دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هفتم، شماره سی، خرداد و تیر ۱۴۰۰
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

تاثیر تعداد عناصر از مرتبهٔ بزرگترین شمارندهٔ اول مرتبهٔ گروه روی ساختار گروه

علیرضا خلیلی اسبویی[1]، سید صادق صالحی امیری[2*]

(۱) گروه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، تهران، ایران
(۲) گروه ریاضی، واحد بابل، دانشگاه آزاد اسلامی، بابل، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۷/۰۶/۲۱ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۴/۲۷

چکیده

فرض کنید S یک گروه سادهٔ غیرآبلی است که با گروه $L_2(r)$ (جایی که r عدد اول مرسن است) یکریخت نمی‌باشد. در [۱] مورتو حدس زد که اگر گروه متناهی G توسط عناصر از مرتبهٔ p، که در آن p بزرگترین شمارندهٔ اول مرتبهٔ S است تولید شود و تعداد عناصر از مرتبهٔ p درگروه‌های G و S برابر باشند، آن‌گاه $S \cong \frac{G}{Z(G)}$.
در این مقاله درستی این حدس برای گروه‌های سادهٔ پراکنده ثابت شده است.

واژه‌های کلیدی: مرتبهٔ عنصر، گروه ساده، زیرگروه سیلو.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: salehisss@baboliau.ac.ir

۱- مقدمه

فرض کنید G یک گروه متناهی باشد. تعداد pـ زیرگروه‌های سیلوی G را با علامت $n_p(G)$ و تعداد عناصر از مرتبهٔ i را در گروه G را با علامت نشان $m_i(G)$ می‌دهیم.

فرض کنید n و k دو عدد طبیعی و r یک عدد اول باشد به طوری که $r^k|n$ اما $r^{k+1}\nmid n$، به عدد r^k، $r-$ قسمت از n نامیده و با علامت n_r نشان می‌دهیم. در واقع داریم $n=n_r.m$ که در آن m یک عدد طبیعی است که $r\nmid m$.

عدد اول p را در نظر می‌گیریم، عدد طبیعی n را یک عدد سیلوی قوی برای p می‌نامیم هرگاه به ازای هر عدد اول r داشته باشیم $n_r\equiv 1(mod\ p)$. توجه داریم که اگر n یک عدد سیلوی قوی برای p باشد آن‌گاه $n\equiv 1(mod\ p)$. بنابراین $p\nmid n$. همچنین توجه داریم که مجموعهٔ عددهای سیلوی قوی برای p تحت عمل ضرب بسته است.

طیف گروه G را با علامت $\omega(G)$ نشان داده و عبارت است از مجموعهٔ مرتبه‌های عناصر گروه G. در بسیاری از گروه‌های متناهی، طیف گروه به همراه مرتبه‌اش ساختار آن گروه را تا حد یکریختی مشخص می‌کند[۲] و [۳]. اما این مطلب در مورد همه گروه‌های متناهی برقرار نمی‌باشد. به‌عنوان مثال گروه دو وجهی D_8 و گروه کواترنیون Q_8 دارای طیف و مرتبهٔ یکسان هستند در حالی که یکریخت نمی‌باشند. با این وجود، نشان داده شده است که همه گروه‌های سادهٔ متناهی توسط طیف و مرتبهٔ خود تا حد یکریختی مشخص می‌شوند[۴].

در سال‌های اخیر شناسایی گروه‌های سادهٔ متناهی توسط مجموعهٔ تعداد عناصر هم مرتبه در گروه و مرتبهٔ آن گروه، توجه زیادی از محققین را به خود جلب نموده است[۵].

فرض اضافه مرتبه، در شناسایی گروه‌های سادهٔ متناهی در بسیاری از موارد قابل حذف است. از این رو مورتو در [۱] حدس زیر را مطرح نمود:

حدس: فرض کنید r یک عدد اول مرسن، S یک گروه سادهٔ غیرآبلی غیر یکریخت با $L_2(r)$ و p بزرگترین شمارندهٔ اول مرتبهٔ S باشد. اگر گروه متناهی G توسط عناصر مرتبهٔ p تولید شده و تعداد عناصر از مرتبهٔ p درگروه‌های G و S برابر باشد، آن‌گاه $\frac{G}{Z(G)}\cong S$.

در این مقاله به عنوان نتیجه اصلی به حدس فوق در مورد گروه‌های سادهٔ پراکنده جواب مثبت می‌دهیم.

قضیه اصلی: فرض کنید S یک گروه سادهٔ پراکنده و p بزرگترین شمارندهٔ اول مرتبهٔ S باشد. اگر $m_p(G)=m_p(S)$ و گروه متناهی G توسط عناصر مرتبهٔ p تولید شود، آن‌گاه $\frac{G}{Z(G)}\cong S$.

۲- نتایج اولیه

در این بخش چند لم مقدماتی را بیان می‌کنیم که در اثبات قضیهٔ اصلی از آنها استفاده خواهیم نمود.

لم ۲. ۱. [۶] فرض کنید G یک گروه متناهی بدون pـ زیرگروه سیلو دوری باشد. در این صورت تعداد عناصر از مرتبهٔ p در گروه G با -1 به پیمانه p^2 همنهشت است.

لم ۲. ۲. [۱] فرض کنید G یک گروه متناهی با pـ سیلو زیرگروه دوری از مرتبهٔ p^n باشد که در آن $n\geq 1$. در این صورت تعداد زیرگروه‌هایِ از مرتبهٔ p در گروه G با 1 به پیمانه p^n همنهشت است.

لم ۲. ۳. فرض کنید G یک گروه متناهی از مرتبهٔ $p^\alpha n$ باشد که در آن p یک عدد اول و $(p^\alpha,n)=1$. اگر P یک pـ زیرگروه سیلوی G باشد که روی p'ـ زیرگروه N عمل می‌کند و $C=C_N(P)$، آن‌گاه $|N:C|$ یک عدد سیلوی قوی برای p است.

اثبات: فرض کنید q یک عدد اول متمایز از p

باشد. ادعا می‌کنیم که $|N:C|_q \equiv 1(mod\ p)$.
چون P روی N با تزویج عمل می‌کند و $(|N|,|P|)=1$ پس $Q \in Syl_q(N)$ وجود دارد به طوری که $P-$ پایا است. فرض کنید $K = C \cap Q$، در این صورت K یک qـ زیرگروه سیلو C است. بنابراین $|C:K|$ و $|N:Q|$ نسبت به q اول هستند. از تساوی
$$|N:Q||Q:K| = |N:K| = |N:C||C:K|$$

نتیجه می‌شود که
$$|N:Q| = (|N:Q||Q:K|)_q = (|N:C||C:K|)_q = |N:C|_q.$$

کافی است نشان دهیم $|Q:K| \equiv 1(mod\ p)$. از آنجا که P روی Q عمل می‌کند و K زیرمجموعه بدون نقطه ثابت این عمل است، نتیجه می‌شود عناصری در $Q\backslash K$ وجود دارند که با P در مدارهای نابدیهی جابجا می‌شوند. به علاوه مرتبهٔ هر یک از این عناصر توسط p شمرده می‌شود. بنابراین
$$|K|(|Q:K|-1) = |Q|-|K| \equiv 0\ (mod\ p).$$

از طرف دیگر می‌دانیم $(|K|,p)=1$، پس $(|Q:K|-1) \equiv 0(mod\ p)$. این مطلب اثبات لم را کامل می‌کند.

نتیجه ۲. ۱. فرض کنید G یک گروه pـ پوچتوان باشد. $n_p(G)$ یک عدد سیلوی قوی برای p است.
اثبات. چون G یک گروه pـ پوچتوان است، پس $G = NP$ که در آن $N \lhd G$ یک pـ گروه و $P \in Syl_p(G)$. فرض کنید $U = \mathcal{N}_G(P)$. چون $P \subseteq U$ پس $G = NU$. بنابراین
$$|G:U| = |NU:U| = |N:N\cap U|.$$

اکنون با استفاده از لم ۲. ۳. کافی است نشان دهیم $N \cap U = C$ که در آن $C = \mathcal{C}_N(P)$.
واضح است که $C \subseteq \mathcal{N}_G(P)$، بنابراین $C \subseteq N \cap U$. برای اثبات عکس شمولیت کافی است نشان دهیم که $N \cap U \subseteq \mathcal{C}_G(P)$. چون
$$[(N\cap U),P] \subseteq N \cap [U,P] \subseteq N \cap P = 1$$

پس $N \cap U \subseteq \mathcal{C}_G(P)$. از طرفی
$$N\cap U = (N\cap U)\cap N \subseteq \mathcal{C}_G(P)\cap N = \mathcal{C}_N(P) = C.$$

بنابراین $N \cap U = C$ و حکم برقرار است.

لم ۲. ۴. فرض کنید G یک گروه pـ حلپذیر باشد. آن‌گاه $n_p(G)$ یک عدد سیلوی قوی برای p است.
اثبات. می‌توان فرض کرد که $|G| > 1$. استقراء را روی $|G|$ به کار می‌بریم. چون
$$n_p\left(\frac{G}{O_p(G)}\right) = \left|\frac{G}{O_p(G)} : \mathcal{N}_{\frac{G}{O_p(G)}}\left(\frac{P\,O_p(G)}{O_p(G)}\right)\right| = \left|\frac{G}{O_p(G)} : \frac{\mathcal{N}_G(P)O_p(G)}{O_p(G)}\right| = \left|\frac{G}{O_p(G)} : \frac{\mathcal{N}_G(P)}{O_p(G)}\right| = |G:\mathcal{N}_G(P)| = n_p(G)$$

بدون از دست دادن کلیت حکم می‌توان فرض نمود که $O_p(G)=1$. حال چون G یک $p-$ گروه حلپذیر است نتیجه می‌شود $O_{p'}(G) = N \neq 1$.
از آنجا که N یک p'ـ زیرگروه نرمال G است داریم $[\mathcal{N}_N(P),P] \leq N \cap P = 1$. بنابراین
$\mathcal{N}_G(P) \leq \mathcal{C}_N(P) \leq \mathcal{N}_N(P)$.

در نتیجه $\mathcal{N}_G(P) = \mathcal{N}_N(P)$.
فرض کنید $H = PN$. از تساوی گروهی $\mathcal{N}_H(P) = P\mathcal{N}_N(P)$، داریم:
$$|H:\mathcal{N}_H(P)| = \frac{|P||N|}{|P||\mathcal{N}_N(P)|} = |N:\mathcal{N}_N(P)|$$

با استفاده از تساوی بالا نتیجه می‌شود:
$$n_p\left(\frac{G}{N}\right) \times\ n_p(H) = \left|\frac{G}{N} : \mathcal{N}_{\frac{G}{N}}\left(\frac{PN}{N}\right)\right| |H:\mathcal{N}_H(P)| = \left|\frac{G}{N} : \frac{\mathcal{N}_G(P)N}{N}\right| |N:\mathcal{N}_N(P)| =$$

$\frac{|G:\mathcal{N}_G(P)|}{|N:\mathcal{N}_N(P)|}\ |N:\mathcal{N}_N(P)| = |G:\mathcal{N}_G(P)| = n_p(G).$

حال چون H یک pـ گروه پوچتوان است از نتیجه ۲. ۱. داریم $n_p(H)$ یک عدد سیلوی قوی برای p است. با استفاده از فرض استقراء $n_p\left(\frac{G}{N}\right)$ یک عدد سیلوی قوی برای p است. چون مجموعهٔ اعداد سیلوی قوی برای p تحت عمل ضرب بسته هستند، بنابراین $n_p(G) = n_p\left(\frac{G}{N}\right) \times n_p(H)$ یک عدد سیلوی قوی برای p است.

نتیجه ۲. ۲. فرض کنید G یک گروه متناهی، p یک مقسوم علیه اول $|G|$ باشد که $|G|_p = p$ و هیچ یک از مقسوم علیه های بزرگتر از یک $n_p(G)$ عدد سیلوی قوی برای p نباشد. اگر G توسط pـ زیرگروه‌های سیلو خود تولید شود آن‌گاه G یک گروه از مرتبهٔ p است یا $\frac{G}{Z(G)}$ گروه سادهٔ غیرآبلی است.

اثبات. می‌توان فرض نمود که G یک گروه ساده نیست، خصوصاً $|G| \neq p$. بنابراین G یک pـ گروه نیست. چون G توسط pـ زیرگروه‌های سیلوی خود تولید می‌شود و G یک pـ گروه نیست، پس G گروهی غیرآبلی است. از این‌رو $Z(G) < G$.

فرض کنید N زیرگروه نرمال ماکسیمال G باشد به طوری که $Z(G) \subseteq N$. چون G ساده نیست پس $1 < N$. فرض کنید $\frac{Z}{N} = Z(\frac{G}{N})$، بنابراین $Z = N$ یا $Z = G$. از طرفی چون G توسط pـ زیرگروهایش تولید می‌شود پس $p||\frac{G}{N}|$. بنابراین N یک p'ـ گروه است. اکنون با توجه به اینکه $n_p(\frac{G}{N})|n_p(G)$، نتیجه می‌شود که $\frac{G}{N}$ در فرض قضیه صدق می‌کند. با استفاده از استقراء روی $|G|$ و به کار بردن فرض استقراء برای $\frac{G}{N}$ نتیجه می‌گیریم که $\frac{G}{Z}$ ساده است.

ابتدا فرض کنید $Z = G$. در این صورت $\frac{G}{N}$ آبلی و از مرتبهٔ عدد اول است. بنابراین $|G:N| = p$ و G پوچتوان است. با استفاده از نتیجه ۲. ۱. $n_p(G)$ یک عدد سیلوی قوی برای p است. در نتیجه $n_p(G) = 1$. پس G دارای یک pـ زیرگروه سیلوی نرمال است. در نتیجه G یک pـ گروه است که تناقض است.

اکنون فرض کنید $Z = N$. در این صورت $\frac{G}{N}$ ساده است. فرض کنید $P \in Syl_p(G)$، آن‌گاه NP یک گروه pـ پوچتوان است. از نتیجه ۲. ۱. داریم $n_p(NP)$ یک عدد سیلوی قوی برای p است. در نتیجه $n_p(NP) = 1$. از این‌رو $P \lhd NP$ و $P \subseteq C_G(N)$. این رابطه برای هر pـ زیرگروه سیلوی G برقرار است. چون G توسط pـ زیرگروهای سیلوی خود تولید می‌شود، پس $N \subseteq Z(G) \subseteq N$. بنابراین $N = Z(G)$ و حکم برقرار است.

۳- اثبات قضیهٔ اصلی

در این بخش با کمک لم های بیان شده در قسمت قبل به اثبات قضیهٔ اصلی می‌پردازیم.

اثبات قضیهٔ اصلی. ابتدا نشان می‌دهیم که $|P| = p$ که در آن $P \in Syl_p(G)$. با استفاده از جدول‌های ۱ و ۲ در [۷] می‌توان مقدار $n_p(S)$ را برای هر گروه سادهٔ پراکنده S محاسبه نمود. چون p بزرگترین شمارندهٔ اول $|S|$ است، پس $m_p(S) = (p-1)n_p(S)$. با استفاده از تساوی اخیر می‌توان $m_p(S)$ را محاسبه نمود. همچنین به آسانی ملاحظه می‌شود که

$$m_p(G) = m_p(S) \not\equiv -1(mod\ p^2)$$

با استفاده از لم ۲. ۱. گروه G دارای یک pـ زیرگروه سیلوی دوری مانند P است. تعداد زیر گروه‌های از مرتبهٔ p در گروه G برابر $n_p(S)$ است. به آسانی دیده می‌شود که $n_p(S) \not\equiv 1(mod\ p^2)$. اکنون باتوجه به لم ۲,۲. نتیجه می‌گیریم $|P| = p$.

در ادامه نشان می‌دهیم که G یک گروه pـ حلپذیر نیست. فرض کنید گروهی حل‌پذیر باشد. با استفاده ازلم۲. ۴، $n_p(G) = n_p(S) = {q_1}^{\beta_1}{q_2}^{\beta_2} \dots {q_s}^{\beta_h}$ یک عدد سیلوی قوی برای p است. اما برای هر گروه سادهٔ پراکنده S به آسانی می‌توان بررسی نمود که $1 \le i \le h$ وجود دارد که ${q_i}^{\beta_i} \not\equiv 1 (mod\ p)$. این مطلب یک تناقض است. پس G یک گروه pـ حلپذیر نیست.

چون G یک گروه متناهی است پس دارای یک سری اصلی است. فرض کنید

$$G_0 \le G_1 \le G_2 \le \cdots \le G_r = G$$

یک سری اصلیِ G باشد، در این صورت $1 \le t \le r$ وجود دارد که $p \in \pi(G_t) \setminus \pi(G_{t-1})$. فرض کنید $K = G_t$ و $N = G_{t-1}$، پس $N \trianglelefteq K \trianglelefteq G$ یک سری نرمال G و $\frac{K}{N}$ یک عامل اصلی G است. بنابراین $\frac{K}{N}$ یک زیرگروه نرمال مینیمال $\frac{G}{N}$ است. می‌دانیم که عامل های اصلی در یک گروه، مشخصاً ساده هستند و هرگروه مشخصاً ساده یک گروه ساده یا یکریخت با حاصلضرب مستقیمی از گروه‌های ساده یکریخت با هم است. بنابراین $\frac{K}{N}$ گروهی ساده یا یکریخت با حاصلضرب مستقیمی از گروه‌های ساده یکریخت با هم است. چون $p \in \pi(\frac{K}{N})$ و $p^2 \nmid |\frac{K}{N}|$ نتیجه می‌شود که $\frac{K}{N}$ گروهی ساده است. از آنجا که $p || \frac{K}{N}|$، $|G|_p = p$، G گروهی pـ حلپذیر نیست و G توسط توسط عناصر از مرتبهٔ p تولید می‌شود نتیجه می‌گیریم که $K = G$. چون $K = G$ و $\frac{K}{N}$ ساده است پس $\frac{G}{N}$ گروهی ساده خواهد بود.

با توجه به اینکه تعداد گروه‌های سادهٔ پراکنده ۲۶ است [۷]، هر یک از آن‌ها را در فرض قضیه‌ی اصلی به‌صورت مجزا برابر با S قرار می‌دهیم. برای تکمیل برهان، نشان می‌دهیم در هر یک از این ۲۶ مورد $S \cong \frac{G}{Z(G)}$. برای این منظور ابتدا نشان می‌دهیم $S \cong \frac{G}{N}$ و سپس ثابت می‌کنیم $N = Z(G)$.

مورد ۱. $S = M_{11}$

در این حالت $p = 11$ و $n_{11}(S) = 2^4.3^2$ است. با استفاده از جدول ۱ از مرجع [۸] همه حالت‌های ممکن برای $\frac{G}{N}$ عبارت اند از: $L_2(11)$، M_{11}، M_{12}، $U_5(2)$، M_{22}، A_{11}، Mcl، HS، A_{12}، $U_6(2)$.

اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(11)$، آن‌گاه

$$n_{11}\left(\frac{G}{N}\right) = \frac{|G:\mathcal{N}_G(P)|}{|N:\mathcal{N}_N(P)|} = \frac{n_{11}(G)}{|N:\mathcal{N}_N(P)|} = \frac{n_{11}(S)}{|N:\mathcal{N}_N(P)|} = 24.$$

از رابطه بالا نتیجه می‌شود که

$$|N:\mathcal{N}_N(P)| = |N:\mathcal{C}_N(P)| = 2^2.3$$

با استفاده از لم ۲. ۳. داریم:

$$3 \equiv 1(mod\ 11)$$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong M_{12}$، آن‌گاه

$$2^6.3^3 = n_{11}(M_{12}) | n_{11}(G) = 2^4.3^2$$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong U_5(2)$، آن‌گاه

$$2^{10}.3^5 = n_{11}(U_5(2)) | n_{11}(G) = 2^4.3^2$$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong M_{22}$، آن‌گاه

$$2^7.3^2.7 = n_{11}(M_{22}) | n_{11}(G) = 2^4.3^2$$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{11}$، آن‌گاه

$$2^7.3^4.5.7 = n_{11}(A_{11}) | n_{11}(G) = 2^4.3^2$$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong Mcl$، آن‌گاه

$$2^7.3^6.5^2.7 = n_{11}(Mcl) | n_{11}(G) = 2^4.3^2$$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong HS$، آن‌گاه

$$2^9.3^2.5^2.7 = n_{11}(HS) | n_{11}(G) = 2^4.3^2$$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{12}$، آن‌گاه

$2^9.3^5.5.7 = n_{11}(A_{12}) | n_{11}(G) = 2^4.3^2$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong U_6(2)$، آن‌گاه
$2^{14}.3^6.7 = n_{11}(U_6(2)) | n_{11}(G) = 2^4.3^2$

که یک تناقض است؛ بنابراین $\frac{G}{N} \cong M_{11}$.

مورد ۲. $S = M_{12}$

در این حالت $p = 11$ و $n_{11}(S) = 2^6.3^3$ است. حالت‌های ممکن برای $\frac{G}{N}$ عبارت اند از: $L_2(11)$، M_{11}، M_{12}، $U_5(2)$، M_{22}، A_{11}، Mcl، HS، A_{12}، $U_6(2)$. اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(11)$، آن‌گاه
$|N: \mathcal{N}_N(P)| = |N: \mathcal{C}_N(P)| = 2^4\ .3^2$

با استفاده از لم ۲. ۳. $3 \equiv 1 (mod\ 11)$ که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong M_{11}$، آن‌گاه
$|N: \mathcal{N}_N(P)| = |N: \mathcal{C}_N(P)| = 2^2\ .3$

با استفاده از لم ۲. ۳. $3 \equiv 1 (mod\ 11)$، که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong U_5(2)$، آن‌گاه
$2^{10}.3^5 = n_{11}(U_5(2)) | n_{11}(G) = 2^6.3^3$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong M_{22}$، آن‌گاه
$2^7.3^2.7 = n_{11}(M_{22}) | n_{11}(G) = 2^6.3^3$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{11}$، آن‌گاه
$2^7.3^4.5.7 = n_{11}(A_{11}) | n_{11}(G) = 2^6.3^3$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong Mcl$، آن‌گاه
$2^7.3^6.5^2.7 = n_{11}(Mcl) | n_{11}(G) = 2^6.3^3$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong HS$، آن‌گاه
$2^9.3^2.5^2.7 = n_{11}(HS) | n_{11}(G) = 2^6.3^3$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{12}$، آن‌گاه
$2^9.3^5.5.7 = n_{11}(A_{12}) | n_{11}(G) = 2^6.3^3$
که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong U_6(2)$، آن‌گاه
$2^{14}.3^6.7 = n_{11}(U_6(2)) | n_{11}(G) = 2^6.3^3$

که یک تناقض است.؛ بنابراین $\frac{G}{N} \cong M_{12}$.

مورد ۳. $S = M_{22}$

در این حالت $p = 11$ و $n_{11}(S) = 2^7.3^2.7$ است. حالت‌های ممکن برای $\frac{G}{N}$ عبارت اند از: $L_2(11)$، M_{11}، M_{12}، $U_5(2)$، M_{22}، A_{11}، Mcl، HS، A_{12}، $U_6(2)$. اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(11)$، آن‌گاه
$|N: \mathcal{N}_N(P)| = |N: \mathcal{C}_N(P)| = 2^5\ .3.7$

با استفاده از لم ۲. ۳. $3 \equiv 1 (mod\ 11)$، که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong M_{11}$، آن‌گاه
$|N: \mathcal{N}_N(P)| = |N: \mathcal{C}_N(P)| = 2^5\ .7$

با استفاده از لم ۲. ۳. $7 \equiv 1 (mod\ 11)$، که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong M_{12}$، آن‌گاه
$2^6.3^3 = n_{11}(M_{12}) | n_{11}(G) = 2^7.3^2.7$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong U_5(2)$، آن‌گاه
$2^{10}.3^5 = n_{11}(U_5(2)) | n_{11}(G) = 2^6.3^3$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{11}$، آن‌گاه
$2^7.3^4.5.7 = n_{11}(A_{11}) | n_{11}(G) = 2^7.3^2.7$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong Mcl$، آن‌گاه
$2^7.3^6.5^2.7 = n_{11}(Mcl) | n_{11}(G) = 2^7.3^2.7$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong H\,S$، آن‌گاه
$2^9.3^2.5^2.7 = n_{11}(HS) | n_{11}(G) = 2^7.3^2.7$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{12}$، آن‌گاه
$2^9.3^5.5.7 = n_{11}(A_{12}) | n_{11}(G) = 2^7.3^2.7$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong U_6(2)$، آن‌گاه
$2^{14}.3^6.7 = n_{11}(U_6(2)) | n_{11}(G) = 2^7.3^2.7$

که یک تناقض است.؛ بنابراین $\frac{G}{N} \cong M_{22}$.

مورد ۴. $S = McL$

در این حالت $p = 11$ و $n_{11}(S) = 2^7.3^6.5^2.7$ است. حالت‌های ممکن برای $\frac{G}{N}$ عبارت‌اند از: $L_2(11)$، M_{11}، M_{12}، $U_5(2)$، M_{22}، A_{11}، Mcl، HS، A_{12}، $U_6(2)$.

اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(11)$، آن‌گاه

$$|N: \mathcal{N}_N(P)| = |N: \mathcal{C}_N(P)| = 2^5\, .3^5.5^2.7$$

با استفاده از لم ۲. ۳. $7 \equiv 1(mod\ 11)$، که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong M_{11}$، آن‌گاه

$$|N: \mathcal{N}_N(P)| = |N: \mathcal{C}_N(P)| = 2^3.3^4.5^2.7$$

با استفاده از لم ۲. ۳. $7 \equiv 1(mod\ 11)$، که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong M_{12}$، آن‌گاه

$$|N: \mathcal{N}_N(P)| = |N: \mathcal{C}_N(P)| = 2^3.3^3.5^2.7$$

با استفاده از لم ۲. ۳. $7 \equiv 1(mod\ 11)$، که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong U_5(2)$، آن‌گاه

$$2^{10}.3^5 = n_{11}(U_5(2))|n_{11}(G) = 2^7.3^6.5^2.7$$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong M_{22}$، آن‌گاه

$$|N: \mathcal{N}_N(P)| = |N: \mathcal{C}_N(P)| = 3^4.5^2$$

با استفاده از لم ۲. ۳. $5^2 \equiv 1(mod\ 11)$، که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{11}$، آن‌گاه

$$|N: \mathcal{N}_N(P)| = |N: \mathcal{C}_N(P)| = 3^2.5$$

که یک تناقض است. $5 \equiv 1(mod\ 11)$ بنابراین اگر $\frac{G}{N} \cong HS$، آن‌گاه

$$2^9.3^2.5^2.7 = n_{11}(HS)|n_{11}(G) = 2^7.3^6.5^2.7$$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{12}$، آن‌گاه

$$2^9.3^5.5.7 = n_{11}(A_{12})|n_{11}(G) = 2^7.3^6.5^2.7$$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong U_6(2)$، آن‌گاه

$$2^{14}.3^6.7 = n_{11}(U_6(2))|n_{11}(G) = 2^7.3^6.5^2.7$$

که یک تناقض است.؛ بنابراین $\frac{G}{N} \cong Mcl$.

مورد ۵. $S = HS$

در این حالت $p = 11$ و $n_{11}(S) = 2^9.3^2.5^2.7$ است. حالت‌های ممکن برای $\frac{G}{N}$ عبارت‌اند از: $L_2(11)$، M_{11}، M_{12}، $U_5(2)$، M_{22}، A_{11}، Mcl، HS، A_{12}، $U_6(2)$.

اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(11)$، آن‌گاه

$$|N: \mathcal{N}_N(P)| = |N: \mathcal{C}_N(P)| = 2^7\, .3.5^2.7$$

با استفاده از لم ۲. ۳. $7 \equiv 1(mod\ 11)$، که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong M_{11}$، آن‌گاه

$$|N: \mathcal{N}_N(P)| = |N: \mathcal{C}_N(P)| = 2^5.5^2.7$$

با استفاده از لم ۲. ۳.، $7 \equiv 1(mod\ 11)$، که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong M_{12}$، آن‌گاه

$$2^6.3^4 = n_{11}(M_{12})|n_{11}(G) = 2^9.3^2.5^2.7$$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong U_5(2)$، آن‌گاه

$$2^{10}.3^5 = n_{11}(U_5(2))|n_{11}(G) = 2^9.3^2.5^2.7$$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong M_{22}$، آن‌گاه

$$|N: \mathcal{N}_N(P)| = |N: \mathcal{C}_N(P)| = 2^2.5^2$$

با استفاده از لم ۲. ۳. $5^2 \equiv 1(mod\ 11)$، که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{11}$، آن‌گاه

$$2^7.3^4.5.7 = n_{11}(A_{11})|n_{11}(G) = 2^9.3^2.5^2.7$$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{12}$، آن‌گاه

$$2^9.3^5.5.7 = n_{11}(A_{12})|n_{11}(G) = 2^9.3^2.5^2.7$$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong U_6(2)$، آن‌گاه
$2^{14}.3^6.7 = n_{11}(U_6(2)) | n_{11}(G) = 2^9.3^2.5^2.7$

که یک تناقض است؛ بنابراین $\frac{G}{N} \cong HS$.

مورد ۶. $S = M_{23}$.

در این حالت $p = 23$ و $n_{23}(S) = 2^7.3^2.7.11$. حالت‌های ممکن برای $\frac{G}{N}$ عبارتند از: $L_2(23)$، $U_3(23)$، M_{23}، M_{24}، Co_1، Co_2، Co_3، Fi_{23}، A_n که در آن $23 \leq n \leq 28$. اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(23)$ آن‌گاه داریم
$|N: C_N(P)| = 2^4.3.7.11$ ؛

بنابراین با استفاده از لم ۲. ۳. $3 \equiv 1(mod\ 23)$، که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong U_3(23)$ آن‌گاه
$n_{23}(\frac{G}{N}) = 2^3.3^2.11.13^2$.

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم.
اگر $\frac{G}{N} \cong M_{24}$ آن‌گاه
$n_{23}(\frac{G}{N}) = 2^{10}.3^3.5.7$.

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong Co_1$ آن‌گاه
$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{21}.3^9.5^4.7^2.13$.

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong Co_2$ آن‌گاه
$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{18}.3^6.5^3.7$.

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong Co_3$ آن‌گاه
$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{10}.3^7.5^3.7$.

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong Fi_{23}$ آن‌گاه
$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{18}.3^{13}.5^2.7.13.17$.

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{23}$ آن‌گاه
$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{18}.3^9.5^4.7^3.11.13.17.19$.

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{24}$ آن‌گاه
$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{21}.3^{10}.5^4.7^3.11.13.17.19$.

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{25}$ آن‌گاه
$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{20}.3^{10}.5^6.7^3.11.13.17.19$.

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{26}$ آن‌گاه
$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{21}.3^9.5^6.7^3.11.13^2.17.19$.

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{27}$ آن‌گاه
$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{19}.3^{12}.5^6.7^3.11.13^2.17.19$.

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{28}$ آن‌گاه
$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{23}.3^{12}.5^5.7^4.11.13^2.17.19$.

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم؛ بنابراین $\frac{G}{N} \cong M_{23}$.

مورد ۷. $S = M_{24}$.

در این حالت $p = 23$ و $n_{23}(S) = 2^{10}.3^3.5.7$.

حالت‌های ممکن برای $\frac{G}{N}$ عبارتند از: $L_2(23)$، $U_3(23)$، M_{23}، M_{24}، Co_1، Co_2، Co_3، Fi_{23}، A_n،که در آن $23 \le n \le 28$.
اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(23)$ آن‌گاه داریم
$|N: C_N(P)| = 2^7.3^2.5.7$؛

با استفاده از لم ۲. ۳. $7 \equiv 1(mod\ 23)$، که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong U_3(23)$ آن‌گاه
$n_{23}(\frac{G}{N}) = 2^3.3^2.11.13^2$.

چون $n_{23}(G) = n_{23}(S) | n_{23}\left(\frac{G}{N}\right)$ یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong M_{23}$ آن‌گاه
$n_{23}(\frac{G}{N}) = 2^7.3^2.7.11$.

چون $n_{23}(G) = n_{23}(S) | n_{23}\left(\frac{G}{N}\right)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong Co_1$ آن‌گاه
$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{21}.3^9.5^4.7^2.13$.

چون $n_{23}(G) = n_{23}(S) | n_{23}\left(\frac{G}{N}\right)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong Co_2$ آن‌گاه
$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{18}.3^6.5^3.7$.

چون $n_{23}(G) = n_{23}(S) | n_{23}\left(\frac{G}{N}\right)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong Co_3$ آن‌گاه
$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{10}.3^7.5^3.7$.

چون $n_{23}(G) = n_{23}(S) | n_{23}\left(\frac{G}{N}\right)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong Fi_{23}$ آن‌گاه
$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{18}.3^{13}.5^2.7.13.17.$

چون $n_{23}(G) = n_{23}(S) | n_{23}\left(\frac{G}{N}\right)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{23}$ آن‌گاه
$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{18}.3^9.5^4.7^3.11.13.17.19.$

چون $n_{23}(G) = n_{23}(S) | n_{23}\left(\frac{G}{N}\right)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{24}$ آن‌گاه
$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{21}.3^{10}.5^4.7^3.11.13.17.19.$

چون $n_{23}(G) = n_{23}(S) | n_{23}\left(\frac{G}{N}\right)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{25}$ آن‌گاه
$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{20}.3^{10}.5^6.7^3.11.13.17.19.$

چون $n_{23}(G) = n_{23}(S) | n_{23}\left(\frac{G}{N}\right)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{26}$ آن‌گاه
$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{21}.3^9.5^6.7^3.11.13^2.17.19.$

چون $n_{23}(G) = n_{23}(S) | n_{23}\left(\frac{G}{N}\right)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{27}$ آن‌گاه
$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{19}.3^{12}.5^6.7^3.11.13^2.17.19.$

چون $n_{23}(G) = n_{23}(S) | n_{23}\left(\frac{G}{N}\right)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{28}$ آن‌گاه
$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{23}.3^{12}.5^5.7^4.11.13^2.17.19.$

چون $n_{23}(G) = n_{23}(S) | n_{23}\left(\frac{G}{N}\right)$ یک تناقض به دست می‌آوریم؛ بنابراین $\frac{G}{N} \cong M_{24}$.

مورد ۸. $S = Co_1$.
دراین حالت $p = 23$ و $n_{23}(S) = 2^{21}.3^9.5^4.7^2.13$. حالت‌های ممکن برای $\frac{G}{N}$ عبارتند از: $L_2(23)$، $U_3(23)$، M_{23}، M_{24}، Co_1، Co_2، Co_3، $F.5i_{23}$، A_n، که در آن $23 \le n \le 28$. اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(23)$ آن‌گاه داریم
$|N: C_N(P)| = 2^{18}.3^8.5^4.7^2.13$ ؛

بنابراین با استفاده از لم ۲. ۳. $13 \equiv 1(mod\ 23)$، که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong U_3(23)$ آن‌گاه
$n_{23}(\frac{G}{N}) = 2^3.3^2.11.13^2.$

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong M_{23}$ آن‌گاه
$n_{23}(\frac{G}{N}) = 2^7.3^2.7.11$.

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong Co_2$ آن‌گاه
$|N: C_N(P)| = 2^3.3^3.5^5.7.13$ ؛

بنابراین با استفاده از لم ۲. ۳. $13 \equiv 1(mod\ 23)$، که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong Co_3$ آن‌گاه
$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{10}.3^7.5^3.7$.

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong Fi_{23}$ آن‌گاه
$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{18}.3^{13}.5^2.7.13.17$.

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{23}$ آن‌گاه
$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{18}.3^9.5^4.7^3.11.13.17.19$.

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{24}$ آن‌گاه
$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{21}.3^{10}.5^4.7^3.11.13.17.19$.

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{25}$ آن‌گاه
$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{20}.3^{10}.5^6.7^3.11.13.17.19$.

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{26}$ آن‌گاه
$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{21}.3^9.5^6.7^3.11.13^2.17.19$.

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{27}$ آن‌گاه
$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{19}.3^{12}.5^6.7^3.11.13^2.17.19$.

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{28}$ آن‌گاه
$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{23}.3^{12}.5^5.7^4.11.13^2.17.19$.

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم؛ بنابراین $\frac{G}{N} \cong Co_1$.

مورد ۹. $S = Co_2$.

در این حالت $p = 23$ و $n_{23}(S) = 2^{18}.3^6.5^3.7$. حالت‌های ممکن برای $\frac{G}{N}$ عبارتند از: $L_2(23)$، $U_3(23)$، M_{23}، M_{24}، Co_1، Co_2، Co_3، Fi_{23}، A_n که در آن $23 \leq n \leq 28$.

اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(23)$ آن‌گاه داریم
$|N: C_N(P)| = 2^{15}.3^5.5^3.7$ ؛

بنابراین با استفاده از لم ۲. ۳. $7 \equiv 1(mod\ 23)$، که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong U_3(23)$ آن‌گاه
$n_{23}(\frac{G}{N}) = 2^3.3^2.11.13^2$.

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong M_{23}$ آن‌گاه
$n_{23}(\frac{G}{N}) = 2^7.3^2.7.11$.

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong Co_1$ آن‌گاه
$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{21}.3^9.5^4.7^2.13$.

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong Co_3$ آن‌گاه
$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{10}.3^7.5^3.7$.

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong Fi_{23}$ آن‌گاه
$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{18}.3^{13}.5^2.7.13.17.$

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{23}$ آن‌گاه
$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{18}.3^9.5^4.7^3.11.13.17.19.$

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{24}$ آن‌گاه
$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{21}.3^{10}.5^4.7^3.11.13.17.19.$

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{25}$ آن‌گاه
$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{20}.3^{10}.5^6.7^3.11.13.17.19.$

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{26}$ آن‌گاه
$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{21}.3^9.5^6.7^3.11.13^2.17.19.$

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{27}$ آن‌گاه
$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{19}.3^{12}.5^6.7^3.11.13^2.17.19.$

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$، یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{28}$ آن‌گاه
$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{23}.3^{12}.5^5.7^4.11.13^2.17.19.$

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم؛ بنابراین $\frac{G}{N} \cong Co_2$.

مورد ۱۰. $S = Co_3$.

در این حالت $p = 23$ و $n_{23}(S) = 2^{10}.3^7.5^3.7$.

حالت‌های ممکن برای $\frac{G}{N}$ عبارتند از: $L_2(23)$، $U_3(23)$، M_{23}، M_{24}، Co_1، Co_2، Co_3، Fi_{23}، A_nکه در آن $23 \leq n \leq 28$.

اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(23)$ آن‌گاه
$|N: C_N(P)| = 2^{12}.3^4.5^3.7$ ؛

بنابراین با استفاده از لم ۲. ۳. $7 \equiv 1(mod\ 23)$، که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong U_3(23)$ آن‌گاه
$n_{23}(\frac{G}{N}) = 2^3.3^2.11.13^2$.

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong M_{23}$ آن‌گاه
$n_{23}(\frac{G}{N}) = 2^7.3^2.7.11$.

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong Co_1$ آن‌گاه
$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{21}.3^9.5^4.7^2.13$.

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong Co_2$ آن‌گاه
$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{18}.3^6.5^3.7$.

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong Fi_{23}$ آن‌گاه
$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{18}.3^{13}.5^2.7.13.17.$

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$، یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{23}$ آن‌گاه
$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{18}.3^9.5^4.7^3.11.13.17.19.$

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{24}$ آن‌گاه
$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{21}.3^{10}.5^4.7^3.11.13.17.19.$

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{25}$ آن‌گاه

$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{20}.3^{10}.5^6.7^3.11.13.17.19.$

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$، یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{26}$ آن‌گاه

$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{21}.3^{9}.5^6.7^3.11.13^2.17.19.$

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$، یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{27}$ آن‌گاه

$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{19}.3^{12}.5^6.7^3.11.13^2.17.19.$

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$، یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{28}$ آن‌گاه

$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{23}.3^{12}.5^5.7^4.11.13^2.17.19.$

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم؛ بنابراین $\frac{G}{N} \cong Co_3$.

مورد ۱۱. $S = He$

در این حالت $p = 17$ و $n_7(S) = 2^7.3^3.5^2.7^3$ است. همه حالت‌های ممکن برای $\frac{G}{N}$ عبارت‌اند از: $L_2(17)$، $L_2(16)$، $S_4(4)$، He، $O_8^-(2)$، $L_4(4)$، $S_8(2)$، $U_4(4)$، $U_3(17)$، $O_{10}^-(2)$، $L_2(13^2)$، $S_4(13)$، $S_6(4)$، $L_3(16)$، $O_8^+(4)$، $F_4(2)$، A_{17}، A_{18}. اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(17)$، آن‌گاه

$|N:\mathcal{N}_N(P)| = |N:\mathcal{C}_N(P)| = 2^6.3.5^2.7^3$

با استفاده از لم ۲. ۳. $3 \equiv 1(mod\ 17)$، که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{17}$، آن‌گاه $n_{17}\left(\frac{G}{N}\right) = (17-2)!$. چون $n_{17}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{17}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود.

اگر $\frac{G}{N} \cong A_{18}$، آن‌گاه $n_{17}\left(\frac{G}{N}\right) = \frac{18!}{272}$. چون $n_{17}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{17}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود.

به طور مشابه اگر $\frac{G}{N}$ با سایر گروه‌های مذکور یکریخت باشد آن‌گاه یک تناقض ایجاد می‌شود؛ بنابراین $\frac{G}{N} \cong He$.

مورد ۱۰. $S = Fi_{22}$

در این حالت $p = 13$ و $n_{13}(S) = 2^{16}.3^8.5^2.7.11$ همه حالت‌های ممکن برای $\frac{G}{N}$ عبارت‌اند از: $L_3(3)$، $L_2(25)$، $U_3(4)$، $S_4(5)$، $L_4(3)$، $2F'_4(2)$، $L_2(13)$، $L_2(27)$، $G_2(3)$، $3D_4(2)$، $S_z(8)$، $L_2(64)$، $U_4(5)$، $L_3(9)$، $S_6(3)$، $O_7(3)$، $G_2(4)$، $S_4(8)$، $O_8{}^+(3)$، $L_5(3)$، A_{13}، A_{14}، A_{15}، $L_6(3)$، Suz، A_{16}، Fi_{22}. اگر $\frac{G}{N} \cong L_3(3)$، آن‌گاه

$n_{13}\left(\frac{G}{N}\right) = \frac{n_{71}(G)}{|N:\mathcal{N}_N(P)|} = 2^4.3^2.$

بنابراین

$|N:\mathcal{N}_N(P)| = |N:\mathcal{C}_N(P)| = 2^{12}.3^6.5^2.7.11$

با استفاده از لم ۲. ۳. $11 \equiv 1(mod\ 13)$، که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(25)$، آن‌گاه

$n_{13}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^2.3.5^2$.

بنابراین

$|N:\mathcal{N}_N(P)| = |N:\mathcal{C}_N(P)| = 2^{14}.3^7.7.11$

با استفاده از لم ۲. ۳. $11 \equiv 1(mod\ 13)$، که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(13)$، آن‌گاه

$n_{13}\left(\frac{G}{N}\right) = \frac{n_{13}(G)}{|N:\mathcal{N}_N(P)|} = 14.$

بنابراین

$|N:\mathcal{N}_N(P)| = |N:\mathcal{C}_N(P)| = 2^{15}.3^8.5^2.11$

با استفاده از لم ۲. ۳. $11 \equiv 1(mod\ 13)$، که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong Suz$، آن‌گاه

$n_{13}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{12}.3^6.5^2.7.11$؛

بنابراین

$|N:\mathcal{N}_N(P)| = |N:\mathcal{C}_N(P)| = 2^4.3^2$

با استفاده از لم ۲. ۳. $3^2 \equiv 1(mod\ 13)$، که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{13}$، آن‌گاه

$n_{13}\left(\frac{G}{N}\right) = (13-2)!$.

چون

$|N: \mathcal{N}_N(P)| = |N: \mathcal{C}_N(P)| = 2^8 . 3^4$

با استفاده از لم ۲. ۳. $3^4 \equiv 1(mod\ 13)$، که یک تناقض است. برای بقیه موارد نیز بطور مشابه می‌توان یک تناقض بدست آورد؛ بنابراین $\frac{G}{N} \cong Fi_{22}$.

مورد ۱۳. $S = Fi_{23}$.

در این حالت $p = 23$ و $n_{23}(S) = 2^{18}. 3^{13}. 5^2. 7.13.17$. حالت‌های ممکن برای $\frac{G}{N}$ عبارتند از: $L_2(23)$، $U_3(23)$، M_{23}، M_{24}، Co_1، Co_2، Co_3، Fi_{23}، A_n، که در آن $23 \le n \le 28$.

اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(23)$ آن‌گاه داریم

$|N: C_N(P)| = 2^{15}. 3^{12}. 5^2. 7.13.17$ ؛

بنابراین، $7 \equiv 1(mod\ 23)$ که یک تناقض است.

اگر $\frac{G}{N} \cong U_3(23)$ آن‌گاه

$n_{23}(\frac{G}{N}) = 2^3. 3^2. 11. 13^2$.

چون $n_{23}(G) = n_{23}(S)$ $\left|n_{23}\left(\frac{G}{N}\right)\right.$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong M_{23}$ آن‌گاه

$n_{23}(\frac{G}{N}) = 2^7. 3^2. 7.11$.

چون $n_{23}(G) = n_{23}(S)$ $\left|n_{23}\left(\frac{G}{N}\right)\right.$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong Co_1$ آن‌گاه

$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{21}. 3^9. 5^4. 7^2. 13$.

چون $n_{23}(G) = n_{23}(S)$ $\left|n_{23}\left(\frac{G}{N}\right)\right.$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong Co_2$ آن‌گاه

$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{18}. 3^6. 5^3. 7$.

چون $n_{23}(G) = n_{23}(S)$ $\left|n_{23}\left(\frac{G}{N}\right)\right.$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{23}$ آن‌گاه

$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{18}. 3^9. 5^4. 7^3. 11.13.17.19$.

چون $n_{23}(G) = n_{23}(S)$ $\left|n_{23}\left(\frac{G}{N}\right)\right.$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{24}$ آن‌گاه

$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{21}. 3^{10}. 5^4. 7^3. 11.13.17.19$.

چون $n_{23}(G) = n_{23}(S)$ $\left|n_{23}\left(\frac{G}{N}\right)\right.$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{25}$ آن‌گاه

$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{20}. 3^{10}. 5^6. 7^3. 11.13.17.19$.

چون $n_{23}(G) = n_{23}(S)$ $\left|n_{23}\left(\frac{G}{N}\right)\right.$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{26}$ آن‌گاه

$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{21}. 3^9. 5^6. 7^3. 11. 13^2. 17.19$.

چون $n_{23}(G) = n_{23}(S)$ $\left|n_{23}\left(\frac{G}{N}\right)\right.$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{27}$ آن‌گاه

$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{19}. 3^{12}. 5^6. 7^3. 11. 13^2. 17.19$.

چون $n_{23}(G) = n_{23}(S)$ $\left|n_{23}\left(\frac{G}{N}\right)\right.$، یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{28}$ آن‌گاه

$n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{23}. 3^{12}. 5^5. 7^4. 11. 13^2. 17.19$.

چون $n_{23}(G) = n_{23}(S)$ $\left|n_{23}\left(\frac{G}{N}\right)\right.$ یک تناقض به دست می‌آوریم؛ بنابراین $\frac{G}{N} \cong Fi_{23}$.

مورد ۱۴. $S = Fi'_{24}$

در این حالت $p = 29$ و $n_{23}(S) = 2^{20}. 3^{16}. 5^2. 7^2. 11.13.17.23$. همه حالت‌های ممکن برای $\frac{G}{N}$ عبارت‌اند از: $L_2(29)$، $L_2(17^2)$، $S_4(17)$، Ru، $U_4(17)$، Fi'_{24}، A_{29}، A_{30}.

اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(29)$، آن‌گاه

$$n_{71}\left(\frac{G}{N}\right) = \frac{n_{71}(G)}{|N:\mathcal{N}_N(P)|} = 30.$$

بنابراین

$$|N:\mathcal{N}_N(P)| = |N:\mathcal{C}_N(P)| = 2^{19}.3^{15}.5.7^2.11.13.17.23$$

با استفاده از لم ۲. ۳. $13 \equiv 1(mod\ 29)$،که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(17^2)$، آن‌گاه

$$n_{29}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^5.3^2.17^2.$$

چون $n_{29}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{29}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود. اگر $\frac{G}{N} \cong S_4(17)$، آن‌گاه

$$n_{29}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^7.3^4.17^4 .$$

چون $n_{29}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{29}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود. اگر $\frac{G}{N} \cong U_4(17)$، آن‌گاه

$$n_{29}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{10}.3^7.7.13.17^6.$$

چون $n_{29}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{29}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{29}$، آن‌گاه

$$n_{29}\left(\frac{G}{N}\right) = (29-2)! .$$

چون $n_{29}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{29}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{30}$، آن‌گاه

$$n_{29}\left(\frac{G}{N}\right) = \frac{30!}{812} .$$

چون $n_{29}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{29}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود؛ بنابراین $\frac{G}{N} \cong Fi'_{24}$.

مورد ۱۵. $S = J_1$

در این حالت $p = 19$ و $n_{19}(S) = 2^2.5.7.11$ است. همه حالت‌های ممکن برای $\frac{G}{N}$ عبارت‌اند از: $L_2(19)$، $L_3(7)$، $U_3(8)$، $U_3(19)$، $L_4(7)$، J_1، J_3، $L_3(11)$، HN، $U_4(8)$، A_{19} ، A_{20}، A_{21}، A_{22} و $^2E_6(2)$. اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(19)$، آن‌گاه

$$|N:\mathcal{N}_N(P)| = |N:\mathcal{C}_N(P)| = 7.11$$

با استفاده از لم ۲. ۳. $7 \equiv 1(mod\ 19)$، که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong L_3(7)$، آن‌گاه

$$2^5.3.7^3 = n_{19}(L_3(7)) | n_{19}(S) = 2^2.5.7.11$$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong U_3(8)$ آن‌گاه

$$n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^9.3^3.5^3.7 .$$

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{19}(G) = n_{19}(S)$ یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong U_3(19)$ آن‌گاه

$$19^3 || U_3(19)|$$

یک تناقض به‌دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong L_4(7)$ آن‌گاه

$$n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^9.3.5^2.7^6 .$$

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{23}(G) = n_{23}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong J_3$ آن‌گاه

$$n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^7.3^3.5.17 .$$

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{19}(G) = n_{19}(S)$، یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong L_3(11)$ آن‌گاه

$$n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^4.5^2.11^3 .$$

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{19}(G) = n_{19}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong HN$ آن‌گاه

$$n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{14}.3^4.5^6.7.11.$$

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{19}(G) = n_{19}(S)$ یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong U_4(8)$ آن‌گاه

$$n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{18}.3^3.5.7^2.13.$$

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{19}(G) = n_{19}(S)$ یک تناقض

به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{19}$ آن‌گاه
$n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{15}.3^{6}.5^{3}.7^{2}.11.13.17.$

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{19}(G) = n_{19}(S)$، یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{20}$ آن‌گاه
$n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{17}.3^{6}.5^{4}.7^{2}.11.13.17.$

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{19}(G) = n_{19}(S)$، یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{21}$ آن‌گاه
$n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{17}.3^{5}.5^{3}.7^{3}.11.13.17.$

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{19}(G) = n_{19}(S)$، یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{22}$ آن‌گاه
$n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{17}.3^{4}.5^{3}.7^{3}.11^{2}.13.17.$

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{19}(G) = n_{19}(S)$، یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong {}^{2}E_{6}(2)$ آن‌گاه
$n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{36}.3^{7}.5^{2}.7^{2}.11.13.17.$

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{19}(G) = n_{19}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم؛ بنابراین $\frac{G}{N} \cong J_1$.

مورد ۱۶. $S = J_2$

در این حالت $p = 7$ و $n_7(S) = 2^{6}.3^{2}.5^{2}$ است. همه حالت‌های ممکن برای $\frac{G}{N}$ عبارت‌اند از: $L_2(7)$، $L_2(8)$، $U_3(3)$، A_7، $L_2(49)$، $U_3(5)$، $L_3(4)$، A_8، J_2، A_{10}، $U_4(3)$، $S_4(7)$، $S_6(2)$، $U_3(31)$، $L_5(4)$، $S_{10}(2)$، $O_8^{+}(2)$.

اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(7)$، آن‌گاه
$|N: \mathcal{N}_N(P)| = |N: C_N(P)| = 2^{3}.3^{2}.5^{2}$

با استفاده از لم ۲. ۳. $3^{2} \equiv 1 (mod\ 7)$، که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_7$، آن‌گاه
$|N: \mathcal{N}_N(P)| = |N: C_N(P)| = 2^{3}.3.5$

با استفاده از لم ۲. ۳. $5 \equiv 1 (mod\ 7)$، که یک تناقض است. به طور مشابه اگر $\frac{G}{N}$ با سایر گروه‌های مذکور یکریخت باشد آن‌گاه یک تناقض ایجاد می‌شود؛ بنابراین $\frac{G}{N} \cong J_2$.

مورد ۱۷. $S = J_3$

در این حالت $p = 19$ و $n_{19}(S) = 2^{7}.3^{3}.5.17$ است. همه حالت‌های ممکن برای $\frac{G}{N}$ عبارت‌اند از: $L_2(19)$، $L_3(7)$، $U_3(8)$، $U_3(19)$، $L_4(7)$، J_1، J_3، $L_3(11)$، HN، $U_4(8)$، A_{19}، A_{20}، A_{21}، A_{22} و ${}^{2}E_{6}(2)$. اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(19)$، آن‌گاه
$|N: \mathcal{N}_N(P)| = |N: C_N(P)| = 2^{5}.3^{3}.17$

با استفاده از لم ۲. ۳. $17 \equiv 1 (mod\ 19)$، که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong L_3(7)$، آن‌گاه
$2^{5}.3.7^{3} = n_{19}(L_3(7)) | n_{19}(S) = 2^{7}.3^{3}.5.17$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong U_3(8)$ آن‌گاه
$n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{9}.3^{3}.5^{3}.7\ .$

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{19}(G) = n_{19}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong U_3(19)$ آن‌گاه
$19^{3} || U_3(19)|$

که یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong L_4(7)$ آن‌گاه
$n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{9}.3.5^{2}.7^{6}.$

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{19}(G) = n_{19}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong L_3(11)$ آن‌گاه
$n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{4}.5^{2}.11^{3}\ .$

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{19}(G) = n_{19}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong J_1$ آن‌گاه

$n_{19}(S) = 2^2.5.7.11$.

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right)|n_{19}(G) = n_{19}(S)$، یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong HN$ آن‌گاه
$n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{14}.3^4.5^6.7.11.$

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right)|n_{19}(G) = n_{19}(S)$ یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong U_4(8)$ آن‌گاه
$n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{18}.3^3.5.7^2.13$.

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right)|n_{19}(G) = n_{19}(S)$، یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{19}$ آن‌گاه
$n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{15}.3^6.5^3.7^2.11.13.17.$

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right)|n_{19}(G) = n_{19}(S)$، یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{20}$ آن‌گاه
$n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{17}.3^6.5^4.7^2.11.13.17.$

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right)|n_{19}(G) = n_{19}(S)$ یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{21}$ آن‌گاه
$n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{17}.3^5.5^3.7^3.11.13.17.$

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right)|n_{19}(G) = n_{19}(S)$ یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{22}$ آن‌گاه
$n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{17}.3^4.5^3.7^3.11^2.13.17.$

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right)|n_{19}(G) = n_{19}(S)$، یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong {}^2E_6(2)$، آن‌گاه
$n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{36}.3^7.5^2.7^2.11.13.17.$

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right)|n_{19}(G) = n_{19}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم؛ بنابراین $\frac{G}{N} \cong J_3$.

مورد ۱۸. $S = J_4$

در این حالت $p = 43$ و $n_{43}(S) = 2^{20}.3^3.5.11^3.23.29.31.37.$ همه حالت‌های ممکن برای $\frac{G}{N}$ عبارت‌اند از: $U_3(7)$، $U_4(7)$، $L_2(43)$، $L_2(7^3)$، $G_2(7)$، $U_7(2)$، $L_3(49)$، $S_6(7)$، $O_7(7)$، $O_8{}^+(7)$، $U_3(37)$، $U_8(2)$، $L_2(43^2)$، $S_4(43)$، $U_9(2)$، $O_{14}{}^-(2)$، $U_{10}(2)$، J_4، A_{43}، A_{44}، A_{45}، A_{46}. اگر $\frac{G}{N} \cong U_3(7)$، آن‌گاه
$n_{43}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^7.7^3$.

چون $n_{43}\left(\frac{G}{N}\right)|n_{43}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود. اگر $\frac{G}{N} \cong U_4(7)$، آن‌گاه
$n_{43}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^9.3.5^2.7^6$.

چون $n_{43}\left(\frac{G}{N}\right)|n_{43}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود. اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(43)$، آن‌گاه
$n_{43}\left(\frac{G}{N}\right) = \frac{n_{71}(G)}{|N:\mathcal{N}_N(P)|} = 44.$
بنابراین
$|N:\mathcal{N}_N(P)| = |N:\mathcal{C}_N(P)| = 2^{18}.3^3.5.11^2.23.29.31.37.$

با استفاده از لم ۲. ۳. $23 \equiv 1(mod\ 43)$، که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{43}$، آن‌گاه
$n_{43}\left(\frac{G}{N}\right) = (43-2)!.$

چون $n_{43}\left(\frac{G}{N}\right)|n_{43}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{44}$، آن‌گاه
$n_{29}\left(\frac{G}{N}\right) = \frac{44!}{1806}$.

چون $n_{43}\left(\frac{G}{N}\right)|n_{43}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود. برای بقیه موارد نیز بطور مشابه می‌توان یک تناقض بدست آورد؛ بنابراین $\frac{G}{N} \cong J_4$.

مورد ۱۹. $S = Suz$

در این حالت $p = 13$ و $n_{13}(S) = 2^{12}.3^6.5^2.7.11$. همه حالت‌های ممکن برای $\frac{G}{N}$ عبارت‌اند از: $L_3(3)$، $L_2(25)$، $U_3(4)$، $S_4(5)$، $L_4(3)$، $2F'_4(2)$، $L_2(13)$، $L_2(27)$، $G_2(3)$، $3D_4(2)$، $S_z(8)$، $L_2(64)$، $U_4(5)$، $L_3(9)$، $S_6(3)$، $O_7(3)$، $G_2(4)$، $S_4(8)$، $O_8{}^+(3)$، $L_5(3)$، A_{13}، A_{14}، A_{15}، $L_6(3)$، Suz، A_{16}، Fi_{22}.

اگر $\frac{G}{N} \cong L_3(3)$، آن‌گاه

$$n_{13}\left(\frac{G}{N}\right) = \frac{n_{71}(G)}{|N:\mathcal{N}_N(P)|} = 2^4.3^2.$$

بنابراین

$$|N:\mathcal{N}_N(P)| = |N:\mathcal{C}_N(P)| = 2^8.3^4.5^2.7.11$$

با استفاده از لم ۲. ۳. $11 \equiv 1(mod\ 13)$، که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(25)$، آن‌گاه

$$n_{13}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^2.3.5^2.$$

بنابراین

$$|N:\mathcal{N}_N(P)| = |N:\mathcal{C}_N(P)| = 2^{10}.3^5.7.11$$

با استفاده از لم ۲. ۳. $11 \equiv 1(mod\ 13)$، که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(13)$، آن‌گاه

$$n_{13}\left(\frac{G}{N}\right) = \frac{n_{71}(G)}{|N:\mathcal{N}_N(P)|} = 14.$$

بنابراین

$$|N:\mathcal{N}_N(P)| = |N:\mathcal{C}_N(P)| = 2^{11}.3^6.5^2.11$$

با استفاده از لم ۲. ۳. $11 \equiv 1(mod\ 13)$، که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong Fi_{22}$، آن‌گاه

$$n_{13}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{16}.3^8.5^2.7.11.$$

چون $n_{13}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{13}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{13}$، آن‌گاه

$$n_{13}\left(\frac{G}{N}\right) = (13-2)!\ .$$

چون $|N:\mathcal{N}_N(P)| = |N:\mathcal{C}_N(P)| = 2^4.3^2$ با استفاده از لم ۲. ۳. $3^2 \equiv 1(mod\ 13)$، که یک تناقض است. برای بقیه موارد نیز بطور مشابه می توان یک تناقض بدست آورد؛ بنابراین $\frac{G}{N} \cong Suz$.

مورد ۲۰. $S = HN$

در این حالت $p = 19$ و $n_{19}(S) = 2^{14}.3^4.5^6.7.11$. همه حالت‌های ممکن برای $\frac{G}{N}$ عبارت‌اند از: $L_2(19)$، $L_3(7)$، $U_3(8)$، $U_3(19)$، $L_4(7)$، J_1، J_3، $L_3(11)$، HN، $U_4(8)$، A_{19} ، A_{20}، A_{21}، A_{22} و $^2E_6(2)$. اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(19)$، آن‌گاه

$$|N:\mathcal{N}_N(P)| = |N:\mathcal{C}_N(P)| = 2^{12}.3^4.5^5.7.11$$

با استفاده از لم ۲. ۳. $7 \equiv 1(mod\ 19)$، که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong L_3(7)$، آن‌گاه

$$2^5.3.7^3 = n_{19}(L_3(7)) | n_{19}(S) = 2^{14}.3^4.5^6.7.11$$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong U_3(8)$ آن‌گاه

$$n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^9.3^3.5^3.7\ ؛$$

بنابراین

$$|N:\mathcal{N}_N(P)| = |N:\mathcal{C}_N(P)| = 2^5.3.5^3.11$$

با استفاده از لم ۲. ۳. $11 \equiv 1(mod\ 19)$، که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong U_3(19)$ آن‌گاه

$$19^3 || U_3(19)|$$

که یک تناقض به دست می‌آوریم.

اگر $\frac{G}{N} \cong L_4(7)$ آن‌گاه

$$n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^9.3.5^2.7^6.$$

چون $n_{23}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{19}(G) = n_{19}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم. اگر $\frac{G}{N} \cong J_1$ آن‌گاه

$$n_{19}(S) = 2^2.5.7.11\ .$$

بنابراین

$$|N:\mathcal{N}_N(P)| = |N:\mathcal{C}_N(P)| = 2^{12}.3^3.5^3$$

با استفاده از لم ۲. ۳. $3^3 \equiv 1(mod\ 19)$، که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong J_3$ آن‌گاه
$n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^7.3^3.5.17.$

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right)|n_{19}(G) = n_{19}(S)$، یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong L_3(11)$ آن‌گاه
$n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^4.5^2.11^3.$

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right)|n_{19}(G) = n_{19}(S)$، یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong U_4(8)$ آن‌گاه
$n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{18}.3^3.5.7^2.13\ .$

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right)|n_{19}(G) = n_{19}(S)$، یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{19}$ آن‌گاه
$n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{15}.3^6.5^3.7^2.11.13.17.$

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right)|n_{19}(G) = n_{19}(S)$، یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{20}$ آن‌گاه
$n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{17}.3^6.5^4.7^2.11.13.17.$

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right)|n_{19}(G) = n_{19}(S)$، یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{21}$ آن‌گاه
$n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{17}.3^5.5^3.7^3.11.13.17.$

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right)|n_{19}(G) = n_{19}(S)$، یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{22}$ آن‌گاه
$n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{17}.3^4.5^3.7^3.11^2.13.17.$

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right)|n_{19}(G) = n_{19}(S)$، یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong {}^2E_6(2)$ آن‌گاه
$n_{19}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{36}.3^7.5^2.7^2.11.13.17.$

چون $n_{19}\left(\frac{G}{N}\right)|n_{19}(G) = n_{19}(S)$ یک تناقض به دست می‌آوریم؛ بنابراین $\frac{G}{N} \cong HN$.

مورد ۲۱. $S = ON$

در این حالت $p = 31$ و $n_{31}(S) = 2^9.3^3.7^3.11.19$. همه حالت‌های ممکن برای $\frac{G}{N}$ عبارت‌اند از: $L_2(31)$، $L_3(5)$، $L_2(32)$، $L_2(125)$، $G_2(5)$، $L_5(2)$، $L_6(2)$، $L_4(5)$، $L_3(25)$، $O_7(5)$، $S_6(5)$، $O_8^+(5)$، $O_{10}^+(2)$، $U_3(31)$، $L_5(4)$، $S_{10}(2)$، $O_{12}^+(2)$، ON، Th، $O_{12}^-(2)$، $L_6(4)$، $S_{12}(2)$، A_{31}، A_{32}، A_{33}، A_{34} A_{35} و A_{36}.

اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(31)$، آن‌گاه
$|N:\mathcal{N}_N(P)| = |N:\mathcal{C}_N(P)| = 2^4.3^3.7^3.11.19$

با استفاده از لم ۲. ۳. $19 \equiv 1(mod\ 31)$، که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong L_3(5)$، آن‌گاه
$2^5.5^3 = n_{31}(L_3(5))|n_{31}(S) = 2^2.5.7.11$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(32)$، آن‌گاه
$n_{31}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^4.3.11$ ؛
بنابراین
$|N:\mathcal{N}_N(P)| = |N:\mathcal{C}_N(P)| = 2^5.3^2.7^3.19$

با استفاده از لم ۲. ۳. $19 \equiv 1(mod\ 31)$، که تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(125)$، آن‌گاه
$n_{31}\left(\frac{G}{N}\right) = 3^2.5^3.7.$

چون $n_{31}\left(\frac{G}{N}\right)|n_{31}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود. اگر $\frac{G}{N} \cong G_2(5)$، آن‌گاه
$n_{31}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^5.3^2.5^6.7.$

چون $n_{31}\left(\frac{G}{N}\right)|n_{31}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود. اگر $\frac{G}{N} \cong L_5(2)$، آن‌گاه
$n_{31}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{10}.3^2.7.$

چون $n_{31}\left(\frac{G}{N}\right)|n_{31}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود. اگر $\frac{G}{N} \cong L_6(2)$، آن‌گاه

$n_{31}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{15}.3^4.7^2$.

چون $n_{31}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{31}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود.
اگر $\frac{G}{N} \cong L_4(5)$، آن‌گاه

$n_{31}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^7.3.5^6.13$.

چون $n_{31}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{31}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود. به طور مشابه اگر $\frac{G}{N}$ با سایر گروه‌های مذکور یکریخت باشد آن‌گاه یک تناقض ایجاد می‌شود؛ بنابراین $\frac{G}{N} \cong ON$.

مورد ۲۲. $S = B$

در این حالت $p = 47$ و $n_{23}(S) = 2^{41}.3^{13}.5^6.7^2.11.13.17.19.31.$ همه حالت‌های ممکن برای $\frac{G}{N}$ عبارت‌اند از: $L_2(47)$، $L_2(47^2)$، $S_4(47)$، B، A_n، که در آن $47 \le n \le 52$.
اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(47)$، آن‌گاه

$n_{71}\left(\frac{G}{N}\right) = \frac{n_{71}(G)}{|N:\mathcal{N}_N(P)|} = 48.$

بنابراین

$|N:\mathcal{N}_N(P)| = |N:\mathcal{C}_N(P)| = 2^{37}.3^{12}.5^6.7^2.11.13.17.19.31$

با استفاده از لم ۲. ۳.، داریم: $3 \equiv 1(mod\ 47)$ که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(47^2)$، آن‌گاه

$n_{47}\left(\frac{G}{N}\right) = 2.5.13.17$.

از طرفی

$|N:\mathcal{N}_N(P)| = |N:\mathcal{C}_N(P)| = 2^{40}.3^{13}.5^5.7^2.11.19.31$

با استفاده از لم ۲. ۳. $11 \equiv 1(mod\ 47)$، چون $n_{47}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{47}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود.
اگر $\frac{G}{N} \cong S_4(47)$، آن‌گاه

$n_{47}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^9.3^2.5.13.17$ ؛

بنابراین

$|N:\mathcal{N}_N(P)| = |N:\mathcal{C}_N(P)| = 2^{32}.3^{11}.5^5.7^2.11.19.31$

با استفاده از لم ۲. ۳. $11 \equiv 1(mod\ 47)$، چون $n_{47}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{47}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود.
اگر $\frac{G}{N} \cong A_{47}$، آن‌گاه

$n_{47}\left(\frac{G}{N}\right) = (47-2)!$.

چون $n_{47}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{47}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود.
اگر $\frac{G}{N} \cong A_{48}$، آن‌گاه

$n_{47}\left(\frac{G}{N}\right) = \frac{48!}{2164}$.

چون $n_{47}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{47}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود.
اگر $\frac{G}{N} \cong A_{49}$، آن‌گاه

$n_{47}\left(\frac{G}{N}\right) = \frac{49!}{4324}$.

چون $n_{47}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{47}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود.
اگر $\frac{G}{N} \cong A_{50}$، آن‌گاه

$n_{47}\left(\frac{G}{N}\right) = \frac{50!}{12972}$.

چون $n_{47}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{47}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود.
اگر $\frac{G}{N} \cong A_{51}$، آن‌گاه

$n_{47}\left(\frac{G}{N}\right) = \frac{51!}{51888}$.

چون $n_{47}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{47}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود.
اگر $\frac{G}{N} \cong A_{52}$، آن‌گاه

$n_{47}\left(\frac{G}{N}\right) = \frac{52!}{259440}$.

چون $n_{47}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{47}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود؛ بنابراین $\frac{G}{N} \cong B$.

مورد ۲۳. $S = M$

در این حالت $p = 71$ و $n_{71}(S) = 2^{46}.3^{20}.5^8.7^5.11^2.13^3.17.19.23.29.31.41.47.59.$ همه حالت‌های ممکن برای $\frac{G}{N}$ عبارت‌اند از: $L_2(71)$، $L_5(5)$، $L_6(5)$، M، A_{71}، A_{72}.
اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(71)$، آن‌گاه

$n_{71}\left(\frac{G}{N}\right) = \frac{n_{71}(G)}{|N:\mathcal{N}_N(P)|} = 72.$

بنابراین

$|N:\mathcal{N}_N(P)| = |N:\mathcal{C}_N(P)| = 2^{43}.3^{18}.5^{8}.7^{5}.11^{2}.13^{3}.17.19.23.29.31.41.47.59.$

با استفاده از لم ۲. ۳. $17 \equiv 1(mod\ 71)$، که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong L_5(5)$، آن‌گاه

$n_{71}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{11}.3^{2}.5^{9}.13.31.$

چون $n_{71}\left(\frac{G}{N}\right)|n_{71}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود. اگر $\frac{G}{N} \cong L_6(5)$، آن‌گاه

$n_{71}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{12}.3^{4}.5^{15}.7.13.31^{2}.$

چون $n_{71}\left(\frac{G}{N}\right)|n_{71}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{71}$، آن‌گاه

$n_{71}\left(\frac{G}{N}\right) = (71-2)!\ .$

چون $n_{71}\left(\frac{G}{N}\right)|n_{71}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{72}$، آن‌گاه

$n_{71}\left(\frac{G}{N}\right) = \frac{72!}{4970}\ .$

چون $n_{71}\left(\frac{G}{N}\right)|n_{71}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود؛ بنابراین $\frac{G}{N} \cong M$.

مورد ۲۴. $S = Ru$

در این حالت $p = 29$ و $n_{29}(S) = 2^{13}.3^{3}.5^{3}.13$. همه حالت‌های ممکن برای $\frac{G}{N}$ عبارت‌اند از: $L_2(29)$، $L_2(17^2)$، $S_4(17)$، Ru، $U_4(17)$، Fi'_{24}، A_{29}، A_{30}. اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(29)$ آن‌گاه

$n_{29}\left(\frac{G}{N}\right) = \frac{n_{71}(G)}{|N:\mathcal{N}_N(P)|} = 30.$

بنابراین

$|N:\mathcal{N}_N(P)| = |N:\mathcal{C}_N(P)| = 2^{12}.3^{2}.5^{2}.13.$

با استفاده از لم ۲. ۳. $13 \equiv 1(mod\ 29)$، که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(17^2)$، آن‌گاه

$n_{29}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{5}.3^{2}.17^{2}.$

چون $n_{29}\left(\frac{G}{N}\right)|n_{29}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود. اگر $\frac{G}{N} \cong S_4(17)$، آن‌گاه

$n_{29}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{7}.3^{4}.17^{4}.$

چون $n_{29}\left(\frac{G}{N}\right)|n_{29}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود. اگر $\frac{G}{N} \cong U_4(17)$، آن‌گاه

$n_{29}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{10}.3^{7}.7.13.17^{6}.$

چون $n_{29}\left(\frac{G}{N}\right)|n_{29}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود. اگر $\frac{G}{N} \cong Fi'_{24}$، آن‌گاه

$n_{29}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{20}.3^{16}.5^{2}.7^{2}.11.13.17.23.$

چون $n_{29}\left(\frac{G}{N}\right)|n_{29}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{29}$، آن‌گاه

$n_{29}\left(\frac{G}{N}\right) = (29-2)!\ .$

چون $n_{29}\left(\frac{G}{N}\right)|n_{29}(G)$یک تناقض ایجاد می‌شود. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{30}$، آن‌گاه

$n_{29}\left(\frac{G}{N}\right) = \frac{30!}{812}\ .$

چون $n_{29}\left(\frac{G}{N}\right)|n_{29}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود؛ بنابراین $\frac{G}{N} \cong Ru$.

مورد ۲۵. $S = Ly$

در این حالت $p = 67$ و $n_7(S) = 2^{7}.3^{7}.5^{6}.7.31.37$ همه حالت‌های ممکن برای $\frac{G}{N}$ عبارت‌اند از: $L_2(67)$، $L_3(37)$، $L_3(29)$، $L_3(67)$، Ly، $L_2(37^3)$، $G_2(37)$، A_{67}، A_{67}، A_{68}، A_{69}، A_{70} اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(67)$ آن‌گاه

$2^{2}.17 = n_{67}(L_2(67))|n_{67}(S) = 2^{7}.3^{7}.5^{6}.7.31.37$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong A_{67}$، آن‌گاه

$n_{67}\left(\frac{G}{N}\right) = (67-2)!$.

چون $n_{67}\left(10.5\frac{G}{N}\right) | n_{67}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود.

به طور مشابه اگر $\frac{G}{N}$ با سایر گروه‌های مذکور یکریخت باشد آن‌گاه یک تناقض ایجاد می‌شود؛ بنابراین $\frac{G}{N} \cong Ly$.

مورد ۲۶. $S = Th$

در این حالت $p = 31$ و $n_{31}(S) = 2^{15}.3^9.5^2.7^2 13.19$ همه حالت‌های ممکن برای $\frac{G}{N}$ عبارت‌اند از: $L_2(31)$، $L_3(5)$، $L_2(32)$، $L_2(125)$، $G_2(5)$، $L_5(2)$، $L_6(2)$، $L_4(5)$، $L_3(25)$، $O_7(5)$، $S_6(5)$، $O_8^+(5)$، $O_{10}^+(2)$، $U_3(31)$، $L_5(4)$، $S_{10}(2)$، $O_{12}^+(2)$، ON، Th، $O_{12}^-(2)$، $L_6(4)$، $S_{12}(2)$، A_{31}، A_{32}، A_{33}، A_{34}، A_{35} و A_{36}. اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(31)$، آن‌گاه

$|N: \mathcal{N}_N(P)| = |N: \mathcal{C}_N(P)| = 2^{10}.3^9.5^2.7^2.13.19$

با استفاده از لم ۲. ۳. $19 \equiv 1(mod\ 31)$، که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong L_3(5)$، آن‌گاه

$2^5.5^3 = n_{31}(L_3(5)) | n_{31}(S) = 2^{15}.3^9.5^2.7^2 13.19$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(32)$، آن‌گاه

$n_{31}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^4.3.11$ ؛

بنابراین

$2^4.3.11 = n_{31}(L_3(5)) | n_{31}(S) = 2^{15}.3^9.5^2.7^2.13.19$

که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong L_2(125)$، آن‌گاه

$n_{31}\left(\frac{G}{N}\right) = 3^2.5^3.7.$

چون $n_{31}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{31}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود. اگر $\frac{G}{N} \cong G_2(5)$، آن‌گاه

$n_{31}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^5.3^2.5^6.7.$

چون $n_{31}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{31}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود. اگر $\frac{G}{N} \cong L_5(2)$، آن‌گاه

$n_{31}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{10}.3^2.7.$

آن‌گاه

$|N: \mathcal{N}_N(P)| = |N: \mathcal{C}_N(P)| = 2^5.3^7.5^2.7.13.19$

با استفاده از لم ۲. ۳. $19 \equiv 1(mod\ 31)$، که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong L_6(2)$، آن‌گاه

$n_{31}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^{15}.3^4.7^2$.

آن‌گاه

$|N: \mathcal{N}_N(P)| = |N: \mathcal{C}_N(P)| = 3^5.13.19$

با استفاده از لم ۲. ۳. $19 \equiv 1(mod\ 31)$، که یک تناقض است. اگر $\frac{G}{N} \cong L_4(5)$، آن‌گاه

$n_{31}\left(\frac{G}{N}\right) = 2^7.3.5^6.13$.

چون $n_{31}\left(\frac{G}{N}\right) | n_{31}(G)$ یک تناقض ایجاد می‌شود. به طور مشابه اگر $\frac{G}{N}$ با سایر گروه‌های مذکور یکریخت باشد آن‌گاه یک تناقض ایجاد می‌شود؛ بنابراین $\frac{G}{N} \cong Th$.

برای تکمیل برهان نشان می‌دهیم $N = Z(G)$. فرض کنید P یک pـ زیرگروه سیلوی G باشد، چون $n_p\left(\frac{G}{N}\right) = n_p(G)$ و $n_p\left(\frac{G}{N}\right) = \frac{n_p(G)}{|N:\mathcal{N}_N(P)|}$ پس $|N: \mathcal{N}_N(P)| = 1$. بنابراین $N \leq \mathcal{N}_N(P)$. از این‌رو $[P, N] \leq P \cap N = 1$. این بدان معنی است که N با هر $p-$ زیرگروه.سیلوی G جابجا می‌شود. چون G توسط عناصر از مرتبهٔ p تولید می‌شود نتیجه می‌شود که $N \subseteq Z(G)$. از طرف دیگر $\frac{Z(G)}{N} \trianglelefteq \frac{G}{N}$، چون $\frac{G}{N}$ یک گروه سادهٔ غیرآبلی است پس $N = Z(G)$ و حکم ثابت است.

فهرست منابع

[1] A. Moreto, The number of elements of prime order, *Monatsh. Math*, **186** (1) (2018), 189-195.

[2] A. S. Mamontov, E. Jabara, Recognition of the group $L_3(4)$ by the set of element orders in the class of all groups, *Algebra Logik,* **54** (2015), 279-282.

[3] W. Shi, Arithmetical properties of finite groups, Groups St. Andrews 2005, *London Math. Soc.*, Lecture Note Ser, **340** (2), 646-653. Cambridge University Press, Cambridge (2007).

[4] A. V. Vasil'ev, M. Grechkoseeva, V. D. Mazurov, Characterization of the finite simple groups by spectrum and order, *Algebra Logic,* **48** (5) (2009), 385-409.

[5] A. Khalili Asboei, S. S. Salehi Amiri , A. Iranmanesh, A. Tehranian, A characterizati-on of sporadic simple groups by NSE and order, *J. Algebra Appl*, **12** (02) (2013), 1250158.

[6] P. Hall, On a theorem of Frobenius, *Proc. Lond. Math. Soc*, **40** (1936), 468-501.

[7] A. Khosravi, B. Khosaravi, Two new characterization of sporadic simple groups, *Pure Math. Appl*, **16** (2005), 287-293.

[8] A. V. Zavarnitsine, Finite simple groups with narrow prime spectrum, *Sib. Élektron. Mat. Izv,* ***6** (2009)*, 1-12.