دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره سی و نهم، آذر و دی ۱۴۰۱
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

قضایای نقطه انطباق و ثابتِ نگاشت‌های (ψ,φ)- انقباضی به طور ضعیف تعمیم‌یافته بر فضای شبه‌مدولار

فاطمه لعل دولت آباد*

استادیار، گروه ریاضی، مرکز آموزش عالی فنی و مهندسی بوئین زهرا، بوئین زهرا، قزوین، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۰۱/۰۴ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۲/۱۷

چکیده

اگر چه قضایای نقطه ثابت در فضای مدولار، دارای کاربرد قابل توجهی در بخش وسیعی از مسائل ریاضی هستند، این قضایا به طور قوی وابسته به فرضیاتی هستند که اغلب در مسائل کاربردی، یا عملی نیستند و یا تعمیم واقعی از قضایای نقطه ثابت فضای برداری نرمدار نیستند. در تحقیقات اخیر تمرکز بر قضایای نقطه ثابت بنیادی همراه با حذف این فرضیات شده است. در واقع در بخش وسیعی از این تحقیقات در فضای مدولار، فرض کرانداریِ تابع حذف شده است. فرض محدب بودن مدولار نیز باعث القای نرم می‌شود و منجر به تبدیل شدن فضای مدولار به فضای نرمدار می‌گردد از اینرو حذف این شرط نیز باعث اثبات قضایایی جدید و قوی بر فضای مدولار می‌گردد. اما چنانچه می‌دانیم اکثر قضایای نقطه ثابت بر فضای مدولار محدب اثبات شده‌اند.

در این مقاله، تعریف فضای شبه‌مدولار را که در واقع تعمیمی از فضای مدولار است را ارائه می‌دهیم. و قضایای نقطه‌ی ثابت انطباق نگاشت‌های (ψ,φ)–انقباضی به طور ضعیف تعمیم‌یافته بر این فضا را اثبات می‌کنیم. قابل ذکر است که قضایای اثبات شده در اینجا، بدون فرض کرانداری تابع و فرض تحدب شبه‌مدولار است. از اینرو نتایج به دست آمده در این مقاله، قضایای نقطه ثابت را در چند وجه تعمیم می‌دهند. همچنین ما دو مثال می‌آوریم و به کمک قضایای اثبات شده در این مقاله وجود نقطه ثابت را نشان دهیم. علاوه بر این، بعنوان کاربرد، وجود جواب برای دستگاه خاصی از معادلات انتگرالی را به کمک نتایج اصلی نشان می‌دهیم.

واژه‌های کلیدی: نقطه ثابت مشترک، فضای شبه‌مدولار، نگاشت‌های (ψ,φ)–انقباضی به طور ضعیف تعمیم‌یافته.

* عهده‌دار مکاتبات: Email: Lael@bzeng.ikiu.ac.ir

۱- پیشینه تحقیق

قضیه‌ی نگاشت انقباضی باناخ [۱]، مشهور به اصل انقباض باناخ، از نتایج مشهور در نظریه نقطه ثابت است. این قضیه دارای کاربردهای وسیعی در ریاضی محض و کاربردی است. این اصل مهم توسط نویسندگان زیادی تعمیم داده شده است[۲۱-۲۰]. اخیرا، سلیم، عباس، علی و رضا [۲] نتایجی از نقطه ثابتِ تعمیم نگاشت‌های چندمقداری سوزوکی $(f,\theta,L)-$انقباضی و نقطه انطباق و ثابت مشترک بر فضای متریک به دست آوردند. در سال ۲۰۱۹، لی، عادل و ساواس [۳] انقباض جدیدی بنام $Z_\theta-$انقباض تعریف کردند و قضایایی از نقطه ثابت را بر فضای متریک تام با این انقباض ثابت کردند. مفهوم نگاشت‌های $\varphi-$انقباضی توسط رُدز [۴] معرفی شد. سپس، برخی از محققان شرایط $\varphi-$انقباضیِ ضعیف را تعریف کردند و وجود نقطه ثابت را برای این نگاشت‌ها بحث کردند[۵-۶]. به ویژه، در [۷-۸] نتایجی در زمینه وجود نقطه ثابتِ مشترک برای نگاشت‌های انقباضی به طور ضعیف تعمیم یافته، مورد بررسی قرار داده شده‌اند.

صورت دیگری از تعمیم قضایای نقطه ثابت در واقع تعمیم فضایی است که توابع بر آن تعریف می‌شوند. در سال ۲۰۲۰، عباس، لعل و سلیم [۱۹ و ۹] مفهوم نگاشت‌های چند مقداری $\psi-$ انقباضی و $\psi-$ انقباضی یکنوا بر فضاهای $b-$متریک فازی را تعریف و نتایج نقطه ثابت را برای این نگاشت‌های انقباضی ثابت کردند. سلیم، اقبال و رادنویک [۱۰] برخی قضایای نقطه ثابت، نقطه ثابت مشترک و نقطه انطباق و ثابت را برای $F-$انقباض‌ها بر فضای متریک تعمیم‌یافته به اثبات رساندند. از سوی دیگر، نظریه نقطه ثابت در فضاهای مدولار مورد توجه زیادی قرار گرفت زیرا فضای مدولار، تعمیمی از فضای نرمدار است [۱۵-۱۱]. دلیل رشد قضایای نقطه ثابت در فضاهای مدولار به دلیل کاربردهای وسیعی است که این قضایا در مکانیک کوانتومی، یادگیری ماشین و غیره دارند. نظریه نقطه ثابت در فضاهای مدولار در [۱۶] با استفاده از تکنیک ساخت دنباله‌ی همگرا به نقطه ثابت، مورد بررسی قرار گرفت. این کار، مرجع بسیاری از مقالات نقطه ثابت گردید [۱۷-۱۸]. در واقع یک مدولار بر فضای برداری X یک تابعک حقیقی بر X است که شرایط زیر را دارد:

۱) $\rho(x)=\cdot$ اگر و تنها اگر $x=\cdot$،

۲) $\rho(x)=\rho(-x)$

۳) برای هر $x,y\in X$ و $\alpha,\beta\geq \cdot$ که $\alpha+\beta=۱$ داریم

$$\rho(\alpha x+\beta y)\leq \rho(x)+\rho(y)$$

در این صورت (X,ρ) فضای مدولار نامیده می‌شود. برای یک مدولار داده‌شده فضای برداری متناظر X_ρ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$X_\rho=\left\{x\in X:\lim_{\lambda\to\cdot}\rho(\lambda x)=\cdot\right\}$$

که فضای برداری مدولار نامیده می‌شود.

در این مقاله، مفهوم شبه‌مدولار که با حذف یکی از شرایط مدولار بدست می‌آید و تعمیمی از فضای مدولار است، را بیان می‌کنیم و مفاهیم مورد نیاز جهت اثبات نتایج اصلی در فضای شبه‌مدولار را تعریف می‌کنیم. سپس در بخش نتایج اصلی، به مطالعه‌ی قضایای نقطه ثابتِ مشترک نگاشت‌های $(\psi,\varphi)-$انقباضی ضعیف می‌پردازیم. پس از آن، مثال‌هایی، برای تایید نتایج اصلی آورده شده است. در پایان، از نتایج به دست‌آمده برای اثبات وجود جواب برای معادلات انتگرالی استفاده خواهیم کرد.

۲- مقدمات و تعاریف

مساله در این مقاله، $\mathbb{N}$ نماد مجموعه‌ی اعداد طبیعی و $\mathbb{R}^+=[\cdot,+\infty)$. همچنین مجموعه‌ی توابع صعودی و پیوسته‌ی $\psi:[\cdot,+\infty)\to[\cdot,+\infty)$

را با نماد Ψ نمایش می‌دهیم و مجموعه‌ی توابع صعودی و پیوسته‌ی $\varphi:[۰,+\infty)\to[۰,+\infty)$ که در آن $\varphi(t)=۰$ تنها در صورتی که $t=۰$ را با نماد Φ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۲-۱. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی است. نگاشت $\rho:X\to[۰,+\infty)$ را شبه‌مدولار نامند در صورتی که به ازای هر $x,y,z\in X$ شرایط زیر برقرار باشد:

(۱) اگر $\rho(x)=۰$، انگاه $x=۰$،

(۲) $\rho(x)=\rho(-x)$،

(۳) به ازای هر $\alpha,\beta\geq 0$ که $\alpha+\beta=1$ داریم:

$$\rho(\alpha x+\beta y)\leq\rho(x)+\rho(y)$$

زوج (X,ρ) را فضای شبه‌مدولار می‌نامند.

بنابر بند (۱) در فضای شبه‌مدولار $\rho(x)=0$ نتیجه می‌دهد که $x=0$. اما عکس آن لزوما برقرار نیست یعنی ممکن است که $\rho(0)$ عدد مثبت حقیقی باشد.

مثال ۲-۲. فرض کنید تابع $\rho:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ به ازای هر $x,y\in\mathbb{R}^+$ در ویژگی $\rho(x-y)=(x+y)^2$ صدق کند. در این صورت $(\mathbb{R}^+,\rho)$ را فضای شبه‌مدولار می‌نامند.

اثبات. از محدب بودن تابع $f(x)=x^2$ $(x>0)$ نتیجه می‌گیریم که به ازای هر $\alpha,\beta\in[0,1]$، $(\alpha a+\beta b)^2\leq\alpha a^2+\beta b^2$ برقرار است. در این صورت به ازای هر $x,y,z\in\mathbb{R}^+$ داریم

$$\begin{aligned}&\rho(\alpha x+\beta y)=\\&(\alpha x-\beta y)^2=\\&(\alpha x+\beta(-y))^2\leq\\&\alpha x^2+\beta y^2\leq\rho(x)+\rho(y)\end{aligned}$$

بنابراین $(\mathbb{R}^+,\rho)$ را فضای شبه‌مدولار می‌نامند.

تعریف ۲-۳. فرض کنید (X,ρ) یک فضای شبه‌مدولار و $\{x_n\}$ یک دنباله در X است.

(۱) دنباله $\{x_n\}$ را همگرا به x گوییم هر گاه

$$\lim_{n\to+\infty}\rho(x_n-x)=\rho(0)$$

(۲) دنباله $\{x_n\}$ را کوشی گوییم هر گاه

$$\lim_{n,m\to+\infty}\rho(x_n-x_m)=\rho(0)$$

(۳) فضای (X,ρ) را تام نامیم هر گاه هر دنباله‌ی کوشی $\{x_n\}$ از آن همگرا به نقطه‌ای مانند x باشد. یعنی $\lim_{n,m\to+\infty}\rho(x_n-x_m)=\lim_{n\to+\infty}\rho(x_n-x)=\rho(0)$

(۴) مجموعه‌ی $B\subseteq X$ را بسته نامیم هر گاه شامل حدهای تمام دنباله‌های خود باشد که در X همگرا هستند.

تعریف ۲-۴. دو خودنگاشت f و g را بر مجموعه X در نظر بگیرید. اگر به ازای یک $x\in X$ داشته باشیم که $w=fx=gx$ در این صورت x را نقطه‌ی انطباق[1] f و g می‌نامند. مجموعه‌ی نقاط انطباق f و g را با $C(f,g)$ نمایش می‌دهند.

تعریف ۲-۵. دو خودنگاشت f و g را بر مجموعه X در نظر بگیرید. در این صورت f و g به طور ضعیف قابل جابجایی نامند، هرگاه به ازای هر $x\in C(f,g)$ داشته باشیم:

$$fx=gx\Rightarrow fgx=gfx$$

تعریف ۲-۶. برای فضای شبه‌مدولار (X,ρ)، تابع w_ρ که تابع رشد نامیده می‌شود بر $[0,+\infty)$ به صورت زیر تعریف شود:

$$w_\rho(t)=\inf\left\{\begin{matrix}w:\rho(tx)\leq w\rho(x):\\ x\in X,\quad 0<\rho(x)\end{matrix}\right\}$$

[1] Coincidence point

لم۲-۷. فرض کنید X یک مجموعه ناتهی و دنباله‌های $\{x_n\}$و $\{y_n\}$ به ترتیب همگرا به x و y هستند. در این صورت داریم:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{w_\rho^2(2)}\rho(x-y)-\frac{1}{w_\rho(2)}\rho(x-x)\\
&-\rho(y-y)\le \liminf_{n\to+\infty}\rho(x_n-y_n)\\
&\qquad\le \limsup_{n\to+\infty}\rho(x_n-y_n)\\
&\qquad\le w_\rho(2)\rho(x-x)+\\
&w_\rho^2(2)\rho(y-y)+w_\rho^2(2)\rho(x-y)
\end{aligned}
$$

به ویژه، اگر $\rho(x-y)=0$، در این صورت خواهیم داشت $\lim_{n\to+\infty}\rho(x_n-y_n)=0$. بعلاوه ، برای هر $z\in X$ داریم

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{w_\rho(2)}\rho(x-z)-\rho(x-x)\le\\
&\qquad\liminf_{n\to+\infty}\rho(x_n-z)\le\\
&\qquad\limsup_{n\to+\infty}\rho(x_n-z)\le\\
&w_\rho(2)\rho(x-z)+w_\rho(2)\rho(x-x)
\end{aligned}
$$

همچنین، اگر $\rho(x-x)=0$ داریم

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{w_\rho(2)}\rho(x-z)\le\\
&\liminf_{n\to+\infty}\rho(x_n-z)\le\\
&\limsup_{n\to+\infty}\rho(x_n-z)\le w_\rho(2)\rho(x-z)
\end{aligned}
$$

اثبات. با استفاده از نامساوی مثلثی شبه‌مدولار به‌آسانی می‌توان دید که

$$
\begin{aligned}
&\rho(x-y)\le w_\rho(2)\rho(x-x_n)+\\
&w_\rho^2(2)\rho(x_n-y_n)+\\
&w_\rho^2(2)\rho(y-y_n)
\end{aligned}
$$

و

$$
\begin{aligned}
&\rho(x_n-y_n)\le w_\rho(2)\rho(x_n-x)+\\
&w_\rho^2(2)\rho(x-y)+\\
&w_\rho^2(2)\rho(y-y_n)
\end{aligned}
$$

با استفاده از حد پایینی وقتی $n\to+\infty$ در اولین نامساوی و حد بالایی در دومین نامساوی به اولین نتیجه مورد نظر می‌رسیم. به‌طور مشابه، با استفاده از نامساوی مثلثی بقیه روابط به دست می‌آیند.

لم۲-۸. فرض کنید (X,ρ) یک فضای شبه‌مدولار است. در این صورت

(۱) اگر $\{x_n\}$ یک دنباله باشد که $\lim_{n\to+\infty}\rho(x_n-x_{n+1})=0$، آنگاه داریم

$$\lim_{n\to+\infty}\rho(x_n-x_n)=\lim_{n\to+\infty}\rho(x_{n+1}-x_{n+1})=0.$$

(۲) اگر $x\neq y$، آنگاه $\rho(x-y)>0$.

اثبات. (۱) بنابر نامساوی مثلثی در شبه‌مدولار داریم

$$\rho(x_n-x_n)\le 2w_\rho(2)\rho(x_{n+1}-x_n)$$

با حد گیری از دو طرف نامساوی و بکارگیری فرض نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{n\to+\infty}\rho(x_n-x_n)=0$$

به طور مشابه داریم

$$\lim_{n\to+\infty}\rho(x_{n+1}-x_{n+1})=0$$

و نتیجه‌ی مطلوب حاصل می‌شود.

(۲) از عکس نقیض تعریف ۲-۱ بند (۱) از اینکه $x-y\neq 0$ نتیجه می‌گیریم که $\rho(x-y)\neq 0$. در نتیجه $\rho(x-y)>0$.

اکنون آمادگی این را داریم تا نتایج اصلی این مقاله را بر فضای شبه‌مدولار بیان و اثبات کنیم.

۳- نتایج اصلی

در این بخش، وجود و یکتایی نقطه انطباق ثابت و نقطه ثابت مشترک، برای نگاشت‌های (ψ,φ)– انقباضی به طور ضعیف تعمیم‌یافته که به طور ضعیف قابل جابجایی هستند بر فضای شبه‌مدولار تام مورد بررسی قرار می‌گیرند.

قضیه۳-۱. فرض کنید (X,ρ) یک فضای شبه مدولار است و $f,g:X\to X$ خودنگاشت‌هایی هستند که $f(X)\subset g(X)$ و $g(X)$ یک زیر مجموعه‌ی بسته از X است. اگر توابع $\psi\in\Psi$ و $\varphi\in\Phi$ وجود داشته باشد به طوری‌که

$$\psi\left(w_\rho^2(2)\left[\rho(fx-fy)\right]^2\right)\le \psi\left(N_1(x,y)\right)-\varphi\left(M_1(x,y)\right) \qquad (1-3)$$

که

$$N_1(x,y)=\max\{\left[\rho(fx-gx)\right]^2, \left[\rho(gx-gy)\right]^2,\left[\rho(fy-gy)\right]^2, \rho(fx-gx)\rho(fx-fy) \rho(fx-gx)\rho(gx-gy)\},$$

و

$$M_1(x,y)=\max\{\left[\rho(fy-gy)\right]^2, \left[\rho(fx-gy)\right]^2,\left[\rho(gx-gy)\right]^2, \frac{\left[\rho(fx-gx)\right]^2\left[1+\left[\rho(gx-gy)\right]^2\right]}{1+\left[\rho(fx-gy)\right]^2}\}$$

در این صورت f و g دارای نقطه انطباق منحصر بفرد در X است. علاوه بر این، f و g دارای نقطه ثابت مشترک[1] منحصر بفرد است.

اثبات. فرض کنید $x_0\in X$. از اینکه $f(X)\subset g(X)$، $x_1\in X$ وجود دارد که $fx_0=gx_1$. حال دنباله $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ در X را به صورت $y_n=fx_n=gx_{n+1}$ برای هر $n\in\mathbb{N}$ تعریف می‌کنیم. اگر به ازای یک $n\in\mathbb{N}$، $y_n=y_{n+1}$، آنگاه $y_n=y_{n+1}=gx_{n+1}=fx_{n+1}$، در این صورت f و g دارای نقطه انطباق است. بدون کاستن از کلیت، فرض می‌کنیم $y_n\ne y_{n+1}$ (با لم ۲-۸، می‌دانیم $\rho(y_n-y_{n+1})>0$) برای هر $n\in\mathbb{N}$. با بکار بردن رابطه (۳-۱) به ازای $x=x_n$ و $y=x_{n+1}$، داریم

$$\psi\left(w_\rho^2(2)\left[\rho(y_n-y_{n+1})\right]^2\right)= \psi\left(w_\rho^2(2)\left[\rho(fx_n-fx_{n+1})\right]^2\right)\le \psi\left(N_1(x_n,x_{n+1})\right)-\varphi\left(M_1(x_n,x_{n+1})\right) \qquad (2-3)$$

که

$$N_1(x_n,x_{n+1})=\max\{\left[\rho(y_n-y_{n-1})\right]^2, \left[\rho(y_n-y_{n-1})\right]^2,\left[\rho(y_{n+1}-y_n)\right]^2, \rho(y_n-y_{n-1})\rho(y_{n+1}-y_n), \left[\rho(y_n-y_{n-1})\right]^2\}, \qquad (3-3)$$

و

$$M_1(x_n,x_{n+1})=\max\{\left[\rho(y_{n+1}-y_n)\right]^2, \left[\rho(y_n-y_n)\right]^2,\left[\rho(y_{n-1}-y_n)\right]^2, \frac{\left[\rho(y_n-y_{n-1})\right]^2\left[1+\left[\rho(y_{n-1}-y_n)\right]^2\right]}{1+\left[\rho(y_n-y_n)\right]^2}\}. \qquad (4-3)$$

اگر برای یک $n\in\mathbb{N}$، داشته باشیم

$$\rho(y_n-y_{n-1})\le\rho(y_n-y_{n+1}) \;,$$

از رابطه (۳-۳) و (۳-۴) داریم

$$N_1(x_n,x_{n+1})=\left[\rho(y_n-y_{n+1})\right]^2$$

و

$$\left[\rho(y_{n+1}-y_n)\right]^2\le M_1(x_n,x_{n+1})$$

[1] common

از نامساوی (۳-۲) و نامساوی فوق داریم

$$\psi\left(\left[\rho(y_n - y_{n+1})\right]^2\right) \le \psi\left(w_\rho^2(2)\left[\rho(y_n - y_{n+1})\right]^2\right) \le \psi\left(N_1(x_n, x_{n+1})\right) - \varphi\left(M_1(x_n, x_{n+1})\right) \le \psi\left(\left[\rho(y_n - y_{n+1})\right]^2\right) - \varphi\left(\left[\rho(y_n - y_{n+1})\right]^2\right), \quad (5-3)$$

که نتیجه می‌دهد $\varphi\left(\left[\rho(y_n - y_{n+1})\right]^2\right) = 0$ یعنی $y_n = y_{n+1}$ و این تناقض است. بنابراین $\rho(y_n - y_{n+1}) < \rho(y_n - y_{n-1})$ و $\{\rho(y_n - y_{n+1})\}$ یک دنباله‌ی ناصعودی است و بنابراین $r \ge 0$ وجود دارد که

$$\lim_{n\to+\infty} \rho(y_n - y_{n+1}) = r.$$

با بکاربردن مجدد رابطه‌ی (۳-۳) و (۳-۴)، داریم

$$N_1(x_n, x_{n+1}) = \left[\rho(y_n - y_{n-1})\right]^2$$

و

$$\left[\rho(y_n - y_{n-1})\right]^2 \le M_1(x_n, x_{n+1}),$$

این نتیجه می‌دهد که

$$\psi\left(\left[\rho(y_n - y_{n+1})\right]^2\right) \le \psi\left(N_1(x_n, x_{n+1})\right) - \varphi\left(M_1(x_n, x_{n+1})\right) \le \psi\left(\left[\rho(y_n - y_{n-1})\right]^2\right) - \varphi\left(\left[\rho(y_n - y_{n-1})\right]^2\right).$$

حال فرض کنید که $r > 0$. در رابطه (۳-۵)، وقتی $n \to +\infty$، داریم $\psi(r^2) \le \psi(r^2) - \varphi(r^2)$ که این تناقض است. یعنی نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{n\to+\infty} \rho(y_n - y_{n+1}) = r = 0$$

از آنجایی که $0 \le \rho(0) \le \lim_{n\to+\infty} \rho(y_n - y_{n+1}) = 0$، نتیجه می‌گیریم که $\rho(0) = 0$. پس

$$\lim_{n\to+\infty} \rho(y_n - y_{n+1}) = r = \rho(0) = 0 \quad (6-3)$$

حال نشان می‌دهیم که $\lim_{n,m\to+\infty} \rho(y_n - y_m) = \rho(0)$. فرض خلف می‌کنیم که $\lim_{n,m\to+\infty} \rho(y_n - y_m) \ne 0$. این نشان می‌دهد که $\varepsilon > 0$ وجود دارد بطوریکه زیردنباله‌هایی مانند $\{y_{m_k}\}$ و $\{y_{n_k}\}$ از $\{y_n\}$ می‌توان یافت که n_k کوچکترین اندیسی است که $n_k > m_k > k$ و $\varepsilon \le \rho(y_{m_k} - y_{n_k})$ و همچنین $\rho(y_{m_k} - y_{n_k-1}) < \varepsilon$. با استفاده از نامساوی مثلثِ شبه‌مدولار داریم:

$$\varepsilon^2 \le \left[\rho(y_{m_k} - y_{n_k})\right]^2 \le [w_\rho(2)\rho(y_{m_k} - y_{n_k-1}) + w_\rho(2)\rho(y_{n_k-1} - y_{n_k})]^2 = w_\rho^2(2)\left[\rho(y_{m_k} - y_{n_k-1})\right]^2 + w_\rho^2(2)\left[\rho(y_{n_k-1} - y_{n_k})\right]^2 + 2w_\rho^2(2)\rho(y_{m_k} - y_{n_k-1})\rho(y_{n_k-1} - y_{n_k}) \le w_\rho^2(2)\varepsilon^2 + w_\rho^2(2)\left[\rho(y_{n_k-1} - y_{n_k})\right]^2 + 2w_\rho^2(2)\rho(y_{m_k} - y_{n_k-1})\rho(y_{n_k-1} - y_{n_k})$$

با استفاده از تساوی (۳-۶) و گرفتن حد بالایی از نامساوی بالا وقتی $k \to +\infty$، داریم

$$\varepsilon^2 \le \limsup_{k\to+\infty}\left[\rho(y_{m_k} - y_{n_k})\right]^2 \le w_\rho^2(2)\varepsilon^2$$

با استدلالی مشابه، به نتایج زیر می‌رسیم:

$$\varepsilon^2 \le \left[\rho(y_{m_k} - y_{n_k})\right]^2 \le [w_\rho(2)\rho(y_{m_k} - y_{n_k-1}) + w_\rho(2)\rho(y_{n_k-1} - y_{n_k})]^2 = w_\rho^2(2)\left[\rho(y_{m_k} - y_{n_k-1})\right]^2 + w_\rho^2(2)\left[\rho(y_{n_k-1} - y_{n_k})\right]^2 + 2w_\rho^2(2)\rho(y_{m_k} - y_{n_k-1})\rho(y_{n_k-1} - y_{n_k}) \quad (7-3)$$

و

$$\left[\rho(y_{m_k}-y_{n_k})\right]^2 \le [w_\rho(2)\rho(y_{m_k}-y_{m_k-1})+ w_\rho(2)\rho(y_{m_k-1}-y_{n_k})]^2 = w_\rho^2(2)\left[\rho(y_{m_k-1}-y_{m_k})\right]^2 + w_\rho^2(2)\left[\rho(y_{m_k}-y_{n_k})\right]^2 + 2w_\rho^2(2)\rho(y_{m_k-1}-y_{m_k})\rho(y_{m_k}-y_{n_k}) \quad (8-3)$$

و همچنین

$$\left[\rho(y_{m_k-1}-y_{n_k})\right]^2 \le [w_\rho(2)\rho(y_{m_k-1}-y_{m_k})+ w_\rho(2)\rho(y_{m_k}-y_{n_k})]^2 = w_\rho^2(2)\left[\rho(y_{m_k-1}-y_{m_k})\right]^2 + w_\rho^2(2)\left[\rho(y_{m_k}-y_{n_k})\right]^2 + 2w_\rho^2(2)\rho(y_{m_k-1}-y_{m_k})\rho(y_{m_k}-y_{n_k}). \quad (9-3)$$

از رابطه (۳-۷) داریم

$$\frac{\varepsilon^2}{w_\rho^2(2)} \le \limsup_{k\to+\infty}\left[\rho(y_{m_k}-y_{n_k-1})\right]^2 \le \varepsilon^2$$

از رابطه (۳-۸) و (۳-۹)، داریم

$$\frac{\varepsilon^2}{w_\rho^2(2)} \le \limsup_{k\to+\infty}\left[\rho(y_{m_k-1}-y_{n_k})\right]^2 \le w_\rho^4(2)\varepsilon^2$$

به‌طور مشابه، نتیجه می‌گیریم

$$\left[\rho(y_{m_k-1}-y_{n_k-1})\right]^2 \le [w_\rho(2)\rho(y_{m_k-1}-y_{m_k})+ w_\rho(2)\rho(y_{m_k}-y_{n_k-1})]^2 = w_\rho^2(2)\left[\rho(y_{m_k-1}-y_{m_k})\right]^2 + w_\rho^2(2)\left[\rho(y_{m_k}-y_{n_k-1})\right]^2 + 2w_\rho^2(2)\rho(y_{m_k-1}-y_{m_k})\rho(y_{m_k}-y_{n_k-1})$$

و

$$\left[\rho(y_{m_k}-y_{n_k})\right]^2 \le [w_\rho(2)\rho(y_{m_k}-y_{m_k-1})+ w_\rho(2)\rho(y_{m_k-1}-y_{n_k})]^2 = w_\rho^2(2)\left[\rho(y_{m_k}-y_{m_k-1})\right]^2 + w_\rho^2(2)\left[\rho(y_{m_k-1}-y_{n_k})\right]^2 + 2w_\rho^2(2)\rho(y_{m_k}-y_{m_k-1})\rho(y_{m_k-1}-y_{n_k}) \le w_\rho^2(2)\left[\rho(y_{m_k}-y_{m_k-1})\right]^2 + w_\rho^2(2)[w_\rho(2)\rho(y_{m_k-1}-y_{n_k-1})+ w_\rho(2)\rho(y_{n_k-1}-y_{n_k})]^2 + 2w_\rho^2(2)\rho(y_{m_k}-y_{m_k-1})+ [w_\rho(2)\rho(y_{m_k-1}-y_{n_k-1})+ w_\rho(2)\rho(y_{n_k-1}-y_{n_k})]$$

این نتیجه می‌دهد

$$\frac{\varepsilon^2}{w_\rho^4(2)} \le \limsup_{k\to+\infty}\left[\rho(y_{m_k-1}-y_{n_k-1})\right]^2 \le w_\rho^2(2)\varepsilon^2$$

بر اساس تعریف $N_1(x,y)$ داریم

$$N_1(x_{m_k},x_{n_k}) = \max\{\left[\rho(y_{m_k}-y_{m_k-1})\right]^2, \left[\rho(y_{m_k-1}-y_{n_k-1})\right]^2, \left[\rho(y_{n_k}-y_{n_k-1})\right]^2, \rho(y_{m_k}-y_{m_k-1})\rho(y_{m_k}-y_{n_k}) \rho(y_{m_k}-y_{m_k-1})\rho(y_{m_k-1}-y_{n_k-1})\}$$

که نتیجه می‌دهد

$$\limsup_{k\to+\infty} N_1(x_{m_k},x_{n_k}) \le \max\{0, w_\rho^2(2)\varepsilon^2, 0,0,0\} = w_\rho^2(2)\varepsilon^2 \quad (10-3)$$

همچنین،

$$M_1(x_{m_k},x_{n_k})=\max\{\left[\rho(y_{n_k}-y_{n_k-1})\right]^2, \left[\rho(y_{m_k}-y_{n_k-1})\right]^2, \left[\rho(y_{m_k-1}-y_{n_k-1})\right]^2, \frac{\left[\rho(y_{m_k}-y_{m_k-1})\right]^2\left[1+\left[\rho(y_{m_k-1}-y_{n_k-1})\right]^2\right]}{1+\left[\rho(y_{m_k}-y_{n_k-1})\right]^2}\}$$

به آسانی می‌توان نشان داد که

$$\liminf_{k\to+\infty} M_1(x_{m_k},x_{n_k})\geq \max\left\{0,\frac{\varepsilon^2}{w_\rho^2(2)},\frac{\varepsilon^2}{w_\rho^4(2)},0\right\}\geq\frac{\varepsilon^2}{w_\rho^4(2)} \quad (11-3)$$

با بکار بستن رابطه (۳-۱) به ازای $x=x_{m_k}$ و $y=x_{n_k}$ داریم

$$\psi\left(\left[\rho(y_{m_k}-y_{n_k})\right]^2\right)\leq \psi\left(w_\rho^2(2)\left[\rho(y_{m_k}-y_{n_k})\right]^2\right)\leq \psi\left(N_1(x_{m_k},x_{n_k})\right)-\varphi\left(M_1(x_{m_k},x_{n_k})\right)$$

از (۳-۱۰) نتیجه می‌گیریم

$$\psi(w_\rho^2(2)\varepsilon^2)\leq \psi\left(w_\rho^2(2)\limsup_{k\to+\infty}\left[\rho(fx_{m_k}-fx_{n_k})\right]^2\right)\leq \psi\left(\limsup_{k\to+\infty}N_1(x_{m_k},x_{n_k})\right)- \varphi\left(\liminf_{k\to+\infty}M_1(x_{m_k},x_{n_k})\right)\leq \psi(w_\rho^2(2)\varepsilon^2)-\varphi\left(\liminf_{k\to+\infty}M_1(x_{m_k},x_{n_k})\right)$$

که نتیجه می‌دهد

$$\liminf_{k\to+\infty}M_1(x_{n_k},x_{m_k})=0,$$

و این متناقض با (۳-۱۱) است. بنابراین $\{y_n\}$ یک دنباله‌ی کوشی در X است و $\lim_{n,m\to+\infty}\rho(y_n-y_m)=\rho(0)$. چون X یک فضای شبه‌مدولار تام است، $u\in X$ وجود دارد که

$$\lim_{n\to+\infty}\rho(y_n-u)= \lim_{n\to+\infty}\rho(fx_n-u)= \lim_{n\to+\infty}\rho(gx_{n+1}-u)= \lim_{n,m\to+\infty}\rho(y_n-y_m)= \rho(u-u)=0 \quad (12-3)$$

علاوه بر این، چون $g(X)$ بسته است پس $u\in g(X)$. از اینرو، می‌توان $z\in X$ را انتخاب کرد که $u=gz$، و رابطه (۳-۱۲) را به صورت زیر بازنویسی کرد:

$$\lim_{n\to+\infty}\rho(y_n-gz)= \lim_{n\to+\infty}\rho(fx_n-gz)= \lim_{n\to+\infty}\rho(gx_{n+1}-gz)=0$$

اگر $fz\neq gz$، با در نظر گرفتن $x=x_{n_k}$ و $y=z$ در رابطه (۳-۱)، داریم

$$\psi\left(w_\rho^2(2)\left[\rho(y_{n_k}-fz)\right]^2\right)= \psi\left(w_\rho^2(2)\left[\rho(fx_{n_k}-fz)\right]^2\right)\leq \psi\left(N_1(x_{n_k},z)\right)-\varphi\left(M_1(x_{n_k},z)\right) \quad (13-3)$$

که

$$N_1(x_{n_k},z)=\max\{\left[\rho(y_{n_k}-y_{n_k-1})\right]^2, \left[\rho(y_{n_k-1}-gz)\right]^2, \left[\rho(fz-gz)\right]^2, \rho(y_{n_k}-y_{n_k-1})\rho(y_{n_k}-fz) \rho(y_{n_k}-y_{n_k-1})\rho(y_{n_k-1}-gz)\}$$

و

$$M_1(x_{n_k},z)=\max\{[\rho(fz-gz)]^2,\\ [\rho(y_{n_k}-gz)]^2,[\rho(y_{n_k-1}-gz)]^2,\\ \frac{[\rho(y_{n_k}-y_{n_k-1})]^2\left[1+[\rho(y_{n_k-1}-gz)]^2\right]}{1+[\rho(y_{n_k}-gz)]^2}\}$$

و بنابراین

$$\lim_{k\to+\infty}\sup N_1(x_{n_k},z)=\\ \max\{0,0,[\rho(gz-fz)]^2,0,0\}=\\ [\rho(gz-fz)]^2$$

و

$$\lim_{k\to+\infty}\inf M_1(x_{n_k},z)=\\ \max\{[\rho(gz-fz)]^2,0,0,0\}=\\ [\rho(gz-fz)]^2$$

حد بالایی رابطه‌ی (۳-۱۳) وقتی $k\to+\infty$،

$$\psi\left([\rho(gz-fz)]^2\right)=\\ \psi\left(w_\rho^2(2).\frac{1}{w_\rho^2(2)}[\rho(gz-fz)]^2\right)\le\\ \psi\left(w_\rho^2(2)\lim_{k\to+\infty}\sup[\rho(fx_{n_k}-fz)]^2\right)\le\\ \psi\left(\lim_{k\to+\infty}\sup N_1(x_{n_k},z)\right)-\\ \varphi\left(\lim_{k\to+\infty}\inf M_1(x_{n_k},z)\right)=\\ \psi\left([\rho(gz-fz)]^2\right)-\varphi\left([\rho(gz-fz)]^2\right),$$

که نتیجه می‌دهد $\varphi\left([\rho(fz-gz)]^2\right)=0$. در نتیجه $\rho(fz-gz)=0$، یعنی $fz=gz$. پس $u=fz=gz$ نقطه انطباق f و g است. همچنین نشان می‌دهیم که نقطه‌ی انطباق منحصر بفرد است. فرض خلف می‌کنیم که $z,z'\in C(f,g)$ و $z\neq z'$. با بکار بستن رابطه‌ی (۳-۱) به ازای $x=z$ و $y=z'$ داریم

$$\psi\left([\rho(fz-gz')]^2\right)\le\\ \psi\left(w_\rho^2(2)[\rho(fz-gz')]^2\right)\le\\ \psi\left(N_1(z,z')\right)-\varphi\left(M_1(z,z')\right)\le\\ \psi\left([\rho(fz-gz')]^2\right)-\varphi\left([\rho(fz-gz')]^2\right).$$

بنابراین، $fz=gz'$. یعنی نقطه‌ی انطباق منحصر بفرد است. با توجه به جابجایی ضعیف f و g می‌توان نتیجه گرفت که $fgz=gfz'$ یعنی $g(z)$ نیز یک نقطه انطباق است و از آنجایی که نقطه انطباق منحصر بفرد است نتیجه می‌گیریم که $fz=gz=z$ نقطه‌ی ثابت مشترک است و اثبات کامل می‌شود. □

قضیه ۳-۲. فرض کنید (X,ρ) یک فضای شبه‌مدولار است و $f,g:X\to X$ خودنگاشتی است که $f(X)\subset g(X)$ و $g(X)$ زیرمجموعه‌ی بسته‌ای از X است. اگر توابع $\psi\in\Psi$ و $\varphi\in\Phi$ وجود داشته باشد که

$$\psi\left(w_\rho^2(2)[\rho(fx-fy)]^2\right)\le\\ \psi\left(N_2(x,y)\right)-\varphi\left(M_2(x,y)\right) \tag{14-3}$$

که

$$N_2(x,y)=\max\{\rho(fx-fy)\rho(gx-gy),\\ [\rho(gx-gy)]^2,\\ \frac{[\rho(fy-gy)]^2+[\rho(fx-gy)]^2}{1+4w_\rho^2(2)}\}$$

و

$$M_2(x,y)=\max\{[\rho(fy-gy)]^2,\\ [\rho(fx-gy)]^2,\ [\rho(gx-gy)]^2,$$

$$\frac{[\rho(fx-gx)]^2\left[1+[\rho(gx-gy)]^2\right]}{1+[\rho(fx-gy)]^2},$$
$$\frac{[\rho(gx-gy)]^2\left[1+[\rho(gx-gy)]^2\right]}{1+[\rho(fx-gx)]^2}\}.$$

بنابراین f و g دارای نقطه انطباقِ ثابت در X است.

اثبات. مشابه اثبات قضیه ۳-۱، دنباله‌ی $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ در X را به ازای هر $n\in\mathbb{N}$ به‌صورت $y_n=fx_n=gx_{n+1}$ تعریف می‌کنیم. همچنین فرض می‌کنیم که به ازای هر $n\in\mathbb{N}$، $y_n\neq y_{n+1}$، از رابطه‌ی (۳-۱۴) نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned}\psi\left(w_\rho^2(2)[\rho(y_n-y_{n+1})]^2\right)&=\\ \psi\left(w_\rho^2(2)[\rho(fx_n-fx_{n+1})]^2\right)&\leq\\ \psi\left(N_2(x_n,x_{n+1})\right)-\varphi\left(M_2(x_n,x_{n+1})\right)&\end{aligned} \tag{15-3}$$

که

$$\begin{aligned}N_2(x_n,x_{n+1})&=\\ \max\{\rho(y_n-y_{n+1})\rho(y_{n-1}-y_n),&\\ [\rho(y_{n-1}-y_n)]^2,&\\ \frac{[\rho(y_{n+1}-y_n)]^2+[\rho(y_n-y_n)]^2}{1+4w_\rho^2(2)}\}&\end{aligned} \tag{16-3}$$

و

$$\begin{aligned}M_2(x_n,x_{n+1})&=\\ \max\{[\rho(y_{n+1}-y_n)]^2,&\\ [\rho(y_{n-1}-y_n)]^2,\ [\rho(y_n-y_n)]^2,&\\ \frac{[\rho(y_n-y_{n-1})]^2\left[1+[\rho(y_{n-1}-y_n)]^2\right]}{1+[\rho(y_n-y_n)]^2},&\\ \frac{[\rho(y_{n-1}-y_n)]^2\left[1+[\rho(y_{n-1}-y_n)]^2\right]}{1+[\rho(y_n-y_{n-1})]^2}\}&\end{aligned} \tag{17-3}$$

اگر ما فرض کنیم که برای یک $n\in\mathbb{N}$،
$$\rho(y_n-y_{n+1})\geq\rho(y_{n-1}-y_n)>0,$$

از نامساوی (۳-۱۶) و (۳-۱۷)، داریم
$$N_2(x_n,x_{n+1})=[\rho(y_{n+1}-y_n)]^2,$$
و
$$M_2(x_n,x_{n+1})\geq[\rho(y_{n+1}-y_n)]^2.$$

از رابطه‌ی (۳-۱۵)، به نامساوی زیر می‌رسیم:
$$\begin{aligned}&\psi\left([\rho(y_n-y_{n+1})]^2\right)\leq\\ &\psi\left(w_\rho^2(2)[\rho(y_n-y_{n+1})]^2\right)\leq\\ &\psi\left(N_2(x_n,x_{n+1})\right)-\varphi\left(M_2(x_n,x_{n+1})\right)\leq\\ &\psi\left([\rho(y_n-y_{n+1})]^2\right)-\varphi\left([\rho(y_n-y_{n+1})]^2\right)\end{aligned}$$

در نتیجه $\rho(y_n-y_{n+1})=0$ و این متناقض با $\rho(y_n-y_{n+1})>0$ است. از اینرو $\rho(y_n-y_{n+1})<\rho(y_n-y_{n-1})$. بنابراین، دنباله‌ی $\{\rho(y_n-y_{n+1})\}$ یک دنباله‌ی ناصعودی است. درنتیجه، حد دنباله یک عدد نامنفی $r\geq 0$ است. یعنی $\lim_{n\to+\infty}\rho(y_n-y_{n+1})=r$.

بر اساس رابطه (۳-۱۶) و (۳-۱۷)، داریم
$$N_2(x_n,x_{n+1})=[\rho(y_n-y_{n-1})]^2$$
و
$$M_2(x_n,x_{n+1})\geq[\rho(y_n-y_{n-1})]^2.$$

بنابراین،
$$\begin{aligned}&\psi\left([\rho(y_n-y_{n+1})]^2\right)\leq\\ &\psi\left(N_2(x_n,x_{n+1})\right)-\varphi\left(M_2(x_n,x_{n+1})\right)\leq\\ &\psi\left([\rho(y_n-y_{n-1})]^2\right)-\varphi\left([\rho(y_n-y_{n-1})]^2\right).\end{aligned}$$

اگر $r>0$، در این صورت وقتی $n\to+\infty$ نامساوی فوق، داریم

$$\psi(r^2)=\psi(r^2)-\varphi(r^2)$$

که نتیجه می‌گیریم $r=0$ یعنی

$$\lim_{n\to+\infty}\rho(y_n-y_{n+1})=0=\rho(0),$$

حال نشان می‌دهیم که $\lim\limits_{n,m\to+\infty}\rho(y_n-y_m)=\rho(0)$.

در غیر اینصورت، مشابه قضیه ۳-۱، $\varepsilon>0$ وجود دارد که به ازای آن زیردنباله‌های $\{y_{m_k}\}$ و $\{y_{n_k}\}$ از $\{y_n\}$ وجود دارد که n_k کوچکترین اندیس $n_k>m_k>k$ و نامساوی‌های زیر برقرار است:

$$\varepsilon\le\limsup_{k\to+\infty}\rho(y_{m_k}-y_{n_k})\le w_\rho(2)\varepsilon \qquad (18-3)$$

$$\frac{\varepsilon}{w_\rho(2)}\le\limsup_{k\to+\infty}\rho(y_{m_k}-y_{n_k-1})\le\varepsilon$$

$$\frac{\varepsilon}{w_\rho(2)}\le\limsup_{k\to+\infty}\rho(y_{m_k-1}-y_{n_k})\le w_\rho^2(2)\varepsilon$$

بر اساس تعریف $N_2(x,y)$ و $M_2(x,y)$ به تساوی‌های زیر می‌رسیم:

$$N_2(x_{m_k},x_{n_k})=\max\{\rho(y_{m_k}-y_{n_k})\rho(y_{m_k-1}-y_{n_k-1}), \left[\rho(y_{m_k-1}-y_{n_k-1})\right]^2, \frac{\left[\rho(y_{n_k}-y_{n_k-1})\right]^2+\left[\rho(y_{m_k}-y_{n_k-1})\right]^2}{1+4w_\rho^2(2)}\}$$

و

$$M_2(x_{m_k},x_{n_k})=\max\{\left[\rho(y_{n_k}-y_{n_k-1})\right]^2, \left[\rho(y_{m_k}-y_{n_k-1})\right]^2, \left[\rho(y_{m_k-1}-y_{n_k-1})\right]^2, \frac{\left[\rho(y_{m_k}-y_{m_k-1})\right]^2\left[1+\left[\rho(y_{m_k-1}-y_{n_k-1})\right]^2\right]}{1+\left[\rho(y_{m_k}-y_{n_k-1})\right]^2}, \frac{\left[\rho(y_{m_k-1}-y_{n_k-1})\right]^2\left[1+\left[\rho(y_{m_k-1}-y_{n_k-1})\right]^2\right]}{1+\left[\rho(y_{m_k}-y_{m_k-1})\right]^2}\}.$$

با استفاده از رابطه (۳-۱۸) داریم

$$\limsup_{k\to+\infty}N_2(x_{m_k},x_{n_k})\le \max\left\{w_\rho^2(2)\varepsilon^2, w_\rho^2(2)\varepsilon^2, \frac{\varepsilon^2}{1+4w_\rho^2(2)}\right\}= w_\rho^2(2)\varepsilon^2$$

و

$$\liminf_{k\to+\infty}M_2(x_{m_k},x_{n_k})\ge \max\{0,\frac{\varepsilon^2}{w_\rho^2(2)},\frac{\varepsilon^2}{w_\rho^4(2)},0, \frac{\varepsilon^2}{w_\rho^4(2)}(1+\frac{\varepsilon^2}{w_\rho^4(2)})\}\ge \frac{\varepsilon^2}{w_\rho^4(2)} \qquad (19-3)$$

با قرار دادن $x=x_{m_k}$ و $y=x_{n_k}$ در رابطه‌ی (۳-۱۴)، داریم

$$\psi\left(\left[\rho(y_{m_k}-y_{n_k})\right]^2\right)\le \psi\left(w_\rho^2(2)\left[\rho(y_{m_k}-y_{n_k})\right]^2\right)\le \psi\left(N_2(x_{m_k},x_{n_k})\right)-\varphi\left(M_2(x_{m_k},x_{n_k})\right)$$

بنابراین داریم

$$\psi(w_\rho^2(2)\varepsilon^2)\le \psi\left(w_\rho^2(2)\limsup_{k\to+\infty}\left[\rho(fx_{m_k}-fx_{n_k})\right]^2\right)\le \psi\left(\limsup_{k\to+\infty}\left(N_2(x_{m_k},x_{n_k})\right)\right)- \varphi\left(\liminf_{k\to+\infty}M_2(x_{m_k},x_{n_k})\right)\le \psi(w_\rho^2(2)\varepsilon^2)-\varphi\left(\liminf_{k\to+\infty}M_2(x_{m_k},x_{n_k})\right)$$

و در نتیجه $\liminf\limits_{k\to+\infty}M_2(x_{m_k},x_{n_k})=0$ که متناقض با رابطه‌ی (۳-۱۹) است. بنابراین

$$\lim_{n,m\to+\infty}\rho(y_n-y_m)=0.$$

تام بودن X تضمین می‌کند که $u \in X$ وجود دارد که

$$\lim_{n\to+\infty}\rho(y_n-u)=\lim_{n\to+\infty}\rho(fx_n-u)=\lim_{n\to+\infty}\rho(gx_{n+1}-u)=\lim_{n,m\to+\infty}\rho(y_n-y_m)=\rho(u-u)=0.$$

از فرض بسته بودن $g(X)$ نتیجه می‌گیریم که $u \in g(X)$. این نتیجه می‌دهد که $z \in X$ را می‌توان طوری انتخاب کرد که $u = gz$ و تساوی فوق را به‌صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\lim_{n\to+\infty}\rho(y_n-gz)=\lim_{n\to+\infty}\rho(fx_n-gz)=\lim_{n\to+\infty}\rho(gx_{n+1}-gz)=0=\rho(0).$$

اگر $fz \neq gz$، با قرار دادن $x = x_{n_k}$ و $y = z$ در رابطه‌ی انقباضی (۳-۱۴) ، به رابطه‌ی زیر می‌رسیم:

$$(3-20)\quad \psi\left(w_\rho^2(2)\left[\rho(fx_{n_k}-fz)\right]^2\right)\le \psi(N_2(x_{n_k},z))-\varphi\left(M_2(x_{n_k},z)\right),$$

که

$$N_2(x_{n_k},z)=\max\{\rho(y_{n_k}-fz)\rho(y_{n_k-1}-gz),\left[\rho(y_{n_k-1}-gz)\right]^2,\frac{\left[\rho(fz-gz)\right]^2+\left[\rho(y_{n_k}-gz)\right]^2}{1+4w_\rho^2(2)}\}$$

و

$$M_2(x_{n_k},z)=\max\{\left[\rho(fz-gz)\right]^2,\left[\rho(y_{n_k}-gz)\right]^2,\left[\rho(y_{n_k-1}-gz)\right]^2,\frac{\left[\rho(y_{n_k}-y_{n_k-1})\right]^2\left[1+\left[\rho(y_{n_k-1}-gz)\right]^2\right]}{1+\left[\rho(y_{n_k}-gz)\right]^2},\frac{\left[\rho(y_{n_k-1}-gz)\right]^2\left[1+\left[\rho(y_{n_k-1}-gz)\right]^2\right]}{1+\rho(y_{n_k}-y_{n_k-1})}\}$$

در نتیجه داریم

$$\lim_{k\to+\infty}\sup N_2(x_{n_k},z)=\max\left\{0,0,\frac{\left[\rho(fz-gz)\right]^2}{1+4w_\rho^2(2)}\right\}\le\left[\rho(fz-gz)\right]^2$$

و

$$\lim_{k\to+\infty}\inf M_2(x_{n_k},z)=\max\left\{\left[\rho(fz-gz)\right]^2,0,0,0,0\right\}=\left[\rho(fz-gz)\right]^2$$

با به دست آوردن حد بالایی رابطه‌ی (۳-۲۰) وقتی $k\to+\infty$، داریم

$$\psi\left(\left[\rho(gz-fz)\right]^2\right)=\psi\left(w_\rho^2(2).\frac{1}{w_\rho^2(2)}\left[\rho(gz-fz)\right]^2\right)\le\psi\left(w_\rho^2(2)\lim_{k\to+\infty}\sup\left[\rho(fx_{n_k}-fz)\right]^2\right)\le\psi\left(\lim_{k\to+\infty}\sup N_2(x_{n_k},z)\right)-\varphi\left(\lim_{k\to+\infty}\inf M_2(x_{n_k},z)\right)\le\psi\left(\left[\rho(gz-fz)\right]^2\right)-\varphi\left(\left[\rho(gz-fz)\right]^2\right),$$

در نتیجه $\rho(fz-gz)=0$. یعنی $u = fz = gz$ نقطه‌ی انطباق f و g است. با بکار بردن تکنیکی مشابه قضیه ۳-۱، می‌توان ثابت کرد که z نقطه‌ی ثابت مشترک است. اثبات کامل شد.

نتیجه ۳-۳. فرض کنید (X,ρ) یک فضای شبه‌مدولار تام و $f,g : X \to X$ خودنگاشتی است که $f(X)\subset g(X)$ و $g(X)$ زیرمجموعه‌ی بسته‌ای از X است. اگر نامساوی زیر برقرار باشد:

$$w_\rho^2(2)\left[\rho(fx-fy)\right]^2 \le N_1(x,y)-M_1(x,y)$$

بنابراین f و g دارای نقطه انطباق ثابت در X است. علاوه بر این، f و g دارای نقطه انطباق ثابت یکسان است.

نتیجه ۳-۴. فرض کنید (X,ρ) یک فضای شبه‌مدولار تام و $f,g:X\to X$ خودنگاشتی است که $f(X)\subset g(X)$ و $g(X)$ زیر مجموعه‌ی بسته‌ای از X است. اگر نامساوی زیر برقرار باشد:

$$w_\rho^2(2)\left[\rho(fx-fy)\right]^2 \le N_2(x,y)-M_2(x,y)$$

بنابراین f و g دارای نقطه انطباق ثابت در X است. علاوه بر این، f و g دارای نقطه انطباق ثابت یکسان است.
مثال‌های بخش ۴، تاییدی برای قضایای ۳-۱و ۳-۲ است.

۴- مثال‌ها

مثال۴-۱. فرض کنید $X=[0,1]$ و به ازای هر $x,y\in X$ مجهز به شبه‌مدولار $\rho(x-y)=(x+y)^2$ است. همچنین نگاشت‌های $f,g:X\to X$ با ضابطه‌های

$$fx=\frac{x}{64}$$

و

$$gx=\frac{x}{2}$$

تعریف می‌شوند. توابع کنترل $\psi,\varphi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ به ازای هر $t\in[0,+\infty)$ با ضابطه‌های $\psi(t)=\frac{5t}{4}$ و $\varphi(t)=\frac{48545}{87846}t$ تعریف شده‌اند.
به‌وضوح $f(X)\subset g(X)$، $g(X)$ بسته و $w_\rho(2)=2$ است. به ازای هر $x,y\in X$، داریم

$$\psi\left(w_\rho^2(2)\left[\rho(fx-fy)\right]^2\right)=$$

$$\psi\left(w_\rho^2(2).(\frac{x}{64}+\frac{y}{64})^4\right)=$$

$$\frac{5}{4}.4(\frac{x}{64}+\frac{y}{64})^4=\frac{5}{64^4}(x+y)^4,$$

$$\psi\left(N_1(x,y)\right)\ge$$

$$\psi\left(\left[\rho(gx-gy)\right]^2\right)=$$

$$\frac{5}{4}.(\frac{x}{2}+\frac{y}{2})^4=\frac{5}{64}(x+y)^4,$$

بنابراین

$$\varphi\left(M_1(x,y)\right)=$$

$$\max\{(\frac{y}{64}+\frac{y}{2})^4,(\frac{x}{64}+\frac{y}{2})^4,$$

$$(\frac{x}{2}+\frac{y}{2})^4,$$

$$\frac{(\frac{x}{64}+\frac{x}{2})^4\left[1+(\frac{x}{2}+\frac{y}{2})^4\right]}{1+(\frac{x}{64}+\frac{y}{2})^4}\}.$$

$$\varphi\left(M_1(x,y)\right)\le$$

$$\varphi\left(2.(\frac{33x}{64}+\frac{33y}{64})^4\right)=$$

$$\frac{5.64^3-5}{2.33^4}.2.(\frac{33}{64})^4(x+y)^4=$$

$$\frac{1310715}{64^4}(x+y)^4$$

به‌آسانی می‌یابیم که

$$\psi\left(w_\rho^2(2)\left[\rho(fx-fy)\right]^2\right)=\psi\left(\left[\rho(gx-gy)\right]^2\right)-\varphi\left(2.(\frac{33}{64})^4(x+y)^4\right)\leq\psi\left(N_1(x,y)\right)-\varphi\left(M_1(x,y)\right)$$

درنتیجه، شرایط قضیه ۳-۱ برقرار است. واضح است که صفر نقطه‌ی ثابت مشترک f و g است.

مثال ۴-۲. فرض کنید $X=[-1,1]$ و به ازای هر $x,y\in X$، $\rho(x-y)=(x+y)^2$، بنابراین X یک شبه مدولار است. فرض کنید $f,g:X\to X$ با ضابطه‌ی زیر تعریف شود:

$$f(x)=\begin{cases}0 & x\in[-1,1)\\ \frac{1}{8} & x=1\end{cases}$$

و

$$g(x)=\frac{x^2}{2}$$

تابع‌های کنترل $\psi,\varphi:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ به ازای هر $t\in[0,+\infty)$ با ضابطه‌ی

$$\psi(t)=bt$$

و

$$\varphi(t)=(b-1)t$$

که $1<b\leq\frac{2048}{2045}$ تعریف می‌شود.

حال ما چهار حالت را بررسی می‌کنیم:

حالت اول. $x\neq1$ و $y\neq1$. واضح است که

$$\psi\left(w_\rho^2(2)\left[\rho(fx-fy)\right]^2\right)=\psi(0)=0,$$

$$\psi\left(N_2(x,y)\right)=bN_2(x,y)\geq b\left[\rho(gx-gy)\right]^2=b(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2})^4,$$

$$\varphi\left(M_2(x,y)\right)=(b-1)M_2(x,y)\leq(b-1).2(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2})^4,$$

بنابراین

$$\psi\left(w_\rho^2(2)\left[\rho(fx-fy)\right]^2\right)=0\leq b(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2})^4-2(b-1)(\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2})^4\leq\psi\left(N_2(x,y)\right)-\varphi\left(M_2(x,y)\right).$$

حالت دوم. $x=1$ و $y\neq1$. بنابراین

$$\psi\left(w_\rho^2(2)\left[\rho(fx-fy)\right]^2\right)=4b(\frac{1}{8})^4=\frac{b}{1024},$$

$$\psi\left(N_2(x,y)\right)=bN_2(x,y)\geq b\rho(fx-fy)\rho(gx-gy)=\frac{b}{64}(\frac{1}{2}+\frac{y^2}{2})^2\geq\frac{1}{64}.\frac{b}{4}=\frac{b}{256},$$

$$\varphi\left(M_2(x,y)\right)=(b-1)M_2(x,y)\leq2(b-1)$$

نتیجه می‌گیریم که

$$\psi\left(w_\rho^2(2)\left[d(fx,fy)\right]^2\right)= \frac{b}{1024}\le \frac{b}{256}-2(b-1)\le \psi\left(N_2(x,y)\right)-\varphi\left(M_2(x,y)\right).$$

حالت سوم. $x\neq 1$، $y=1$. به‌طور خلاصه نتیجه می‌گیریم که

$$\psi\left(w_\rho^2(2)\left[d(fx,fy)\right]^2\right)=4b(\frac{1}{8})^4=\frac{b}{1024},$$
$$\begin{aligned}\psi\left(N_2(x,y)\right)&=bN_2(x,y)\\&\ge bd(fx,fy)d(gx,gy)\\&=\frac{b}{64}(\frac{1}{2}+\frac{x^2}{2})^2\\&\ge\frac{1}{64}.\frac{b}{4}=\frac{b}{256},\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\varphi\left(M_2(x,y)\right)&=(b-1)M_2(x,y)\\&\le 2(b-1),\end{aligned}$$

در نتیجه

$$\psi\left(w_\rho^2(2)\left[d(fx,fy)\right]^2\right)= \frac{b}{1024}\le \frac{b}{256}-2(b-1)\le \psi\left(N_2(x,y)\right)-\varphi\left(M_2(x,y)\right)$$

حالت چهارم. $x=1$ و $y=1$. به آسانی می‌توان نشان داد که

$$\psi\left(w_\rho^2(2)\left[\rho(fx-fy)\right]^2\right)= 4b(\frac{1}{8}+\frac{1}{8})^4=\frac{b}{64},$$

$$\psi\left(N_2(x,y)\right)= bN_2(x,y)\ge b\rho(fx-fy)\rho(gx-gy)= b(\frac{1}{8}+\frac{1}{8})^2.(\frac{1}{2}+\frac{1}{2})^2=\frac{b}{16},$$
$$\varphi\left(M_2(x,y)\right)=(b-1)M_2(x,y)\le 2(b-1).$$

به وضوح، برای هر $x,y\in[-1,1]$، داریم

$$\psi\left(w_\rho^2(2)\left[\rho(fx-fy)\right]^2\right)= \frac{b}{64}\le \frac{b}{16}-2(b-1)\le \psi\left(N_2(x,y)\right)-\varphi\left(M_2(x,y)\right)$$

در نتیجه بنابر قضیه ۳-۲، f و g دارای نقطه ثابت مشترک منحصر بفرد در $0\in X$ است.

اگر $\psi(t)=t$ و $\varphi(t)=t$ در قضیه‌های ۳-۱ و ۳-۲ باشند، به نتایج زیر دست خواهیم یافت:

۵- حل دستگاه معادلات انتگرالی

در این بخش، ما از قضیه ۳-۱ برای نشان دادن وجود جواب برای دستگاه معادلات انتگرالی استفاده می‌کنیم:

$$(1-5)\qquad \begin{cases} x(t)=\int_0^t K(r,x(r))dr \\ x(t)=\int_0^t x(r)dr \end{cases}$$

فرض کنید $X=C\left([0,T]\right)$ مجموعه‌ی توابع حقیقی مثبت تعریف شده بر بازه‌ی بسته $[0,T]$ باشد. شبه‌مدولار $\rho:X\to[0,+\infty)$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\rho(x-y)=\max_{t\in[0,T]}(|x(t)|+|y(t)|)^{\frac{m}{2}}$$

که $m>2$. واضح است که (X,ρ) یک شبه‌مدولار تام با $w_\rho(2)=2^{\frac{m}{2}}-1$ است. نگاشت‌های $f,g:X\to X$ را با ضابطه‌های زیر در نظر بگیرید:

$$fx(t)=\int_0^t K(r,x(r))dr,$$
$$gx(t)=\int_0^t x(r)dr$$

قضیه ۵-۱. دستگاه معادلات انتگرالی (۵-۱) را در نظر بگیرید و فرض کنید شرایط زیر برقرار باشد:

(i) $K:[0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ پیوسته است،

(ii) اگر به ازای هر $r\in[0,T]$، $K(r,x(r))=x(r)$ آنگاه داریم

$$K\left(r,\int_0^t x(\omega)d\omega\right)=\int_0^t K(\omega,x(\omega))d\omega$$

(iii) تابع پیوسته‌ی $\gamma:[0,T]\to[1,+\infty)$ وجود دارد که به ازای هر $r\in[0,T]$،

$$|K(r,x(r))|\le\gamma(r)|x(r)|$$

(iv) عدد ثابت L وجود دارد که برای هر $r\in[0,T]$،

$$\sup_{t\in[0,T]}\int_0^T(1+\gamma(r))dr\le\sqrt[m]{\frac{1}{w_\rho^2(2)+L}}$$

در این صورت دستگاه معادلات انتگرالی (۵-۱) دارای جواب منحصر بفرد $x\in X$ است.

اثبات. به‌وضوح، با شرط (ii)، f,g به‌طور ضعیف جابجایی است. فرض کنید $x,y\in X$، از شرایط (i)، (iii) و (iv)، برای هر $t\in[0,T]$، داریم

$$\begin{aligned}
&w_\rho^2(2)\left(|fx(t)|+|fy(t)|\right)^m=\\
&w_\rho^2(2)\left(\left|\int_0^t K(r,x(r))dr\right|+\left|\int_0^t K(r,y(r))dr\right|\right)^m\le\\
&w_\rho^2(2)\left(\int_0^t |K(r,x(r))|+|K(r,y(r))|dr\right)^m\le\\
&w_\rho^2(2)\left(\int_0^t \gamma(r)|x(r)+y(r)|dr\right)^m<\\
&w_\rho^2(2)\left(\int_0^t (1+\gamma(r))dr\right)^m.\left[\rho(gx(t)-gy(t))\right]^2\le\\
&\frac{w_\rho^2(2)}{w_\rho^2(2)+L}\left[\rho(gx(t)-gy(t))\right]^2=\\
&\left(1-\frac{L}{w_\rho^2(2)+L}\right)\left[\rho(gx(t)-gy(t))\right]^2\le\\
&N_1(x(t),y(t))-LM_1(x(t),y(t))
\end{aligned}$$

که نتیجه می‌دهد

$$w_\rho^2(2)\left[\rho(fx(t)-fy(t))\right]^2\le N_1(x(t),y(t))-LM_1(x(t),y(t))$$

نهایتا، قرار دهید $\varphi(x)=Lx$ و $\psi(x)=x$، تمام شرایط قضیه ۳-۱ برقرار است. از اینرو بنابر قضیه ۳-۱، توابع f,g دارای نقطه ثابت مشترک است یعنی تابع $x(t)$ وجود دارد که $x(t)=f(x(t))=g(x(t))$ از این تساوی و ضابطه‌ی

$$fx(t)=\int_0^t K(r,x(r))dr,$$

و

$$gx(t)=\int_0^t x(r)dr$$

نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{cases} x(t) = \int_0^t K(r, x(r))dr \\ x(t) = \int_0^t x(r)dr \end{cases}$$

پس دستگاه معادلات انتگرالی دارای جواب است.

نتیجه‌گیری

در این مقاله ما شرایط کافی جدیدی که وجودِ نقطه انطباق ثابت مشترک برای نگاشت‌های (φ,ψ)– انقباضی ضعیف را تضمین می‌کند، بدون فرضیات تحدب بر شبه‌مدولار و کرانداری تابع، بیان کردیم. همچنین با طرح مثال و به کار بردن قضیه‌های اثبات شده در این مقاله، نشان دادیم که این قضایا بر مسائل زیاد حل‌نشده با ضایایی که تاکنون در مقالات مطرح شده است، قابل پیاده‌سازی است.

فهرست منابع

[1] S. Banach. Surles operations dans ensembles abstraits et leur application aux equations integrales. Fundamenta Mathematicae. 3: 51–57 (1922).

[2] N. Saleem, M. Abbas, B. Ali and Z. Raza. Fixed points of Suzuki-type generalized multivalued $(f,\theta,L)-$ almost contractions with applications. Filomat. 33(2): 499–518 (2019).

[3] X. Li, A. Hussain, M. Adeel, and E. Savas. Fixed point theorems for $Z_\theta-$ contraction and applications to nonlinear integral equations. 7: 120023–120029 (2019).

[4] BE. Rhoades. Some theorems on weakly contractive maps. Nonlinear Anal. 47: 2683–2693 (2001).

[5] M. Abbas, D. Doric. Common fixed point theorem for four mappings satisfying generalized weak ontractive condition. Filomat. 24: 1–10 (2010).

[6] O. Popescu. Fixed point for $\psi,\varphi-$ weak contractions. Appl. Math. Lett. 24: 1–4 (2011).

[7] S. Moradi, Z. Fathi, and E. Analouee. The common fixed point of single-valued generalized φ_f- weakly contractive mappings. Appl. Math. Lett. 24: 771–776 (2011).

[8] A. Aghaiani, M. Abbas and J. R. Roshan. Common fixed point of generalized weak contractive mappings in partially ordered b-metric spaces. Math. Slovaca. 4: 941–960 (2014).

[9] M. Abbas, F. Lael and N. Saleem. Fuzzy b-Metric Spaces: Fixed point results for $\psi-$contraction correspondences and their application. Axioms 9:1-12 (2020).

[10] N. Saleem, I. Iqbal, B. Iqbal and S. Radenovic. Coincidence and fixed points of multivalued F-contractions in generalized metric space with application. Journal of fixed point theory and applications. 22:1-24 (2020).

[11] J. Musielak and W. Orlicz. On modular spaces. Studia Mathematica 18: 49-65 (1959).

[12] J. Musielak. Orlicz Spaces and Modular Spaces. vol. 1034, Lecture Notes in Mathematics,
Springer-Verlag, 1983.

[13] H. Nakano. Modular Semi-Ordered Linear Spaces. Maruzen, Tokyo, Japan. 1950.

[14] W. Orlicz. Uber eine gewisse klasse von Raumen vom Typus B. Bull. Acad. Polon. Sci. A. 207-220 (1932).

[15] W. Orlicz. Uber Raumen L^M. Bull. Acad. Polon. Sci. A. 93-107 (1936).

[16] M. A. Khamsi, W. M. Kozlowski and S. Reich. Fixed point theory in modular function spaces. Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. 14: 935-953 (1990).

[17] M. A. Khamsi. A convexity property in modular function spaces. Math. Japonica. 44: 269-279 (1996).

[18] M. A. Khamsi, W. K. Kozlowski and C. Shutao .Some geometrical properties and fixed point theorems in Orlicz spaces. J. Math. Anal. Appl. 155: 393-412 (1991).

[19] F. Lael, Common fixed point of generalized weakly contractive mappings on orthogonal modular spaces with applications. Int. J. Nonlinear Anal. Appl. 12: 1121-1140 (2021).

[20] F. Lael, K. Nourouzi, On the fixed points of correspondences in modular spaces, International Scholarly Research Notices 2011(6), 1-8 (2011).

[21] F. Lael, K. Nourouzi, Fixed points of mappings defined on probabilistic modular spaces, Bull. Math. Anal. Appl., 4 (3), 23-28 (2012).