دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره سی و پنجم، فروردین و اردیبهشت ۱۴۰۱
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸
دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

مشتق تابع، تعمیم تعریف کاراتئودُری

علی پارسیان*

استادیار، دانشکده ریاضی، دانشگاه تفرش، تفرش، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۹/۰۸/۰۹ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۱۲/۱۶

چکیده

تعریف متداول مشتق، مجموعهٔ تابع‌های مشتق‌پذیر را بسیار کوچک‌تر از مجموعهٔ تابع‌های پیوسته می‌سازد. بسیاری از تابع‌های یک متغیری با تعریف موجود مشتق‌پذیر نیستند و بررسی تغییرات آنها به کمک تعریف موجود مشتق، میسّر نیست. در این مقاله، با استفاده از تعریف کاراتئودری، ابتدا به ارائهٔ تعریف مشتق‌پذیری تعمیم‌یافتهٔ یک تابع حقیقی یک متغیری, و مشتق تعمیم‌یافتهٔ آن می‌پردازیم، به گونه‌ای که مجموعهٔ تابع‌های مشتق‌پذیر افزایش می‌یابد و اعتبار قضیه‌های اساسی نظریهٔ تابع‌های مشتق‌پذیر یک متغیری، مانند قضیهٔ رول، قضیهٔ مقدار میانگین کوشی، قضیهٔ مقدار میانگین برای مشتق، و قضیهٔ تیلور برقرار باقی می‌ماند. سرانجام، مقاله را با ارائهٔ چند مثال به پایان می‌بریم.

واژه‌های کلیدی: قضیهٔ رول، قضیه مقدار میانگین کوشی، قضیهٔ مقدار میانگین، قضیهٔ تیلور.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email:parsian@tafreshu.ac.ir

۱- مقدمه

تاکنون تعریف‌های گوناگونی از مشتق یک تابع داده شده است. ویژگی مشترک همهٔ آنها این است که تعمیمی از تعریف مشتق‌پذیری تابعی مانند $f:I\to R$ هستند که روی بازهٔ باز کران‌دار یا بی‌کران I تعریف شده است. دو تعمیم بسیار معروف مشتق به ترتیب به فرشه و کاراتئودری تعلق دارد. برای توضیح بیشتر، تعریف معمولی مشتق‌پذیری یک تابع حقیقی $f:I\to R$ در نقطهٔ $c\in I$ را یادآوری می‌کنیم. می‌گوییم f در $c\in I$ مشتق پذیر است هرگاه

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

موجود باشد. این مطلب را می‌توان به صورت دیگری نیز بیان کرد. فرض می‌کنیم تابع F به صورت

$$F(x)=\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

تعریف شده باشد. در این صورت $f:I\to R$ در c مشتق‌پذیر است اگر و تنها اگر F در c ناپیوستگی برداشتنی داشته باشد. بیان اخیر، کلید ارائهٔ تعریف زیر از مشتق پذیری است. f در c مشتق‌پذیر است اگر تابعی مانند F پیوسته در c موجود باشد که در رابطهٔ

$$f(x)-f(c)=(x-c)F(x)$$

صدق کند. تعریف اخیر را کاراتئودری از مشتق پذیری یک تابع در نقطه‌ای مانند c ارائه کرده است [۱,۲]. از سوی دیگر، تعریف مشتق‌پذیری تابع $f:I\to R$ در نقطهٔ $c\in I$ را می‌توان در وجود عدد یکتای λ که به c وابسته باشد و رابطهٔ

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=\lambda\ ,$$

را برقرار کند نیز خلاصه کرد. رابطه‌ای که می‌تواند به صورت

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)-\lambda(x-c)}{x-c}=0\ ,$$

بازنویسی شود. اما تابع $\Lambda:R\to R$ با ضابطهٔ $\Lambda(x)=\lambda x$ خطی است و $\Lambda(x-c)=\lambda(x-c)$. بنابراین، تعریف مشتق‌پذیری تابع f در نقطهٔ $c\in I$، در وجود تابع خطی $\Lambda:R\to R$ که شرط

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)-\Lambda(x-c)}{x-c}=0$$

را برآورده سازد خلاصه می‌شود. بیان اخیر، تعریف فرشه از مشتق پذیری تابع $f:I\to R$ در نقطهٔ $c\in I$ است. این دو تعریف را می‌توان به نوبهٔ خود به فضاهای R^n تعمیم داد و به کمک آنها قضیه‌های اصلی مشتق‌پذیری را بیان کرد [۱,۲,۳,۴,۵]. در مقالهٔ حاضر با استفاده از مفهوم بی‌نهایت‌کوچک مجاز، مجموعهٔ تابع‌های مشتق‌پذیر را گسترش می‌دهیم و با استقبال از روش کاراتئودری در حذف کسر

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

و استفاده از مفهوم پیوستگی تعمیم‌یافته، نشان می‌دهیم که در این حالت, صورت‌های مشابهی از قضیه‌های نظریهٔ تابع‌های حقیقی مشتق‌پذیر، که در بازه‌ای از مجموعهٔ اعداد حقیقی تعریف شده‌اند وجود دارند.

۲- مفاهیم اولیه

در این بخش به بیان تعریف‌های مورد نیاز می‌پردازیم.

تعریف ۱. هر دنبالهٔ همگرا به صفر از اعداد حقیقی مانند $\{h_n\}_{n\in N}$ را یک بی‌نهایت‌کوچک می‌نامیم.

تعریف ۲. بی‌نهایت‌کوچک $\{h_n\}_{n\in N}$ را مجاز می‌نامیم هرگاه
$\exists n_0 \in N, \forall n \in N; (n > n_0 \Rightarrow h_n \neq 0)$.

مجموعهٔ همهٔ بی‌نهایت‌کوچک‌های مجاز را با نماد $AI(R)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۳. بی‌نهایت‌کوچک مجاز $\{h_n\}_{n\in N}$ را سرانجام مثبت می‌نامیم هرگاه
$\exists n_0 \in N, \forall n \in N; (n > n_0 \Rightarrow h_n > 0)$.

مجموعهٔ بی‌نهایت‌کوچک‌های مجاز سرانجام مثبت را با نماد $AI^+(R)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۴. بی‌نهایت‌کوچک مجاز $\{h_n\}_{n\in N}$را سرانجام منفی می‌نامیم هرگاه
$\exists n_0 \in N, \forall n \in N; (n > n_0 \Rightarrow h_n < 0)$.

مجموعهٔ بی‌نهایت‌کوچک‌های مجاز سرانجام منفی را با نماد $AI^-(R)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۵. بی‌نهایت‌کوچک مجاز $\{h_n\}_{n\in N}$را سرانجام متناوب می‌نامیم هرگاه عدد $n_0 \in N$ چنان وجود داشته باشد که مجموعه‌های $\{h_n \mid n > n_0, h_n > 0\}$ و $\{h_n \mid n > n_0, h_n < 0\}$ بی‌پایان باشند. مجموعهٔ بی‌نهایت‌کوچک‌های مجاز سرانجام متناوب را با نماد $AL(R)$ نمایش می‌دهیم.

تعریف ۶. فرض می‌کنیم $f: I \to R$ یک تابع حقیقی، I یک بازهٔ باز، $c \in I$، $\{h_n\}_{n\in N} \in AI(R)$. تابع f را نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}$ در نقطهٔ c پیوستهٔ تعمیم‌یافته (تی-پیوسته) نامیم هرگاه $c + h_n \in I$ برای هر $n \in N$، و
$\lim_{n\to+\infty} f(c+h_n) = f(c)$.

تعریف ۷. فرض می‌کنیم $f: I \to R$ یک تابع حقیقی، I یک بازهٔ باز، $c \in I$، $\{h_n\}_{n\in N} \in AI(R)$. قرار می‌دهیم
$\Phi_n(c) = \dfrac{f(c+h_n) - f(c)}{h_n}$.

f را نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}$ در c مشتق‌پذیر تعمیم یافته (تی- مشتق‌پذیر) گوییم هرگاه $c + h_n \in I$ برای هر $n \in N$، و $\lim_{n\to+\infty} \Phi_n(c)$ وجود داشته باشد. این حد را در صورت وجود با $f'(c,h_n)$ نشان می‌دهیم و آن را مشتق تعمیم یافتهٔ (تی- مشتق) f نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}$ در نقطهٔ c می‌نامیم.

در دو تعریف بالا، شرط $c + h_n \in I$، برای سادگی، برای هر $n \in N$ منظور شده است. آن چه که کافی است آن است که $c + h_n \in I$ برای اعداد به اندازهٔ کافی بزرگ n برقرار باشد، که به دلیل این‌که I یک بازهٔ باز، و $\{h_n\}_{n\in N}$ یک بی‌نهایت‌کوچک است، برقرار است.

بدیهی است که اگر تابع $f:]a,b[\to R$ نسبت به بی‌نهایت‌کوچک $\{h_n\}_{n\in N} \in AI(R)$ در $c \in]a,b[$ (تی- مشتق‌پذیر) تی-پیوسته) باشد و $\{h_{n_k}\}_{k\in N}$ یک زیردنبالهٔ $\{h_n\}_{n\in N}$ باشد، آن‌گاه $\{h_{n_k}\}_{k\in N} \in AI(R)$، و f نسبت به $\{h_{n_k}\}_{k\in N}$ در c (تی-پیوسته) (تی-مشتق‌پذیر) است و
$f'(c,h_{n_k}) = f'(c,h_n), \quad \forall n,k \in N.$

۳- تابع‌های تی-مشتق‌پذیر

در این بخش، به بررسی ارتباط بین مفاهیم متداول پیوستگی و مشتق‌پذیری با مفاهیم تی-پیوستگی و تی-مشتق‌پذیری می‌پردازیم. قضیهٔ زیر، قضیهٔ اساسی این بخش است و تعریف کاراتئودری از مشتق‌پذیری را تعمیم می‌دهد [۱].

قضیه ۸. فرض می‌کنیم $f:]a,b[\to R$، $c \in]a,b[$

و f نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}\in AI(R)$ در c تی-مشتق‌پذیر باشد. در این صورت تابع یکتای $F:]a,b[\to R$ (وابسته به f و c و $\{h_n\}_{n\in N}$) وجود دارد که نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}$ در c تی-پیوسته است و در رابطهٔ

$$\forall x\in]a,b[; f(x)-f(c)=(x-c)F(x), \quad (1)$$

صدق می‌کند. برعکس اگر تابعی مانند $F:]a,b[\to R$ وجود داشته باشد که نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}$ در c تی-پیوسته باشد و در رابطهٔ (1) صدق کند، آن‌گاه f نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}$ در c تی-مشتق‌پذیر است.

اثبات. ابتدا یکتایی را ثابت می‌کنیم. فرض می‌کنیم F_1 و F_2 نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}$ در c تی-پیوسته باشند و در (1) صدق کنند. در این صورت برای $x\neq c$ داریم:

$$F_1(x)=\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=F_2(x).$$

هم‌چنین

$$F_1(c)=\lim_{n\to+\infty}F_1(c+h_n)$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{f(c+h_n)-f(c)}{h_n}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}F_2(c+h_n)=F_2(c),$$

بنابراین $F_1=F_2$. برای اثبات وجود $F:]a,b[\to R$، فرض می‌کنیم $f:]a,b[\to R$ نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}\in AI(R)$ در c تی- مشتق پذیر باشد و $x\in]a,b[$. قرار می‌دهیم:

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} & x\neq c,\\ f'(c,h_n) & x=c\end{cases}$$

در این صورت F در (1) صدق می‌کند و نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}$ در نقطهٔ c تی-پیوسته است، زیرا

$$\lim_{n\to+\infty}F(c+h_n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{f(c+h_n)-f(c)}{h_n}$$
$$=f'(c,h_n)=F(c).$$

برعکس، اگر تابعی مانند F وجود داشته باشد که در (1) صدق کند و نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}$ در c تی-پیوسته باشد، آن‌گاه

$$f'(c,h_n)=\lim_{n\to+\infty}\frac{f(c+h_n)-f(c)}{h_n}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}F(c+h_n)=F(c),$$

و اثبات تمام است.

قضیه ۹. تابع $f:]a,b[\to R$ در $c\in]a,b[$ پیوسته است اگر و تنها اگر نسبت به هر $\{h_n\}_{n\in N}\in AI(R)$ در c تی-پیوسته باشد.

قضیه ۱۰. تابع $f:]a,b[\to R$ در $c\in]a,b[$ مشتق‌پذیر است اگر و تنها اگر نسبت به هر $\{h_n\}_{n\in N}\in AI(R)$ در c تی-مشتق‌پذیر باشد. بعلاوه، اگر f در c مشتق‌پذیر باشد, آن‌گاه برای هر $\{h_n\}_{n\in N}\in AI(R)$ داریم:

$$f'(c,h_n)=f'(c).$$

اثبات. فرض می‌کنیم f نسبت به هر بی‌نهایت-کوچک مجاز در c تی-مشتق‌پذیر باشد و

$$\{u_n\}_{n\in N},\{v_n\}_{n\in N}\in AI(R).$$

نشان می‌دهیم:

$$f'(c,u_n)=f'(c,v_n),\quad \forall n\in N.$$

قرار می‌دهیم:

$$h_n=\begin{cases}u_n, & n=2k\\ v_n, & n=2k+1\end{cases}$$

بدیهی است که $\{h_n\}_{n\in N}\in AI(R)$ و $f'(c,h_n)$ وجود دارد. بعلاوه

$$f'(c,u_n)=f'(c,h_{2k})$$
$$=f'(c,h_{2k+1})=f'(c,v_n).$$

اکنون فرض می‌کنیم عدد $l\in R$ چنان وجود دارد که برای هر $\{h_n\}_{n\in N}\in AI(R)$ رابطهٔ $f'(c,h_n)=l$ برقرار است. اگر f در c مشتق پذیر نباشد، برای حداقل یک عدد حقیقی $\varepsilon>0$، بی‌نهایت‌کوچک $\{h_n\}_{n\in N}$ چنان وجود دارد که $0<|h_n|<\frac{1}{n}$ و رابطهٔ

$$\left|\frac{f(c+h_n)-f(c)}{h_n}-l\right|>\varepsilon$$

برقرار است، در نتیجه تابع f نسبت به بی‌نهایت کوچک مجاز $\{h_n\}_{n\in N}\in AI(R)$ در c تی-مشتق‌پذیر نیست (تناقض). هم‌چنین اگر f در c مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه

$$f'(c)=\lim_{n\to+\infty}\frac{f(c+h_n)-f(c)}{h_n}$$
$$=\lim_{n\to+\infty}\Phi_n(c)=f'(c,h_n).$$

بنابراین f نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}\in AI(R)$ در c تی-مشتق‌پذیر است و $f'(c,h_n)=f'(c)$.

۴- جبر تی-مشتق‌ها

قضیه ۱۱. فرض می‌کنیم $\{h_n\}_{n\in N}\in AI(R)$ ، $c\in]a,b[$ و تابع‌های $f,g:]a,b[\to R$ نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}$ در c تی-پیوسته باشند. در این صورت تابع‌های $f\pm g$, fg نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}$ در c تی-پیوسته‌اند. بعلاوه اگر $g(c)\neq 0$، آن‌گاه برای مقادیر به اندازهٔ کافی بزرگ n، $g(c+h_n)\neq 0$ و $\frac{f}{g}$ نیز نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}$ در c تی-پیوسته است.

قضیه ۱۲. فرض می‌کنیم تابع‌های f و g به ترتیب روی بازه‌های باز I و J تعریف شده‌اند و نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}\in AI(R)$ به ترتیب در نقاط c و $f(c)$ تی-پیوسته‌اند و $f(I)\subseteq J$، در این صورت $g\circ f$ نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}$ در c تی-پیوسته است.

قضیه ۱۳. فرض می‌کنیم f یک تابع حقیقی باشد که روی بازهٔ $]a,b[$ تعریف شده است و $c\in]a,b[$، $\{h_n\}_{n\in N}\in AI(R)$. اگر f نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}$ در c تی-مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه f نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}$ در c تی-پیوسته است.

اثبات. بنا بر قضیهٔ ۸، تابع یکتای $F:]a,b[\to R$ چنان وجود دارد که نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}$ در c تی-پیوسته است و در رابطهٔ

$$\forall x\in]a,b[;f(x)-f(c)=(x-c)F(x)$$

صدق می‌کند. اکنون، حکم از قضیه‌های ۹ و ۱۱ نتیجه می‌شود.

قضیه ۱۴. فرض می‌کنیم $\{h_n\}_{n\in N}\in AI(R)$، $c\in]a,b[$ و تابع‌های $f,g:]a,b[\to R$ نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}$ در c تی-مشتق‌پذیر باشند. در این صورت تابع‌های $f\pm g$, fg نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}$ در c تی-مشتق‌پذیرند و

$$۱)\ (f\pm g)'(c,h_n)=f'(c,h_n)\pm g'(c,h_n),$$
$$۲)\ (fg)'(c,h_n)=f'(c,h_n)g(c)+f(c)g'(c,h_n)$$

بعلاوه اگر $g(c)\neq 0$، آن‌گاه $\frac{f}{g}$ نیز نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}$ در c تی-مشتق‌پذیر است و

$$۳)\ \left(\frac{f}{g}\right)'(c,h_n)=\frac{f'(c,h_n)g(c)-f(c)g'(c,h_n)}{g^2(c)}.$$

اثبات. (۲) را ثابت می‌کنیم. اثبات (۱) و (۳) مشابه است. بنا بر قضیهٔ ۸، تابع‌های یکتای F و G وجود دارند که در c نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}$ تی-پیوسته‌اند و در رابطه‌های

$$\forall x \in I; f(x) - f(c) = (x-c)F(x),$$
$$F(c) = f'(c, h_n)$$
$$\forall x \in I; g(x) - g(c) = (x-c)G(x),$$
$$G(c) = g'(c, h_n)$$

صدق می‌کنند. در نتیجه

$$f(x)g(x) - f(c)g(c) = (x-c)$$
$$[f(c)G(x) + g(c)F(x) + (x-c)F(x)G(x)]$$

بنا بر قضیه‌های ۹ و ۱۱، تابع داخل علامت کروشه، نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}$ در c تی-پیوسته است. در نتیجه بنا بر قضیهٔ ۸، تابع fg نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}$ در c تی-مشتق‌پذیر است و

$$(fg)'(c,h_n) = f'(c,h_n)g(c) + f(c)g'(c,h_n)$$

تبصره ۱۵. مجموعهٔ تابع‌های تی-مشتق‌پذیر نسبت به یک بی‌نهایت‌کوچک مجاز، بسیار بزرگ‌تر از مجموعهٔ تابع‌های مشتق‌پذیر است و بی‌نهایت تابع همه‌جا ناپیوسته را نیز در بر دارد. تی-مشتق پذیری یک تابع نسبت به یک بی‌نهایت‌کوچک مجاز در یک نقطه (حتی در همهٔ نقاط)، پیوستگی تابع را در همان نقطه (حتی در یک نقطه) ایجاب نمی‌کند. تابع مشخصهٔ[2] مجموعهٔ اعداد گویا،

$$\chi_Q(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q, \\ 0, & x \notin Q \end{cases}$$

در همهٔ نقاط ناپیوسته است [۳]، ولی نسبت به بی نهایت‌کوچک مجاز $\{\frac{1}{n}\}_{n\in N}$ در هر نقطه تی-مشتق‌پذیر است و برای هر نقطهٔ c از مجموعهٔ اعداد حقیقی $\chi_Q{}'(c,\frac{1}{n}) = 0$. هم‌چنین تی-پیوستگی یک تابع نسبت به یک بی‌نهایت‌کوچک مجاز روی یک بازهٔ بسته، سبب کران‌دار بودن تابع نمی‌گردد. تابع

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-\sqrt{3}}, & x \in Q, \\ 0, & x \in R - Q \end{cases}$$

در R نسبت به بی‌نهایت‌کوچک مجاز $\{\frac{1}{n}\}_{n\in N}$ تی-پیوسته است، زیرا برای هر نقطهٔ c از مجموعهٔ اعداد حقیقی داریم:

$$\lim_{n\to+\infty} f(c+\frac{1}{n}) = f(c)$$

ولی f روی بازهٔ $[1,2]$ بی‌کران است.

قضیهٔ زیر را قاعدهٔ زنجیری برای تی-مشتق‌پذیری نسبت به بی‌نهایت‌کوچک‌های مجاز می‌نامیم.

قضیه ۱۶. فرض می‌کنیم تابع‌های f و g به ترتیب روی بازه‌های باز I و J تعریف شده‌اند و نسبت به $\{h_n\}_{n\in N} \in AI(R)$ به ترتیب در نقاط c و $f(c)$ تی-مشتق‌پذیر هستند و $f(I) \subseteq J$. در این صورت $g \circ f$ نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}$ در c تی-مشتق‌پذیر است و

$$(g\circ f)'(c,h_n) = g'(f(c),h_n)f'(c,h_n).$$

اثبات. بنا بر قضیهٔ ۸، تابع‌های یکتای F و G چنان وجود دارند که نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}$ به ترتیب در c و $f(c)$ تی-پیوسته اند و

$$\forall x \in I; f(x) - f(c) = (x-c)F(x),$$
$$F(c) = f'(c,h_n),$$
$$\forall y \in J; g(y) - g(f(c)) = (y - f(c))G(y),$$
$$G(f(c)) = g'(f(c),h_n).$$

در نتیجه

$$g(f(x)) - g(f(c))$$
$$= (f(x) - f(c))G(f(x))$$
$$= (x-c)F(x)G(f(c) + (x-c)F(x)).$$

---

[2] Characteristic function

بنا بر قضیه‌های ۹ ، ۱۱ و ۱۲، تابع

$$H(x)=F(x)G(f(c)+(x-c)F(x))$$

نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}$ در c تی-پیوسته، و بنا بر قضیهٔ ۸، تابع $g\circ f$ نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}$ در c تی-مشتق‌پذیر است و

$$(g\circ f)'(c,h_n)=F(c)G(f(c))$$
$$=f'(c,h_n)g'(f(c),h_n)$$

۵- تی-مشتق و نقطه‌های تی-بهینه

قضیه ۱۷. فرض می‌کنیم $f:]a,b[\to R$ یک تابع حقیقی باشد به گونه‌ای که برای نقطهٔ $c\in]a,b[$ و $\{h_n\}_{n\in N}\in AI^+(R)$ داشته باشیم $f'(c,h_n)>0$، در این صورت عدد طبیعی n_0 چنان وجود دارد که

۱) $\forall n\in N(n>n_0\Rightarrow f(c+h_n)>f(c))$,

هم‌چنین اگر $\{h_n\}_{n\in N}\in AI^-(R)$ و $f'(c,h_n)>0$، آن‌گاه عدد طبیعی n_1 چنان وجود دارد که

۲) $\forall n\in N\,(n>n_1\Rightarrow f\,(c+h_n)<f\,(c))$.

اثبات. (۱) را ثابت می‌کنیم. بنا بر قضیهٔ ۸، تابع $F:]a,b[\to R$ (وابسته به fو c و $\{h_n\}_{n\in N}$) چنان وجود دارد که نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}$ در c تی-پیوسته است و

$\forall x\in]a,b[; f(x)-f(c)=(x-c)F(x)$,

بنابراین

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{f(c+h_n)-f(c)}{h_n}$$
$$=F(c)=f'(c,h_n)>0$$

و در نتیجه عدد $n_0\in N$ چنان وجود دارد که شرط $n>n_0$، گزاره $f(c+h_n)>f(c)$ را نتیجه می‌دهد. اثبات رابطهٔ (۲) مشابه است.
اثبات قضیهٔ زیر، مشابه اثبات قضیهٔ ۱۷ است.

قضیه ۱۸. فرض می‌کنیم $f:]a,b[\to R$ یک تابع حقیقی باشد به گونه‌ای که برای نقطهٔ $c\in]a,b[$ و $\{h_n\}_{n\in N}\in AI^+(R)$ داشته باشیم $f'(c,h_n)<0$. در این صورت عدد طبیعی n_0 چنان وجود دارد که

$\forall n\in N(n>n_0\Rightarrow f(c+h_n)<f(c))$,

هم‌چنین اگر $\{h_n\}_{n\in N}\in AI^-(R)$ و $f'(c,h_n)<0$، آن‌گاه عدد طبیعی n_1 چنان وجود دارد که

$\forall n\in N\,(n>n_1\Rightarrow f\,(c+h_n)>f\,(c))$.

تعریف ۱۹. فرض می‌کنیم $f:]a,b[\to R$ یک تابع حقیقی باشد و $c\in]a,b[$. می‌گوییم f نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}\in AI(R)$ در c تی-بیشینهٔ (تی-کمینهٔ) نسبی دارد هرگاه عدد $n_0\in N$ وجود داشته باشد به گونه‌ای که

$\forall n\in N\,(n>n_0\Rightarrow f\,(c)\geq f\,(c+h_n))$,
$(\forall n\in N\,(n>n_0\Rightarrow f\,(c)\leq f\,(c+h_n)))$.

هم‌چنین می‌گوییم f نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}$ در c تی-بهینهٔ نسبی دارد هرگاه f نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}$ در c تی-بیشینهٔ نسبی یا تی-کمینهٔ نسبی داشته باشد.

قضیه ۲۰. فرض می‌کنیم f یک تابع حقیقی تعریف شده روی بازهٔ $]a,b[$ باشد و $c\in]a,b[$. اگر f نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}\in AL(R)$ در c تی-مشتق‌پذیر و نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}$ در c دارای تی-بهینهٔ نسبی باشد، آن‌گاه $f'(c,h_n)=0$.

اثبات. اگر $f'(c,h_n)>0$ آن‌گاه بنا بر قضیهٔ ۱۷، عدد $n_0\in N$ به گونه‌ای وجود دارد که برای بی‌نهایت جمله از $\{h_n\}_{n\in N}$ با شرط $n>n_0$ داریم:

$f(c+h_n)>f(c)$,

هم‌چنین بنا بر همان قضیه، عدد $n_1 \in N$ چنان وجود دارد که برای بی‌نهایت جمله از $\{h_n\}_{n\in N}$ با شرط $n > n_1$ داریم:

$$f(c+h_n) < f(c),$$

بنابراین f در c بهینه نیست.
با استدلال مشابهی می‌توان نشان داد که فرض $f'(c,h_n) < 0$ نیز به تناقض می‌رسد.

۶- قضیه‌های تی-رول، تی-کوشی، و تی-تیلور

قضیهٔ زیر، موسوم به قضیهٔ رول تعمیم‌یافته (تی-رول)، تعمیمی از قضیهٔ رول[3] در حساب دیفرانسیل و انتگرال است [۳,۶,۷].

قضیه ۲۱. (قضیهٔ تی-رول) فرض می‌کنیم $\{h_n\}_{n\in N} \in AL(R)$ و تابع $f:[a,b] \to R$ روی $[a,b]$ پیوسته و نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}$ در $]a,b[$ تی-مشتق‌پذیر باشد و $f(a) = f(b)$. در این صورت
$$\exists c \in]a,b[; f'(c,h_n) = 0.$$

اثبات. حکم قضیه برای تابع‌های ثابت برقرار است. فرض می‌کنیم تابع f ثابت نیست و
$$M = \max_{a\le x\le b} f(x), \quad m = \min_{a\le x\le b} f(x)$$

از شرط $f(a) = f(b)$ نتیجه می‌شود که تابع f حداقل یکی از مقادیر m و M را در نقطه‌ای مانند c از $]a,b[$ اختیار می‌کند. اکنون، حکم مورد نظر از قضیهٔ ۲۰ نتیجه می‌شود.
قضیهٔ زیر، موسوم به قضیهٔ کوشی تعمیم‌یافته (تی-کوشی)، تعمیمی از قضیهٔ مقدار میانگین کوشی[4] در حساب دیفرانسیل و انتگرال است [۳,۵,۶].

قضیه ۲۲. (قضیهٔ تی-کوشی) فرض می‌کنیم $\{h_n\}_{n\in N} \in AL(R)$ و تابع‌های f,g روی $[a,b]$ پیوسته و نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}$ در $]a,b[$ تی-مشتق‌پذیر باشند. در این صورت، نقطهٔ c در بازهٔ $]a,b[$ به گونه‌ای وجود دارد که
$$f'(c,h_n)\ (g(b)-g(a)) = g'(c,h_n)(f(b)-f(a))$$

اثبات. قرار می‌دهیم
$$u(x) = f(x)(g(b)-g(a)) - g(x)(f(b)-f(a))$$

تابع u روی $[a,b]$ پیوسته و بنا بر قضیهٔ ۱۴، نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}$ در $]a,b[$ تی-مشتق‌پذیر است و $u(a) = u(b)$. از قضیهٔ ۲۱، نتیجه می‌شود که

$$\exists c \in]a,b[; u'(c,h_n) = 0.$$

اکنون محاسبهٔ $u'(c,h_n)$ و استفاده از قضیهٔ ۱۴، حکم را نتیجه می‌دهد.
قضیه زیر، که آن را قضیهٔ اول مقدار میانگین تعمیم‌یافته (اول تی-مقدار میانگین) می‌نامیم، از قضیهٔ ۲۲ به ازای $g(x) = x$ به دست می‌آید. این قضیه، تعمیمی از قضیهٔ مقدار میانگین[5] در حساب دیفرانسیل و انتگرال است [۳,۶,۷].

قضیه ۲۳. (قضیهٔ اول تی-مقدار میانگین) فرض می‌کنیم $\{h_n\}_{n\in N} \in AL(R)$ و تابع f روی $[a,b]$ پیوسته و نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}$ در $]a,b[$ تی-مشتق‌پذیر باشد. در این صورت نقطهٔ c در بازهٔ $]a,b[$ به گونه‌ای وجود دارد که
$$f(b) - f(a) = (b-a) f'(c,h_n).$$

هم‌چنین اگر عدد $M \ge 0$ به گونه‌ای موجود باشد که

$$\forall x \in]a,b[: \quad |f'(x,h_n)| \le M,$$

[3] Rolle's theorem
[4] Cauchy's mean value theorem
[5] Mean value theorem

آن‌گاه

$$|f(b)-f(a)|\le (b-a)M.$$

نتیجه ۲۴. فرض می‌کنیم $\{h_n\}_{n\in N}\in AL(R)$ و تابع f روی $[a,b]$ پیوسته و نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}$ در $]a,b[$ تی-مشتق‌پذیر باشد و

$$\forall c\in]a,b[; f'(c,h_n)=0.$$

در این صورت تابع f روی $[a,b]$ ثابت است.

در قضیهٔ زیر، موسوم به قضیهٔ دوم مقدار میانگین تعمیم‌یافته (دوم تی-مقدار میانگین)، تعمیم دیگری از قضیهٔ مقدار میانگین برای مشتق در حساب دیفرانسیل و انتگرال به دست می‌آید.

قضیه ۲۵. (قضیهٔ دوم تی-مقدار میانگین) فرض می‌کنیم $\{h_n\}_{n\in N}\in AL(R)$ و تابع $f:[a,b]\to R$ روی $]a,b[$ پیوسته و در نقاط a و b به ترتیب دارای حدود راست و چپ $f(a+)$ و $f(b-)$، و نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}$ در $]a,b[$تی-مشتق‌پذیر باشد. در این صورت نقطهٔ c در بازهٔ $]a,b[$ به گونه‌ای وجود دارد که

$$f(b-)-f(a+)=(b-a)f'(c,h_n).$$

اثبات. تابع F را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in]a,b[,\\ f(a+), & x=a,\\ f(b-), & x=b.\end{cases}$$

این تابع روی $[a,b]$ پیوسته و نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}\in AL(R)$ در $]a,b[$تی-مشتق‌پذیر است. در نتیجه بنا بر قضیهٔ ۲۳ برای یک نقطهٔ c در بازهٔ $]a,b[$ داریم:

$$\begin{aligned} f(b-)-f(a+)&=F(b)-F(a)\\ &=(b-a)F'(c,h_n)\\ &=(b-a)f'(c,h_n).\end{aligned}$$

نتیجه ۲۶. فرض می‌کنیم $\{h_n\}_{n\in N}\in AL(R)$ و تابع f روی $]a,b[$ پیوسته و در نقاط a و b به ترتیب دارای حدود راست و چپ $f(a+)$ و $f(b-)$ و نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}$ در $]a,b[$ تی-مشتق‌پذیر باشد و

$$\forall c\in]a,b[; f'(c,h_n)=0.$$

در این صورت $f(a+)=f(b-)$، و تابع f روی $]a,b[$ ثابت است.

قضیهٔ زیر، موسوم به قضیهٔ تیلور تعمیم‌یافته (تی-تیلور)، تعمیمی از قضیهٔ تیلور[6] در حساب دیفرانسیل و انتگرال است [۳،۶،۷].

قضیه ۲۷. (قضیهٔ تی-تیلور) فرض می‌کنیم $m\in N$ و $\{h_n\}_{n\in N}\in AL(R)$و تابع‌های f,g - روی $[a,b]$ پیوسته و از همهٔ مراتب k $(1\le k\le m-1)$ روی $[a,b]$ مشتق‌پذیر، و از مرتبهٔ m نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}$ روی $]a,b[$ تی-مشتق‌پذیر باشند و $c\in[a,b]$. در این صورت برای هر $x\in[a,b]$، نقطهٔ x_1 بین x و c چنان وجود دارد که

$$\frac{[f(x)-f(c)-\sum_{k=1}^{m-1}\frac{f^{(k)}(c,h_n)}{k!}(x-c)^k]}{g^{(m)}(x_1,h_n)}=\frac{[g(x)-g(c)-\sum_{k=1}^{m-1}\frac{g^{(k)}(c,h_n)}{k!}(x-c)^k]}{f^{(m)}(x_1,h_n)}$$

اثبات. کافی است حالت $c\neq x\in[a,b]$ را در نظر بگیریم. فرض می‌کنیم $c<x\le b$ نقطهٔ ثابتی است و برای هر $t\in[c,x]$ قرار می‌دهیم:

---

[6] Taylor's theorem

$$F(t)=f(t)+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{f^{(k)}(t,h_n)}{k!}(x-t)^k\,,$$
$$G(t)=g(t)+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{g^{(k)}(t,h_n)}{k!}(x-t)^k\,.$$

تابع‌های F و G روی $[c,x]$ پیوسته و نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}$ روی $]c,x[$ تی-مشتق‌پذیرند. لذا از قضیهٔ ۲۲ و برابری‌های $F(x)=f(x)$ و $G(x)=g(x)$ نتیجه می‌شود که برای یک $x_1\in]c,x[$ داریم

$$F'(x_1,h_n)(g(x)-G(c)) \\ =G'(x_1,h_n)(f(x)-F(c)) \qquad (2)$$

بعلاوه

$$F'(t,h_n) \\ =f'(t,h_n)+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{f^{(k+1)}(t,h_n)}{k!}(x-t)^k \\ -\sum_{k=1}^{m-1}\frac{f^{(k)}(t,h_n)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}$$

محاسبه نشان می‌دهد که

$$F'(t,h_n)=\frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!}f^{(m)}(t,h_n) \qquad (3)$$

و به همین ترتیب

$$G'(t,h_n)=\frac{(x-t)^{m-1}}{(m-1)!}g^{(m)}(t,h_n) \qquad (4)$$

اکنون برابری‌های (۲)، (۳) و (۴)، حکم را نتیجه می‌دهند. اثبات قضیه در حالت $a\le x<c$ مشابه است.

قضیه ۲۸. فرض می‌کنیم $m\in N$ و $\{h_n\}_{n\in N}\in AL(R)$ و تابع f روی $[a,b]$ پیوسته و از همهٔ مراتب k $(1\le k\le m-1)$ روی $[a,b]$ مشتق‌پذیر، و از مرتبهٔ m نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}$ روی $]a,b[$ تی-مشتق‌پذیر باشد و $c\in[a,b]$. در این صورت برای هر $x\in[a,b]$، نقطهٔ x_1 بین x و c چنان وجود دارد که

$$f(x)=f(c)+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{f^{(k)}(c,h_n)}{k!}(x-c)^k \\ +\frac{f^{(m)}(x_1,h_n)}{m!}(x-c)^m$$

بعلاوه اگر تابع f علاوه بر شرایط قضیه, از مرتبهٔ m نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}$ روی $]a,b[$ به طور پیوسته تی-مشتق‌پذیر باشد آن‌گاه

$$f(x)=f(c)+\sum_{k=1}^{m-1}\frac{f^{(k)}(c,h_n)}{k!}(x-c)^k \\ +(x-c)^{m-1}o(1)$$

که در آن $\lim_{x\to c}o(1)=0$.

اثبات. قرار می‌دهیم $g(x)=(x-c)^m$. طبق قضیهٔ ۱۰ برای $1\le k\le m-1$ داریم $g^{(k)}(c,h_n)=0$ و $g^{(m)}(c,h_n)=m!$. اکنون حکم از قضیهٔ ۲۷ به دست می‌آید.

نتیجه ۲۹. فرض می‌کنیم f یک تابع حقیقی تعریف شده روی بازهٔ $[a,b]$ پیوسته و مشتق‌پذیر باشد، $c\in]a,b[$ و f نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}\in AL(R)$ در شرط $f'(c,h_n)=0$ صدق کند. اگر $f''(x,h_n)$ در یک بازهٔ باز شامل c پیوسته و $f''(c,h_n)>0$ ($f''(c,h_n)<0$)، آن‌گاه f نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}$ در c تی-کمینهٔ (تی-بیشینهٔ) نسبی دارد.

۷- مثال‌ها

الف. تابعی که روی R نسبت به یک بی‌نهایت کوچک مجاز تی-پیوسته باشد، در حالت کلی در قضیهٔ مقدار میانی تابع‌های پیوسته صدق نمی‌کند.

کاردینال مجموعهٔ چنین تابع‌هایی از کاردینال مجموعهٔ اعداد حقیقی کمتر نیست، زیرا اگر $a \neq b$، آن‌گاه تابع

$$f_{(a,b)}(x)=\begin{cases} a, & x \in Q, \\ b, & x \in R-Q \end{cases}$$

روی R پیوسته نیست ولی نسبت به بی‌نهایت کوچک $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n\in N} \in AI(R)$ روی R تی-پیوسته است، زیرا

$$\lim_{n\to+\infty} f_{(a,b)}(x+\frac{1}{n}) = \begin{cases} \lim_{n\to+\infty} a & x\in Q \\ \lim_{n\to+\infty} b & x \in R-Q \end{cases} = f_{(a,b)}(x),$$

بعلاوه این تابع مقدار $\frac{a+b}{2}$ را اختیار نمی‌کند.

ب. تابعی وجود دارد که شرایط قضیهٔ رول را ندارد ولی در شرایط قضیهٔ تی-رول صدق می‌کند. تابع

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x\neq 0, \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

روی $]a,b[$ برای $(a<0<b)$ مشتق‌پذیر نیست ولی نسبت به بی‌نهایت‌کوچک $\left\{\frac{(-1)^n}{2n\pi}\right\}_{n\in N} \in AL(R)$ در $]a,b[$ تی-مشتق‌پذیر است، زیرا

$$f'(0,\frac{(-1)^n}{2n\pi}) = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(\frac{(-1)^n}{2n\pi})-f(0)}{\frac{(-1)^n}{2n\pi}} = 0,$$

در نتیجه بنا بر قضیهٔ ۱۰ برای بازهٔ $]a,b[$ داریم:

$$f'(x,\frac{(-1)^n}{2n\pi}) = \begin{cases} \sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x} & x\neq 0, \\ 0 & x=0. \end{cases}$$

در این مثال اگر $a=-b\neq 0$، آن‌گاه شرایط قضیهٔ تی-رول برقرار است و تنها نقطه‌ای که در حکم آن قضیه صدق می‌کند $c=0$ است (نقطه‌ای که f در آن مشتق ندارد!).

پ. در مثال ب با فرض $b=\frac{2}{\pi}$ و $a=\frac{-1}{\pi}$ داریم $f(b)-f(a)=\frac{2}{\pi}$، در نتیجه حکم قضیهٔ اول تی-مقدار میانگین به این معنی است که معادلهٔ $f'(x,\frac{(-1)^n}{2n\pi})=\frac{2}{3}$ در بازهٔ $]a,b[$ دارای جواب است. بنابراین، از ضابطهٔ $f'(x,\frac{(-1)^n}{2n\pi})$ نتیجه می‌شود که معادلهٔ $\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}=\frac{2}{3}$ در بازهٔ $]\frac{-1}{\pi},\frac{2}{\pi}[$ جواب غیر صفر دارد. حکم اخیر از قضیهٔ مقدار میانی برای تابع‌های پیوسته نیز نتیجه می‌شود. زیرا تابع $g(u)=\sin u-u\cos u$ روی بازهٔ $[\frac{\pi}{2},2\pi]$ پیوسته است و $g(2\pi)=-2\pi<\frac{2}{3}<1=g(\frac{\pi}{2})$. در نتیجه، نقطه‌ای مانند $u_0\in]\frac{\pi}{2},2\pi[$ وجود دارد که $\sin u_0-u_0\cos u_0=0$. اگر قرار دهیم $x_0=\frac{1}{u_0}$، آن‌گاه $\sin\frac{1}{x_0}-\frac{1}{x_0}\cos\frac{1}{x_0}=0$ و

$$x_0\in]\frac{1}{2\pi},\frac{2}{\pi}[\subset]\frac{-1}{\pi},\frac{2}{\pi}[$$

ت. تابع مثال الف نسبت به بی‌نهایت‌کوچک $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}_{n\in N} \in AL(R)$ تی-پیوسته است، زیرا از تعریف تابع f داریم $f_{(a,b)}(x+\frac{(-1)^n}{n})=f_{(a,b)}(x)$

و در نتیجه

$$\lim_{n\to+\infty} f_{(a,b)}(x+\frac{(-1)^n}{n}) = f_{(a,b)}(x),$$

بنابراین برای هر $m\in N$ داریم

$$\forall x \in R : f^{(m)}_{(a,b)}(x, \frac{(-1)^n}{n}) = 0$$

با استفاده از این مثال می‌توان نشان داد که شرط پیوستگی f در قضیهٔ تی-تیلور لازم است، زیرا تابع $f_{(a,b)}$ در همهٔ شرایط قضیهٔ تی-تیلور جز پیوستگی صدق می‌کند و بنا بر ضابطهٔ $f^{(m)}$ داریم:

$$\sum_{k=1}^{m-1} \frac{f^{(k)}_{(a,b)}(c,h_n)}{k!}(x-c)^k + \frac{f^{(m)}_{(a,b)}(x_1,h_n)}{m!}(x-c)^m = 0,$$

بنابراین اگر $f_{(a,b)}$ در قضیهٔ تی-تیلور صدق کند و $c \in Q$ و $x \in R-Q$، آن‌گاه

$$\begin{aligned} b-a &= f_{(a,b)}(x) - f_{(a,b)}(c) \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} \frac{f^{(k)}_{(a,b)}(c,h_n)}{k!}(x-c)^k + \frac{f^{(m)}_{(a,b)}(x_1,h_n)}{m!}(x-c)^m = 0, \end{aligned}$$

و تناقض $a=b$ به دست می‌آید.

ث. تابع

$$f(x) = \begin{cases} x^5 \sin\frac{1}{x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

دارای مشتقات اول و دوم

$$f'(x) = \begin{cases} 5x^4 \sin\frac{1}{x} - x^3 \cos\frac{1}{x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} (20x^3 + x)\sin\frac{1}{x} - 8x^2 \cos\frac{1}{x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

است. هر چند f در 0 دارای مشتق از مرتبهٔ سوم نیست ولی نسبت به بی‌نهایت‌کوچک $\left\{\frac{(-1)^n}{2\pi n}\right\}_{n\in N} \in AL(R)$ در R، تی-مشتق از مرتبهٔ سوم دارد و

$$f'''(x, \frac{(-1)^n}{2\pi n}) = \begin{cases} (60x^3+9)\sin\frac{1}{x} - (36x + \frac{1}{x})\cos\frac{1}{x} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

بنابراین f روی R و هر بازهٔ بسته آن پیوسته، و از مراتب $k(1 \le k \le 2)$ روی R و هر بازهٔ باز آن مشتق‌پذیر، و نسبت به $\left\{\frac{(-1)^n}{2\pi n}\right\}_{n\in N}$ روی R و هر بازهٔ باز آن تی-مشتق‌پذیر از مرتبهٔ سوم است و در شرایط قضیهٔ تی-تیلور صدق می‌کند. تابع

$$g(x) = x^5 \sin\frac{1}{x} - \frac{4}{\pi^2}x^2 - \frac{7}{\pi^3}x - \frac{3}{\pi^4}$$

را در نظر می‌گیریم. از رابطهٔ $g(\frac{1}{3\pi})g(1) < 0$ و قضیهٔ مقدار میانی برای تابع‌های پیوسته نتیجه می‌شود که نقطهٔ $0 < x_0 < 1$ به گونه‌ای وجود دارد که $g(x_0) = 0$. اکنون در قضیهٔ ۲۸ فرض می‌کنیم $a=-1, b=2, c=\frac{-1}{\pi}$ و $x = x_0$ و درستی قضیهٔ تی-تیلور را برای بازهٔ $]a,b[$ (بازه‌ای که در آن، شرایط قضیهٔ تیلور مرتبه سوم برای f فراهم نیست!) و نقاط x و c، می‌آزماییم و ثابت می‌کنیم نقطهٔ $x_1 = 0$ (نقطه‌ای که در آن، f دارای مشتق از مرتبهٔ سوم نیست، ولی نسبت به بی‌نهایت‌کوچک $\left\{\frac{(-1)^n}{2\pi n}\right\}_{n\in N}$، تی-مشتق از مرتبهٔ سوم دارد!) رابطهٔ

$$f(x) = f(c) + \sum_{k=1}^{2} \frac{f^{(k)}(c, \frac{(-1)^n}{2\pi n})}{k!}(x-c)^k + \frac{f^{(3)}(x_1, \frac{(-1)^n}{2\pi n})}{3!}(x-c)^3$$

را برآورده می‌سازد. بنا بر ضابطه‌های توابع f'، f''، f''' و g داریم:

$$f(c)+\sum_{k=1}^{2}\frac{f^{(k)}(c,\frac{(-1)^n}{2\pi n})}{k!}(x-c)^k+\frac{f^{(3)}(x_1,\frac{(-1)^n}{2\pi n})}{3!}(x-c)^3$$

$$=f(\frac{-1}{\pi})+\frac{f'(\frac{-1}{\pi},\frac{(-1)^n}{2\pi n})}{1!}(x_0+\frac{1}{\pi})+\frac{f''(\frac{-1}{\pi},\frac{(-1)^n}{2\pi n})}{2!}(x_0+\frac{1}{\pi})^2+\frac{f'''(0,\frac{(-1)^n}{2\pi n})}{3!}(x_0+\frac{1}{\pi})^3$$

$$=\frac{4}{\pi^2}x_0^2+\frac{7}{\pi^3}x_0+\frac{3}{\pi^4}$$

$$=x_0^5\sin\frac{1}{x_0}-g(x_0)=f(x_0)=f(x).$$

ج. تابع

$$f(x)=\begin{cases} e^x-x+x^5\sin\frac{1}{x} & x\neq 0,\\ 1 & x=0\end{cases}$$

برای یک بازهٔ باز به مرکز 0 دارای شرایط نتیجهٔ ۲۹ است و نسبت به $\left\{\frac{(-1)^n}{2\pi n}\right\}_{n\in N}\in AL(R)$ در شرایط پیوستگی تی-مشتق دوم و

$$f'(0,\frac{(-1)^n}{2\pi n})=0, f''(0,\frac{(-1)^n}{2\pi n})=1>0$$

صدق می‌کند. بنابراین نسبت به $\left\{\frac{(-1)^n}{2\pi n}\right\}_{n\in N}\in AL(R)$ در نقطهٔ 0 تی-کمینهٔ نسبی دارد، به عبارت دیگر عدد $n_0\in N$ به گونه‌ای وجود دارد که

$$\forall n\in N(n>n_0\Rightarrow 1=f(0)\leq f(0+\frac{(-1)^n}{2\pi n})=e^{\frac{(-1)^n}{2\pi n}}-\frac{(-1)^n}{2\pi n}.$$

با فرض $h=\frac{(-1)^n}{2\pi n}$، نابرابری اخیر به صورت $e^h\geq h+1$ برای بی‌شمار مقدار به اندازهٔ کافی کوچک $h\neq 0$ تبدیل می‌شود. درستی این نابرابری با استفاده از قضیهٔ مقدار میانگین برای مشتق، ثابت می‌شود [۷].

چ. پیوستگی تی-مشتق دوم در نتیجهٔ ۲۹ لازم است. برای تابع

$$f(x)=\begin{cases} \sin x+x^3\sin\frac{1}{x}-x & x\neq 0,\\ 0 & x=0\end{cases}$$

داریم

$$f'(x,\frac{(-1)^n}{2\pi n})=\begin{cases} \cos x+3x^2\sin\frac{1}{x}-x\cos\frac{1}{x}-1 & x\neq 0,\\ 0 & x=0\end{cases}$$

$$f''(x,\frac{(-1)^n}{2\pi n})=\begin{cases} -\sin x+(6x+\frac{1}{x})\sin\frac{1}{x}-4\cos\frac{1}{x} & x\neq 0,\\ -1 & x=0.\end{cases}$$

این تابع در هر بازهٔ باز شامل نقطهٔ 0 در شرایط

$$f'(0,\frac{(-1)^n}{2\pi n})=0, f''(0,\frac{(-1)^n}{2\pi n})=-1<0$$

صدق می‌کند، ولی $f''(x,\frac{(-1)^n}{2\pi n})$ در هر بازهٔ باز شامل 0 پیوسته نیست و 0 نیز نقطهٔ تی-بیشینهٔ نسبی آن نمی‌باشد. در حقیقت نابرابری

$$0=f(0)\ge f(0+\frac{(-1)^n}{2\pi n})$$
$$=\sin\frac{(-1)^n}{2\pi n}+\frac{(-1)^{3n}}{(2\pi n)^3}\sin\frac{1}{\frac{(-1)^n}{2\pi n}}-\frac{(-1)^n}{2\pi n},$$

با فرض $h=\frac{(-1)^n}{2\pi n}$ به نابرابری نادرست $0\ge \sinh-h$ برای بی‌شمار مقدار به اندازهٔ کافی کوچک $h\neq 0$ تبدیل می‌شود [۷].

ح. از قضیهٔ ۱۰ نتیجه می‌شود که اگر تابع $f:]a,b[\to R$ در $c\in]a,b[$ مشتق‌پذیر نباشد، آن‌گاه بی‌نهایت‌کوچک $\{h_n\}_{n\in N}\in AI(R)$ به گونه‌ای وجود دارد که f نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}$ در c تی-مشتق‌پذیر نیست.

خ. برای هر بی‌نهایت‌کوچک $\{h_n\}_{n\in N}\in AI(R)$ و هر بازهٔ $]a,b[$ و هر $c\in]a,b[$، تابع $f:]a,b[\to R$ به گونه‌ای وجود دارد که در c پیوسته (و مشتق‌پذیر) نیست ولی نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}$ در c تی-پیوسته، و تی-مشتق‌پذیر است. فرض می‌کنیم برای مقادیر به اندازهٔ کافی بزرگ n (مثلا $n\ge n_0$) داشته باشیم $c+h_n\in]a,b[$. برای هر $p,q\in R$ با فرض $p\neq q$ قرار می‌دهیم:

$$f_{(p,q)}(x)$$
$$=\begin{cases}p & (x=c\vee x=c+h_n), n\ge n_0, a<x<b,\\ q & (x\neq c\wedge x\neq c+h_n), n\ge n_0, a<x<b\end{cases}$$

$f_{(p,q)}:]a,b[\to R$ در c پیوسته نیست ولی نسبت به $\{h_n\}_{n\in N}$ در c تی-پیوسته و تی-مشتق‌پذیر است و

$$f'_{(p,q)}(c,h_n)=0.$$

د. برای هر بازهٔ $]a,b[$ و هر $c\in]a,b[$، تابع $f:]a,b[\to R$ با ضابطهٔ

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x-c} & x\neq c\\ 1 & x=c,\end{cases}$$

نسبت به هیچ بی‌نهایت‌کوچک $\{h_n\}_{n\in N}\in AI(R)$ در c تی-پیوسته (و تی-مشتق‌پذیر) نیست.

ذ. در این مثال به معرفی تابعی مانند f می‌پردازیم که در بازهٔ $[-1,1]$ تعریف شده است و علاوه بر آن که دارای شرایط قضیهٔ تی-رول است، نسبت به سه بی‌نهایت‌کوچک $\{h_n\}_{n\in N}$ در همهٔ نقاط $]-1,1[$ بر خلاف تابع مثال ب، از تی-مشتق کراندار هم برخوردار است. فرض می‌کنیم $m\in N$ و تابع $u_m:[\frac{1}{2^{m+1}},\frac{1}{2^m}]\to R$ با ضابطهٔ

$$u_m(x)$$
$$=\frac{1}{2^{m+2}}(2^{m+1}x-1)(2^{m+2}x-3)(2^{m+1}x-2)$$

را در نظر می‌گیریم. برای هر $m\in N$ داریم:

$$u_m(\frac{1}{2^{m+1}})=u_m(\frac{1}{2^m})=u_m(\frac{3}{2^{m+2}})=0, \qquad (5)$$

هم‌چنین

$$u'_m(x)=\frac{1}{2}(2^{m+2}x-3)(2^{m+1}x-2)$$
$$+(2^{m+1}x-1)(2^{m+1}x-2)$$
$$+\frac{1}{2}(2^{m+1}x-1)(2^{m+2}x-3),$$

و

$$u'_m(\frac{1}{2^{m+1}})=u'_m(\frac{1}{2^m})$$
$$=\frac{1}{2}>0, u'_m(\frac{3}{2^{m+2}})=-\frac{1}{4}<0. \qquad (6)$$

از حل معادلهٔ $u'_m(x)=0$ نتیجه می‌شود که تابع u_m در نقطهٔ $a_{1,m}=\frac{9-\sqrt{3}}{3\times 2^{m+2}}$ دارای بیشینهٔ

$B_m = \frac{\sqrt{3}}{3^2\times 2^{m+3}}$ و در نقطهٔ $a_{2,m} = \frac{9+\sqrt{3}}{3\times 2^{m+2}}$ دارای کمینهٔ $A_m = \frac{-\sqrt{3}}{3^2\times 2^{m+3}}$ است. بنابراین

$$0 \le |u_m(x)| \le \frac{\sqrt{3}}{3^2\times 2^{m+3}} \tag{7}$$

اکنون تابع $v_m : [\frac{-1}{2^m}, \frac{-1}{2^{m+1}}] \to R$ را با ضابطهٔ

$$v_m(x) = u_m(-x)$$

در نظر می‌گیریم. برای هر $m \in N$، v_m در رابطه‌های

$$v_m(\frac{-1}{2^{m+1}}) = v_n(\frac{-1}{2^m}) = v_n(\frac{-3}{2^{m+2}}) = 0 \tag{8}$$

$$v'_m(\frac{-1}{2^{m+1}}) = v'_m(\frac{-1}{2^m}) = \frac{-1}{2} < 0$$

$$, v'_m(\frac{-3}{2^{m+2}}) = \frac{1}{4} > 0 \tag{9}$$

صدق می‌کند. این تابع در نقطهٔ $b_{1,m} = \frac{-9+\sqrt{3}}{3\times 2^{m+2}}$ دارای بیشینهٔ $B'_m = \frac{\sqrt{3}}{3^2\times 2^{m+3}}$ و در نقطهٔ $b_{2,m} = \frac{-9-\sqrt{3}}{3\times 2^{m+2}}$ دارای کمینهٔ $A'_m = \frac{-\sqrt{3}}{3^2\times 2^{m+3}}$ است. تابع $f:[-1,1]\to R$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} u_m(x) & x \in [\frac{1}{2^{m+1}}, \frac{1}{2^m}], m \in N \\ 0 & x = 0 \\ v_m(x) & x \in [\frac{-1}{2^m}, \frac{-1}{2^{m+1}}], m \in N \end{cases}$$

تابع f در بازهٔ $[-1,1]$ پیوسته است، زیرا برای $\varepsilon > 0$ و با فرض $x \in [\frac{1}{2^{m+1}}, \frac{1}{2^m}]$ بنا بر (7) داریم:

$$|f(x) - f(0)| = |u_m(x)| \le \frac{\sqrt{3}}{3^2\times 2^{m+3}},$$

اکنون اگر m به اندازهٔ کافی بزرگ باشد خواهیم داشت $|f(x)-f(0)| \le \varepsilon$، و f در مبدا پیوستهٔ راست است. پیوستگی چپ f در مبدا از زوج بودن تابع، و پیوستگی آن در سایر نقاط $[-1,1]$ از ضابطهٔ f و (5) و (8) نتیجه می‌شود. مشتق‌پذیری f در $]0,1[\cup]-1,0[$ هم نتیجه‌ای از ضابطهٔ f و (6) و (9) است. f در مبدا مشتق‌پذیر نیست، زیرا بنا بر (5) داریم:

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{f(\frac{1}{2^m}) - f(0)}{\frac{1}{2^m} - 0} = \lim_{m\to+\infty} \frac{u_m(\frac{1}{2^m})}{\frac{1}{2^m}} = 0,$$

و از سوی دیگر

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{f(a_{1,m}) - f(0)}{a_{1,m} - 0} = \lim_{m\to+\infty} \frac{B_m}{a_{1,m}} = \frac{1}{18\sqrt{3} - 6},$$

$$\lim_{m\to+\infty} \frac{f(a_{2,m}) - f(0)}{a_{2,m} - 0} = \lim_{m\to+\infty} \frac{A_m}{a_{2,m}} = \frac{-1}{18\sqrt{3} + 6}.$$

از قضیهٔ ۹ و (۵) و (۸) نتیجه می‌شود که f نسبت به بی‌نهایت‌کوچک‌های $\{h_n\}_{n\in N}$ با ضابطه‌های $h_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$، $h_n = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}}$ و $h_n = \frac{(-1)^n 3}{2^{n+2}}$ در بازهٔ $[-1,1]$ تی‌-پیوسته است. هم‌چنین f نسبت به همان بی‌نهایت‌کوچک‌ها در مبدا تی‌-مشتق‌پذیر است، زیرا بنا بر (۵) و (۸) داریم:

$$f'(0,h_n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{f(h_n) - f(0)}{h_n - 0} = 0.$$

برای اثبات کران‌دار بودن $f'(x,h_n)$ در $[-1,1]$ کافی است با توجه به مقدار $f'(0,h_n)$ و زوج بودن f، کران دار بودن آن را در $]0,1[$ نشان دهیم. اگر $x \in]0,1[$، آن‌گاه $m \in N$ به گونه‌ای وجود دارد که $x \in [\frac{1}{2^{m+1}}, \frac{1}{2^m}]$، در نتیجه بنا بر قضیهٔ ۱۰ و ضابطهٔ

u'_m داریم:

$$|f'(x,h_n)|=|f'(x)|=|u'_m(x)|\leq\frac{1}{2}.$$

ر. در این مثال، درستی قضیهٔ اول تی-مقدار میانگین را می‌آزماییم. فرض می‌کنیم $m\in N$ و تابع u_m را مانند مثال ذ و تابع $f:[-1,1]\to R$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} u_m(x) & x\in[\frac{1}{2^{m+1}},\frac{1}{2^m}], m\in N\\ 0 & x=0\\ 2^x-x\ln 2-1 & x\in[-1,0[\end{cases}$$

f زوج نیست و از آنچه در قضیهٔ ۱۰ و مثال ذ بیان شد نتیجه می‌شود که نسبت به بی‌نهایت‌کوچک‌های $\{h_n\}_{n\in N}$ با ضابطه‌های $h_n=\frac{(-1)^n}{2^n}$، $h_n=\frac{(-1)^n}{2^{n+1}}$ و $h_n=\frac{(-1)^n 3}{2^{n+2}}$ در بازهٔ $[-1,1]$ تی –پیوسته و ت-ی- مشتق‌پذیر با تی-مشتق کران‌دار زیر است:

$$f'(x,h_n)=\begin{cases} u'_m(x) & x\in[\frac{1}{2^{m+1}},\frac{1}{2^m}], m\in N\\ 0 & x=0\\ 2^x\ln 2-\ln 2 & x\in[-1,0[\end{cases}$$

در قضیهٔ ۲۳ فرض می‌کنیم $b=a_{1,m}$ و $a=-1$، بنا بر مثال ذ داریم:

$$f(b)-f(a)=f(a_{1,m})-f(-1)=B_m-\ln 2+\frac{1}{2}$$

بنابراین، بررسی درستی قضیهٔ اول تی-مقدار میانگین برای تابع f، به بررسی درستی گزارهٔ

$$\exists x\in]-1,a_{1,m}[: f'(x,h_n)=\frac{B_m-\ln 2+\frac{1}{2}}{a_{1,m}+1}$$

می‌انجامد. محاسبه نشان می‌دهد که برای هر $m\in N$،

$$-0.20<\frac{B_m-\ln 2+\frac{1}{2}}{a_{1,m}+1}<0.41.$$

اما $u'_m:[\frac{1}{2^{m+1}},\frac{1}{2^m}]\to R$ پیوسته است و بنا بر (۶) مقدارهای $\frac{1}{2}$ و $\frac{-1}{4}$ را به ترتیب در $\frac{1}{2^{m+1}}$ و $\frac{3}{2^{m+2}}$ اختیار می‌کند، و

$$-1<\frac{1}{2^{m+1}}<\frac{3}{2^{m+2}}<a_{1,m},$$

$$\frac{-1}{4}<-0.20<\frac{B_m-\ln 2+\frac{1}{2}}{a_{1,m}+1}<0.41<\frac{1}{2}.$$

اکنون بنا بر قضیه‌های ۱۰ و مقدار میانگین برای تابع‌های مشتق‌پذیر، $x\in]\frac{1}{2^{m+1}},\frac{1}{2^m}[$ به گونه‌ای وجود دارد که

$$f'(x,h_n)=u'_m(x)=\frac{B_m-\ln 2+\frac{1}{2}}{a_{1,m}+1}$$

و حکم ثابت می‌شود.

تشکر و **قدردانی**

نویسندهٔ مقاله، از داوران محترم، که نظرات و پیشنهاداتشان بر کیفیت مقاله افزود، کمال تشکر و قدردانی را دارد.

فهرست منابع

[1] E. Acosta G, C. Delgado G. Frechét vs. Carathéodory. American Mathematical Monthly. 101 (4): 332-338 (1994)

[2] S. Kuhn. The derivative á la Carathéodory. American Mathematical Monthly. 98 (1): 40-44 (1991)

[3] G. B. Bartle, D. R. Sherbert. Introduction to real analysis, Hamilton Printing Company. New York (2011)

[4] S. Lang. Real Analysis, second edition. Addison-Wesley Publication Company, USA (1983)

[5] M. Spivak. Calculus on manifolds. Westview Press. USA (1998)

[6] T. M. Apostol. Mathematical analysis, Addison-Wesley Publication Company. Massachusetts (1976)

[7] W. Rudin. Principles of mathematical analysis. 5th edition. McGraw-Hill Book Company. New York (2016)