} \\ &= \mathcal{K}_{\alpha} L_k \max\{\|x - \hat{x}\|_{\infty}, \|y - \hat{y}\|_{\infty}, \|z - \hat{z}\|_{\infty}\}, \end{aligned} \quad (27)$$

که $k = 1, 2, 3$. اگر قرار دهیم $L = \max_{1 \leq k \leq 3} L_k$ ، آنگاه رابطه (۲۷) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\|e_k\|_{\infty} \leq \mathcal{K}_{\alpha} L \max\{\|x - \hat{x}\|_{\infty}, \|y - \hat{y}\|_{\infty}, \|z - \hat{z}\|_{\infty}\}. \quad (28)$$

با توجه به لم ۲، ثابت‌های مثبت $C_{0,2}, C_{0,1}$ و $C_{0,3}$ موجودند به طوری که:

$$\begin{aligned} \|x - \hat{x}\|_{\infty} &\leq C_{0,1} \tau^{\frac{3}{4}-r} \max_{1 \leq i \leq N} \|x\|_{H^r(I_i)} = \gamma_1, \\ \|y - \hat{y}\|_{\infty} &\leq C_{0,2} \tau^{\frac{3}{4}-r} \max_{1 \leq i \leq N} \|y\|_{H^r(I_i)} = \gamma_2, \\ \|z - \hat{z}\|_{\infty} &\leq C_{0,3} \tau^{\frac{3}{4}-r} \max_{1 \leq i \leq N} \|z\|_{H^r(I_i)} = \gamma_3, \end{aligned} \quad (29)$$

که $\tau = NM$ با استفاده از روابط (۲۸) و (۲۹)

⁴ Homotopy analysis method

⁵ Laplace Adomian decomposition method

⁶ Legendre wavelet method

⁷ Adam-Bashforth-Moulton method

مقایسه شده‌اند. همچنین، در شکل ۲، مقایسه بین جواب‌های بدست آمده دستگاه (۲) برای حالت $\alpha = 1$ با روش BPLM و جواب‌های حاصل از RK4 به ازای $N = 2$ و $M = 6, 7, 8$ به صورت گرافیکی نشان داده شده‌اند که موید این نکته می‌باشد که با افزایش $\tau = NM$ ، تقریب مطلوب‌تری حاصل شده است.

همچنین، دستگاه معادلات (۲) برای مقادیر کسری $0 < \alpha < 1$ نیز به روش BPLM حل شده است که نتایج حاصل برای $\alpha_j = 0.5 + 0.1j$ در شکل ۳ گزارش شده‌اند. مشاهده می‌شود وقتی که $\alpha \rightarrow 1$ ، مدل کسری (۲) به فرم مدل کلاسیک (۱) تغییر می‌یابد.

در جداول ۱، ۲ و ۳ گزارش شده‌اند. از آنجایی که دستگاه (۲) فاقد جواب دقیق می‌باشد، از این‌رو، جواب‌های بدست آمده با روش‌های BPLM، HAM، LADM، LWM و ABM می‌توانند با جواب‌های حاصل از روش RK4 به عنوان جواب‌های قابل اعتماد و به عنوان جواب دقیق مقایسه شوند. این مقایسه‌ها نشان می‌دهند که نتایج حاصل از روش توابع ترکیبی بلاک-پالس لژاندر که به سادگی نیز قابل پیاده‌سازی می‌باشد، نسبت به نتایج دیگر روش‌ها دقیق‌تر می‌باشند. جدول ۴، نشان‌دهنده خطای مطلق بین جواب‌های حاصل از RK4 و BPLM به ازای $N=2$ و $M=8$ می‌باشد. در شکل ۱، جواب‌های حاصل از BPLM و RK4

جدول ۱: نتایج عددی $x(t)$

t	BPLM	RK4	HAM	LADM	LWM	ABM
0.0	100	100	100	100	100	100
0.2	100.023	100.023	100.023	100.023	100.023	100.023
0.4	100.047	100.047	100.047	100.046	100.047	100.048
0.6	100.071	100.071	100.071	100.070	100.071	100.073
0.8	100.097	100.097	100.097	100.092	100.097	100.098
1.0	100.122	100.122	100.122	100.112	100.122	100.123

جدول ۲: نتایج عددی $y(t)$

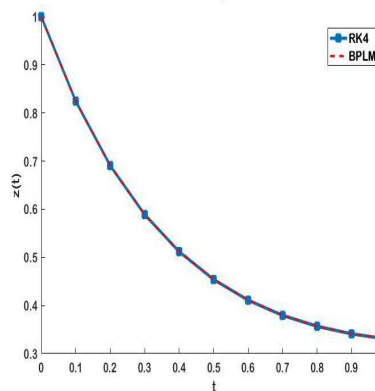
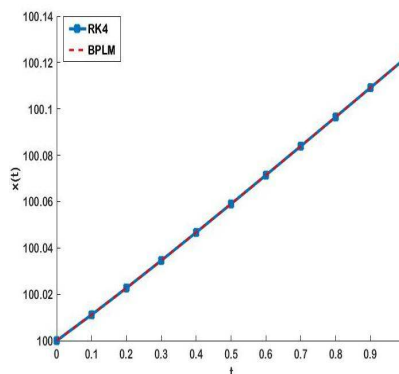
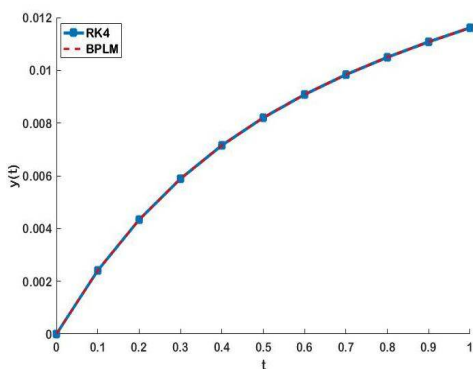
t	BPLM	RK4	HAM	LADM	LWM	ABM
0.0	0	0	0	0	0	0
0.2	0.00434	0.00434	0.00434	0.00436	0.00451	0.00434
0.4	0.00715	0.00715	0.00714	0.00756	0.00727	0.00715
0.6	0.00908	0.00908	0.00909	0.01074	0.00916	0.00908
0.8	0.01049	0.01049	0.01063	0.01336	0.01055	0.01049
1.0	0.01161	0.01161	0.01194	0.01866	0.01167	0.01161

جدول ۳: نتایج عددی $z(t)$

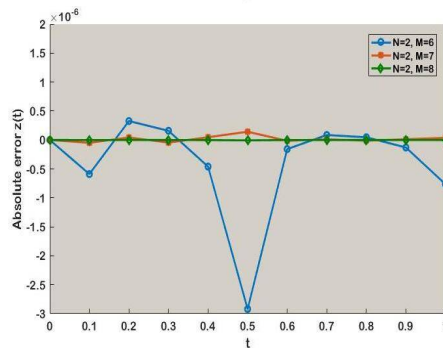
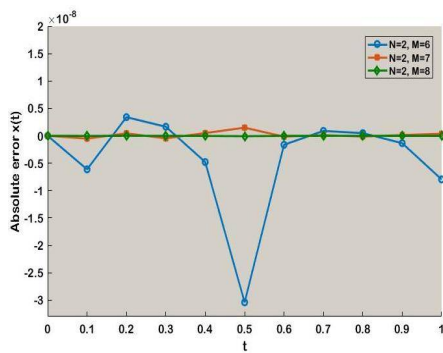
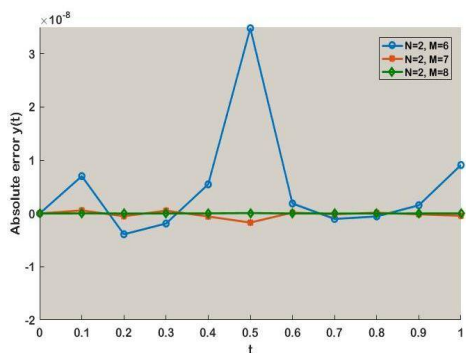
t	BPLM	RK4	HAM	LADM	LWM	ABM
0.0	1	1	1	1	1	1
0.2	0.69070	0.69070	0.69059	0.69581	0.69074	0.6790
0.4	0.51190	0.51190	0.51237	0.53851	0.51192	0.50532
0.6	0.41103	0.41103	0.40994	0.46097	0.41103	0.40745
0.8	0.35684	0.35684	0.35148	0.39607	0.35683	0.35503
1.0	0.33073	0.33073	0.32869	0.27671	0.33072	0.33252

جدول ۴: خطای مطلق بین جواب‌های حاصل از RK4 و BPLM به ازای $M=8$ و $N=2$

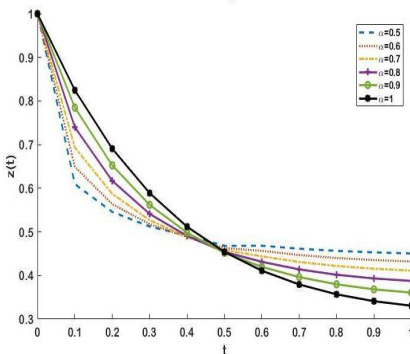
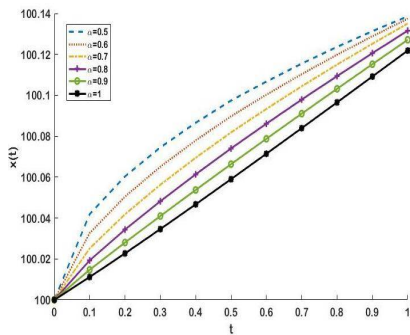
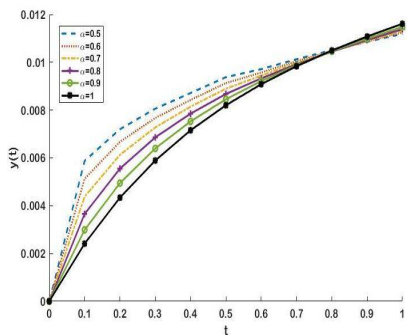
t	$ x_{BPLM} - x_{RK4} $	$ y_{BPLM} - y_{RK4} $	$ z_{BPLM} - z_{RK4} $
0.0	0.0	0.0	0.0
0.2	9.0E-12	9.7E-12	8.09E-10
0.4	2.7E-11	3.1E-11	2.58E-09
0.6	1.5E-11	1.6E-11	1.37E-09
0.8	8.0E-12	8.4E-12	7.03E-10
1.0	2.3E-11	2.5E-11	2.14E-09



شکل ۱: مقایسه جواب‌های تقریبی دستگاه (۲) برای حالت $\alpha = 1$ با استفاده از BPLM و RK4.



شکل ۲: تفاضل بین جوابهای بدست آمده دستگاه (۲) برای حالت $\alpha = 1$ با روش RK4 و جوابهای حاصل از BPLM به ازای $N = 2$ و $M = 6, 7, 8$.



شکل ۳: جوابهای تقریبی حاصل از روش BPLM برای دستگاه (۲) به ازای $\alpha = 0.5 + 0.1j$ ؛ $j = 0, 1, \dots, 5$.

نتیجه‌گیری

در این مقاله، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی از مرتبه کسری به عنوان مدل ریاضی مسئله عفونت HIV در سلول‌های $CD4^+ T$ در نظر گرفته شد. از آنجایی که، جواب دقیق این دستگاه، در دسترس نمی‌باشد، لذا یک روش عددی که مبتنی بر ترکیب توابع بلاک-پالس و چند جمله‌ای‌های لژاندر است، برای یافتن جواب‌های تقریبی این دستگاه معادلات دیفرانسیل مورد استفاده قرار گرفت. با استفاده از این توابع ترکیبی، دستگاه معادلات دیفرانسیل غیرخطی از مرتبه کسری به یک دستگاه معادلات جبری غیرخطی تبدیل می‌شود که قابل حل به وسیله یک روش عددی مناسب همچون روش نیوتن می‌باشد. همچنین، یک کران بالا برای خطای روش نیز ارائه شد. برای بررسی دقت و کارایی روش، یک مثال عددی ارائه شد و نتایج حاصل از روش BPLM با نتایج حاصل از برخی روش‌های دیگر و نیز، روش رونگه-کوتا کلاسیک مرتبه چهار (RK4) مقایسه گردید که تقریب‌های با دقت بالاتری بدست آمدند. در مجموع، این روش ترکیبی علاوه بر سادگی در پیاده‌سازی، دقت مناسبی برای جواب‌ها نیز ارائه می‌دهد.

- [9] Kilbas A. A., Srivastava H. H., Trojillo J. J., "Theory and Applications of Fractional Differential Equations", Elsevier, New York, 2006.
- [10] Hilfer R., "Applications of Fractional Calculus in Physics", World Scientific, Singapore, 2000.
- [11] Baleanu D., Diethelm K., Scalas E., Trojillo J. J., "Fractional Calculus Models and Numerical Methods", World Scientific, Berlin, 2012.
- [12] Tatom F. B., "The relationship between fractional calculus and fractals", *Fractals*, **3** (1995) 217-229.
- [13] Arafa A. A. M., Rida S. Z., Khalil M., "The effect of antiviral drug treatment of human immunodeficiency virus type 1 (HIV-1) described by a fractional order model", *Applied Mathematical Modelling*, **37** (2013) 2189-2196.
- [14] Vahidi A. R., Jalalvand B., "Improving the accuracy of the Adomian decomposition method for solving nonlinear equations", *Applied Mathematical Sciences*, **6** (2012), 487-497.
- [15] Hi L., Yi L., Tang P., "Numerical scheme and dynamic analysis for variable-order fractional van der pol model of nonlinear economic cycle", *Advances in Difference Equations*, **195** (2016) 1-11.
- [16] Sun H. G., Zhang Y., Baleanu W., Chen W., Chen Y. Q., "A new collection of real world applications of fractional calculus in science and engineering", *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **64** (2018) 213-231.
- [17] Vahidi A. R., Javadi S., Khorasani S. M., "Solving System of Nonlinear
- [1] Perelson A. S., Kirschner D. E., Boer R. D., "Dynamics of HIV infection $CD4^+$ T cells", *Mathematical Biosciences*, **114** (1993) 81-125.
- [2] Culshaw R. V., Ruan S., "A delay-differential equation model of HIV infection of $CD4^+$ T cells", *Mathematical Biosciences*, **165** (2000) 27-39.
- [3] Tuckwell H. C., Wan F. Y. M., "Nature of equilibria and effects of drug treatments in some simple viral population dynamical models", *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, **17** (2000) 311-327.
- [4] Wang L., Li M. Y., "Mathematical analysis of the global dynamics of a model for HIV infection of $CD4^+$ T cells", *Mathematical Biosciences*, **200** (2006) 44-57.
- [5] Biazar J., "Solution of the epidemic model by Adomian decomposition method", *Applied Mathematics and Computation*, **173** (2006) 1101-1106.
- [6] Lv C., Yuan Z., "Stability analysis of delay differential equation models of HIV-1 therapy for fighting a virus with another virus", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **352** (2009) 672-683.
- [7] Yan Y., Kou C., "Stability analysis for a fractional differential model of HIV infection of $CD4^+$ T-cells with time delay", *Mathematics and Computers in Simulation*, **82** (2012) 1572-1585.
- [8] Podlubny I., "Fractional Differential Equations", Academic Press, New York, 1999.

- [25] Kumar S., Kumar R., Singh J., Nisar K.S., Kumar D., "An efficient numerical scheme for fractional a model of HIV-1 infection of $CD4^+$ T-cells with the effect of antiviral drug therapy", *Alexandria Engineering Journal*, **59** (2020) 2053-2064.
- [26] Doostdar M. R., Vahidi A. R., Damercheli T., Babolian E., "A Hybrid Functions Method for Solving Linear and Non-linear Systems of Ordinary Differential Equations", *Mathematical Communications*, **26** (2021), 197-213.
- [27] Maleknejad K., Basirat B., Hashemizadeh E., "Hybrid Legendre polynomials and Block-pulse functions approach for nonlinear VolterraFredholm integro-differential equations", *Computers & Mathematics with Applications*, **61** (2011) 2821–2828.
- [28] Kilicman A., Al Zhour Z. A., "Kronecker operational matrices for fractional calculus and some applications", *Applied Mathematics and Computation*, **187** (2007) 250–265.
- [29] Canuto C., Hussaini M. Y., Quarteroni A., Zang T. A., "Spectral methods in fluid dynamics", Springer Verlag, Berlin Heidelberg, 1988.
- Equations by restarted Adomain's method", *Journal of Applied Mathematical and Computation*, **6** (2012) 509-516.
- [18] Vahidi A. R., Damercheli T., "A modified ADM for solving systems of linear Fredholm integral equations of the second kind", *Applied Mathematical Sciences*, **6** (2012), 1267-1273
- [19] Vahidi A. R., Azimzadeh Z., Didgar M., "An efficient method for solving Riccati equation using homotopy perturbation method", *Mathematical Sciences*, **11** (2017) 113-118.
- [20] Ongun M. Y., "The Laplace Adomian decomposition method for solving a model for HIV infection of $CD4^+$ T cells", *Mathematical and Computer Modelling*, **53** (2011) 597–603.
- [21] Ghoreishi M., Ismail A. M., Alomari A., "Application of the homotopy analysis method for solving a model for HIV infection of $CD4^+$ T-cells", *Mathematical and Computer Modelling*, **54** (2011) 3007–3015.
- [22] Khan Y., Vazquez-Leal H., Wu Q., "An efficient iterated method for mathematical biology model", *Neural Computing and Applications*, **23** (2013) 677–682.
- [23] Arafa A. A. M., Rida S., Khalil M., "A fractional-order model of HIV infection with drug therapy effect", *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, **22** (2014) 538–543.
- [24] Lichae B.H., Biazar J., Ayati Z., "The fractional differential model of hiv-1 infection of $CD4^+$ T-cells with description of the effect of antiviral drug treatment", *Computational and Mathematical Methods in Medicine*, Article ID 4059549, 2019.