دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هفتم، شماره سی و چهارم، بهمن و اسفند 1400
شماره شاپا: 2588X-588

پژوهش‌های نوین در ریاضی
دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

دوگانگی نوع ولف برای برنامه‌های ریاضی با قیود تعادلی ناهموار

علی انصاری اردلی*

استادیار، گروه ریاضی کاربردی، دانشکده علوم ریاضی، دانشگاه شهرکرد، شهرکرد، ایران

تاریخ ارسال مقاله: 1399/08/09 تاریخ پذیرش مقاله: 1400/06/06

چکیده:

یک برنامه‌ی ریاضی باقیود تعادلی یکی از مسائل بهینه‌سازی است که قیود آن برای مدل‌سازی تعادل‌های معینی در کاربردهای علوم مهندسی و اقتصاد مورد استفاده قرار می‌گیرد. هدف ما در این مقاله بررسی شرایط لازم بهینگی و بدست آوردن دوگان ولف برای این گونه مسائل است. برای این منظور یک مساله‌ی بهینه‌سازی با قیود تعادلی را در حالت ناهموار و غیرمحدب در نظر گرفته و فرض می‌کنیم توابعی که در مساله وجود دارند الزاماً مشتق‌پذیر و یا محدب نیستند. به کمک مفهوم محدب‌کننده‌ها که تعمیمی از زیردیفرانسیل‌ها هستند، مفاهیم ایستایی تعمیم یافته، تحدب تعمیم یافته و برخی از توصیف‌های قیدی را برای این‌گونه از مسائل تعریف می‌کنیم. مساله‌ی دوگان وُلف را برای یک مساله‌ی بهینه‌سازی با قیود تعادلی معرفی می‌کنیم و برای این مساله با استفاده از مفهوم محدب‌کننده‌ها، قضایای دوگانگی ضعیف و دوگانگی قوی را بیان و اثبات می‌کنیم.

واژه‌ی کلیدی: مساله بهینه‌سازی با قیود تعادلی، مساله دوگان وُلف، شرایط بهینگی، محدب‌کننده‌ها.

*. عهده دار مکاتبات
Email: ali.ansariardali@sku.ac.ir

1- مقدمه

یک برنامه‌ی ریاضی با قیود تعادلی[2] یا به طور خلاصه MPEC یک مساله‌ی بهینه‌سازی است که در آن قیود اصلی توسط یک نابرابری تغییراتی پارامتریک یا یک دستگاه تکمیلی تشریح می‌شوند. واژه‌ی تعادل به این خاطر اختیار شده است که قیود نابرابری تغییراتی در MPEC به طور معمول برای مدل‌سازی تعادل‌های معینی در کاربردهای مهندسی و اقتصاد مورد استفاده قرار می‌گیرند.

در این مقاله مساله‌ی MPEC زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} &\min\ f(x) \\ &\text{s.t. } g(x) \le 0,\ h(x) = 0 \qquad (1) \\ &G(x) \ge 0, H(x) \ge 0,\ G(x)^T H(x) = 0, \end{aligned}$$

که در آن $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$، $g:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$، $h:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ و $H, G:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ توابع داده شده هستند.

بر خلاف مسائل بهینه‌سازی غیرخطی استاندارد که فقط یک شرط ایستایی دوگان(شرط کارش-کان-تاکر) دارند، به دلیل فرمول بندی‌های گوناگونی که برای مسائل MPEC وجود دارد؛ به دلیل فرمول بندی‌های گوناگونی که برای مسائل MPEC وجود دارد و همچنین استفاده از مفاهیم مشتق‌پذیری تعمیم یافته، مفاهیم متفاوتی از ایستایی که اهمیت فراوانی در مطالعه مسائل ریاضی با قیود تعادلی دارد، بوجود آمده است. از این مفاهیم بویژه می‌توان از B-ایستایی[3]، C- ایستایی[4]، A- ایستایی[5]، M- ایستایی[6] و S- ایستایی[7] نام برد. در سال‌های اخیر به ویژه به مفهوم M- ایستایی و S - ایستایی، از جهت وجود برخی کاربردهای عملی به‌ویژه در تعادل‌های مکانیکی و امکان برقراری آن به عنوان یک شرط لازم بهینگی مرتبه‌ی اول تحت ضعیف‌ترین توصیف‌های قیدی، توجه زیادی شده است[1، 2]. در سال‌های گذشته نویسندگان زیادی شرایط بهینگی و روش‌های حل مسائل بهینه‌سازی با قیود تعادلی را در حالت هموار[3، 4، 5] و ناهموار [6، 7، 8] مورد مطالعه و بررسی قرار داده‌اند.

همانطور که می‌دانیم آنالیز محدب نقش اساسی در نظریه‌ی بهینه‌سازی دارد و این یک حقیقت شناخته شده است. اما رده‌ی بزرگی از مسائل کاربردی هستندکه نیازمند بهینه‌سازی توابع غیرمحدب‌اند. متاسفانه غیرمحدب بودن کار را بسیار سخت می‌کند و در بسیاری از موارد از خواص خوب فضاهای محدب نمی‌توان استفاده کرد. بنابراین، طبیعی است تا ایده‌ی توابع محدب به گونه‌ای توسعه یابد که روش‌های آنالیز محدب برای مسائل غیرمحدب نیز قابل استفاده باشند[9].

مفهوم محدب‌کننده تعمیمی از زیر دیفرانسیل‌ها است. در واقع بسیاری از زیر دیفرانسیل‌های که در مسائل بهینه‌سازی برای توابع موضعا لیپ‌شیتس استفاده می‌شوند، مانند زیر دیفرانسیل کلارک، موردوخویچ ، میشل-پینوت و تریمن، مثال‌هایی از محدب‌کننده‌ها هستند[10]. مفهوم محدب‌کننده اولین بار توسط دمیانف[11] در سال 1994 به‌صورت یک مجموعه‌ی محدب و فشرده به عنوان تعمیمی از مفاهیم تقریب‌های محدب بالایی و مقعر پائینی معرفی شد. این ایده بعدا توسط دمیانف و جیاکومار [12] بیشتر آشکار شد و پس از آن توسط جیاکومار و لوک [13] توسعه داده شد.

ایده‌ی محدب‌کننده برای تجزیه و تحلیل، گسترش و تقویت نتایج مختلف در آنالیز ناهموار و بهینه‌سازی استفاده شده است. در سال‌های گذشته، ایده‌ی محدب‌کننده برای تعمیم نتایج اساسی و شرایط بهینگی در آنالیز ناهموار و بهینه‌سازی بکار برده شده

[2] Mathematical Programs with Equilibrium Constraints
[3] B(Bouligand)-Stationary
[4] C(Clarke)-Stationary
[5] A(Alternatively)-Stationary
[6] M(Mordukhovich)-Stationary
[7] S(Strong)-Stationary

است که از آن جمله می‌توان به مراجع[16-10] رجوع کرد. اخیرا، انصاری اردلی و همکاران در [16] با استفاده از مفهوم محدب‌کننده، ضمن تعمیم مفاهیم ایستایی و توصیف‌های قیدی برای یک مساله‌ی MPEC ناهموار، شرایط لازم و کافی بهینگی را برای این گونه از مسائل مورد بررسی قرار دادند. جهت بررسی بیشتر و مطالعه نتایج اخیر و کاربردهای محدب‌کننده‌ها می‌توان مراجع [16-10] را مورد مطالعه قرار داد.

مفهوم دوگانگی و مساله‌ی دوگان موضوع مهمی در مطالعه مسائل برنامه‌ریزی ریاضی است تا جای که دوگانگی ضعیف یک کران پایین برای تابع هدف مساله‌ی اولیه فراهم می‌کند. در مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی، مدل‌های دوگان ولف [17] و دوگان موند-وایر[18]کاملاً شناخته شده هستند و برای اکثر مسائل برنامه‌ریزی ریاضی نظیر، مسائل برنامه‌ریزی نیمه نامتناهی، دو سطحی و مسائل برنامه‌ریزی غیرخطی استاندارد مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته‌اند[20-17]. در این مقاله ما با استفاده از مفهوم محدب‌کننده دوگان ولف را برای یک مساله‌ی MPEC ناهموار تعریف می‌کنیم. سپس با استفاده از یک نوع تحدب تعمیم یافته قضایای دوگانگی ضعیف و قوی را برای این مساله دوگان بیان و ثابت می‌کنیم. از آن‌جایی که مفهوم محدب‌کننده تعمیمی از زیر دیفرانسیل‌ها است لذا نتایج بدست آمده در این مقاله نتایج نویسندگان پیشین را پوشش خواهد داد.

این مقاله در 4 بخش تنظیم شده است. در بخش 2، برخی از مفاهیم، نمادها، مبانی اولیه و تعاریفی که در ادامه‌ی مقاله مورد نیاز است را مطرح می‌کنیم. در بخش 3، با استفاده از مفهوم محدب‌کننده توصیف قیدی آبادی و ایستایی قوی را برای مسائل برنامه‌ریزی با قیود تعادلی ناهموار تعمیم و تعریف می‌کنیم. سپس نشان می‌دهیم که ایستایی قوی تحت این توصیف قیدی تعمیم یافته یک شرط لازم بهینگی برای این مسائل است. در بخش 4، مساله‌ی دوگان از یک مساله‌ی MPEC را تعریف می‌کنیم و قضایای دوگانگی ضعیف و قوی را برای این مساله‌ی دوگان مورد بررسی قرار می‌دهیم. در نهایت با ارائه‌ی مثالی قضایای بدست آمده را ارزیابی می‌کنیم.

2-مفاهیم اولیه

در این بخش، برخی ساختارها، تعاریف و مفاهیم اساسی از آنالیز محدب و بهینه‌سازی ناهموار را که در بخش‌های بعدی از آن‌ها استفاده می‌شود، از مرجع [21] یادآوری می‌کنیم.

برای هر زیرمجموعه‌ی ناتهی S از $\mathbb{R}^n$، مجموعه‌ی تمام ترکیبات محدب از اعضای S را غلاف (پوش) محدب S گوییم و آن را با نماد $Co\, S$ نمایش می‌دهیم. در واقع $Co\, S$، کوچک‌ترین مجموعه‌ی محدبی است که شامل S است. درون S، بستار S و مخروط محدب تولید شده توسط S شامل مبدأ را به ترتیب با نمادهای $int\, S$، $cl\, S$ و $Cone\, S$ نمایش می‌دهیم.

قطب منفی S^- و قطب منفی اکید S^s تولید شده توسط S به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$S^- := \{v \in \mathbb{R}^n \;:\; \langle v, x\rangle \le 0 \;\; \forall x \in S\},$$
$$S^s := \{v \in \mathbb{R}^n \;:\; \langle v, x\rangle < 0 \;\; \forall x \in S\}.$$

واضح است که S^- یک مخروط بسته است. همچنین اگر $S^s \neq \emptyset$ آنگاه $cl(S^s) = S^-$.

مخروط مماس بولیگاند[8] $T_B(S,x)$ و مخروط نرمال منظم یا مخروط نرمال فرشه[9] $\widehat{N}(S,x)$ در نقطه‌ی $x \in cl\, S$ به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$T_B(S,x) := \{v \in \mathbb{R}^n \mid \exists\, t_n \downarrow 0, \exists v_n \to v \;\; s.t.\;\; x + t_n v_n \in S, \;\; \forall n \in \mathbb{N}\},$$
$$\widehat{\mathrm{N}}(\mathrm{S},x) := \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid <\xi, v> \le 0, \;\; \forall v \in \mathrm{T_B}(\mathrm{S},x)\} = \mathrm{T_B}(\mathrm{S},x)^-.$$

در ادامه مفهوم محدب‌کننده و برخی ویژگی‌های آن

[8] Boligand Tangent cone

[9] Fréchet normal cone

را از مرجع [10] یادآوری می‌کنیم.
اگر $f:\mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ یک تابع حقیقی مقدار گسترش یافته باشد و $x \in domf := \{x \in \mathbb{R}^n | f(x) < \infty\}$، آنگاه مشتق جهتی دینی بالایی و پائینی f در x و در جهت بردار v، به ترتیب به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$f^+(x;v) = \lim_{t\downarrow 0} \sup \frac{f(x+tv)-f(x)}{t},$$
$$f^-(x;v) = \lim_{t\downarrow 0} \inf \frac{f(x+tv)-f(x)}{t}.$$

لازم به ذکر است که اگر $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ موضعا لیپشیتس باشد، آنگاه مشتق‌های دینی بالایی و پائینی موجود و متناهی هستند. حال در اینجا تعریف محدب‌کننده بالایی و پائینی را از مرجع [10] یادآوری می‌کنیم.

تعریف 2. 1: فرض کنید $f:\mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$، در این صورت گویند تابع f در $\bar{x}$،
الف). دارای محدب‌کننده بالایی است اگر مجموعه‌ی بسته $\partial^* f(\bar{x}) \subseteq \mathbb{R}^n$ موجود باشد، به‌طوری‌که برای هر $u \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم:

$$f^-(\bar{x};u) \le sup\langle \xi, u\rangle, \qquad \xi \in \partial^* f(\bar{x}).$$

ب). دارای محدب‌کننده پائینی است اگر مجموعه‌ی بسته $\partial_* f(\bar{x}) \subseteq \mathbb{R}^n$ موجود باشد، به‌طوری‌که برای هر $u \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم:

$$f^+(\bar{x};u) \ge inf\langle \xi, u\rangle, \qquad \xi \in \partial_* f(\bar{x}).$$

مجموعه‌ی بسته $\partial^* f(\bar{x}) \subseteq \mathbb{R}^n$ را یک محدب‌کننده برای f در $\bar{x}$ گویند، هرگاه $\partial^* f(\bar{x})$ هم محدب‌کننده بالایی و هم محدب‌کننده پائینی در $\bar{x}$ باشد. به عنوان حالت خاصی از تعاریف بالا تعریف محدب‌کننده منظم بالایی و پائینی را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم.

تعریف 2. 2: تابع f دارای محدب‌کننده منظم بالایی است اگر مجموعه‌ی بسته $\partial^* f(\bar{x}) \subseteq \mathbb{R}^n$ موجود باشد، به‌طوری‌که برای هر $u \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم:

$$f^+(\bar{x};u) = sup\langle \xi, u\rangle, \qquad \xi \in \partial^* f(\bar{x}),$$

و محدب‌کننده منظم پائینی است اگر مجموعه‌ی بسته $\partial_* f(\bar{x}) \subseteq \mathbb{R}^n$ موجود باشد، به‌طوری‌که برای هر $u \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم:

$$f^+(\bar{x};u) = inf\langle \xi, u\rangle, \qquad \xi \in \partial_* f(\bar{x}).$$

شایان ذکر است که اگر تابع پیوسته‌ی $f:\mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ دارای یک نگاشت محدب‌کننده موضعاً کراندار $\partial^* f$ در $\bar{x}$ باشد، آنگاه f موضعاً لیپشیتس حول $\bar{x}$ است. حال از مرجع [22] تعریف محدب کننده‌ی نیم-منظم را بیان می‌کنیم.

تعریف 2. 3: فرض کنید $f:\mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$، در این صورت گویند تابع f در $\bar{x}$،
الف). دارای محدب‌کننده نیم – منظم بالایی است اگر مجموعه‌ی بسته $\partial^* f(\bar{x}) \subseteq \mathbb{R}^n$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $u \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم:

$$f^+(\bar{x};u) \le sup\langle \xi, u\rangle, \qquad \xi \in \partial^* f(\bar{x}).$$

ب). دارای محدب‌کننده نیم –منظم پائینی است اگر مجموعه‌ی بسته $\partial_* f(\bar{x}) \subseteq \mathbb{R}^n$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $u \in \mathbb{R}^n$ داشته باشیم:

$$f^-(\bar{x};u) \ge inf\langle \xi, u\rangle, \qquad \xi \in \partial_* f(\bar{x}).$$

با توجه به تعریف محدب‌کننده واضح است که هرمحدب‌کننده‌ی نیم – منظم بالایی (پائینی) تابع f در $\bar{x}$ یک محدب‌کننده‌ی بالایی (پائینی) تابع f در $\bar{x}$ است و هر محدب‌کننده‌ی منظم بالایی (پائینی) تابع f در $\bar{x}$ یک محدب‌کننده‌ی نیم – منظم بالایی (پائینی) تابع f در $\bar{x}$ است.

مثال2. 1: فرض کنید $\mathbb{Q}$ مجموعه‌ی اعداد گویا باشد و تابع $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف شود:

$$f(x) = \begin{cases} \tan x & \text{if} \quad x \in \mathbb{Q} \cap [0, +\infty) \\ \sin^2 x - 3\sin x & \text{if} \quad x \in \mathbb{Q} \cap (-\infty, 0] \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

به سادگی می‌توان بررسی کرد که مشتق دینی بالایی و پائینی از f در $\bar{x} = 0$ به صورت زیر است:

$$f^+(0; v) = \begin{cases} v & v \geq 0 \\ -3v & v < 0 \end{cases}$$
$$f^-(0; v) = 0 \quad , \quad \forall\, v \in \mathbb{R}.$$

بنابراین مجموعه ی $\{-3,1\}$ و $[-3,1]$ مثال‌هایی ازمحدب‌کننده‌های نیم‬—منظم بالایی از fدر $\bar{x} = 0$ هستند و لذا محدب کننده‌های بالایی برای f در $\bar{x} = 0$ هستند. مجموعه‌ی $\{0\}$ یک محدب‌کننده‌ی پائینی از f در $\bar{x} = 0$ است.

مثال2. 2: فرض کنید $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ تابع داده شده به صورت زیر باشد:

$$f(x, y) = |x| - |y|.$$

به وضوح مشتق دینی بالایی از f در نقطه‌ی $\bar{x} = (x_1, y_1) = (0,0)$ به صورت زیر است:

$$f^+((0,0); (v_1, v_2)) = |v_1| - |v_2|.$$

در این صورت مجموعه‌ی $\partial^* f\big((0,0)\big) = \{(1, -1), (-1,1)\}$ یک محدب‌کننده‌ی نیم-منظم بالایی از f در $\bar{x}$ است.

تبصره2. 1: هر تابع مشتق‌پذیر مانند $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ دارای یک محدب‌کننده‌ی منظم بالایی است که با $\partial^* f(x) = \{\nabla f(x)\}$ نشان داده می‌شود. همچنین اگر f تابعی موضعاً لیپ‌شیتس باشد، آنگاه زیر دیفرانسیل‌های شناخته شده مانند کلارک، میشل پینوت، موردوخویچ و تریمن مثال‌هایی از محدب‌کننده‌ی نیم - منظم بالایی هستند. حتی ممکن است غلاف محدب یک محدب‌کننده‌ی نیم — منظم بالایی از یک تابع موضعا لیپ‌شیتس اکیدا مشمول در زیر دیفرانسیل‌های کلارک و میشل پینوت باشد. بنابراین نتایج بدست آمده در این مقاله را می‌توان برای حالتی که از این زیر دیفرانسیل‌ها به جای محدب‌کننده استفاده شوند نیز به کار برد.

در ادامه و برای بدست آوردن شرایط دوگانگی نیاز به استفاده از یک تحدب تعمیم یافته خواهیم داشت که با استفاده از محدب‌کننده‌ها معرفی شود. بنابراین در اینجا به پیروی از مرجع [22]، تعاریف زیر را یادآوری می‌کنیم.

تعریف 2. 4: فرض کنید $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ یک تابع گسترش یافته‌ی حقیقی مقدار باشد که دارای یک محدب‌کننده‌ی نیم—منظم بالایی در $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ است. در این صورت گوئیم:

الف). f در $\bar{x}$، ∂^*- محدب است اگر و فقط اگر برای هر $x \in \mathbb{R}^n$، داشته باشیم:

$$f(x) \geq f(\bar{x}) + \langle \xi, x - \bar{x} \rangle, \ \forall \xi \in \partial^* f(\bar{x}).$$

ب). f در $\bar{x}$، ∂^*- محدب‌نما است اگر و فقط اگر برای هر $x \in \mathbb{R}^n$، داشته باشیم:

$$f(x) < f(\bar{x}) \Rightarrow \quad \langle \xi, x - \bar{x} \rangle < 0, \ \forall \xi \in \partial^* f(\bar{x}).$$

ج). f در $\bar{x}$، ∂^*- شبه‌محدب است اگر و فقط اگر برای هر $x \in \mathbb{R}^n$، داشته باشیم:

$$f(x) \leq f(\bar{x}) \Rightarrow \quad \langle \xi, x - \bar{x} \rangle \leq 0, \ \forall \xi \in \partial^* f(\bar{x}).$$

تذکر 2. 1: تابع f را ∂^*- مقعر یا ∂^*- مقعرنما و یا ∂^*- شبه‌مقعر گوئیم هرگاه $-f$، ∂^*- محدب یا ∂^*- محدب‌نما و یا ∂^*- شبه‌محدب باشد.

تذکر2. 2: باتوجه به اینکه در حالتی که f مشتق‌پذیر باشد $\nabla f(\bar{x})$ یک محدب‌کننده منظم بالایی است لذا در حالت مشتق‌پذیر ∂^* -محدب

همان تعریف تابع محدب است. این حرف در مورد ∂^*- شبه‌محدب و ∂^*- محدب‌نما نیز صحیح است.

حال مساله بهینه‌سازی با قیود تعادلی MPEC(1) را در نظر بگیرید که در آن تمام توابع دارای محدب‌کننده‌ی بالایی در نقطه‌ای مانند $\bar{x}$ واقع در ناحیه‌ی موجه مساله باشند. برای سادگی و اختصار ابتدا نمادگذاری‌های زیر را معرفی می‌کنیم:

مجموعه‌ی همه نقاط موجه از مساله‌ی MPEC(1) را با $\mathbf{\Omega}$ نشان می‌دهیم. به عبارت دیگر،

$$\mathbf{\Omega} := \{x \epsilon \mathbb{R}^n \mid g(x) \leq 0, h(x) = 0, G(x) \geq 0, H(x) \geq 0,\ G(x)^T . H(x) = 0\}.$$

با در نظر گرفتن نقطه‌ی $\bar{x} \in \mathbf{\Omega}$، مجموعه‌های اندیس گذار زیر را تعریف می‌کنیم:

$$I_g = I_g(\bar{x}) := \{i \mid\ g_i(\bar{x}) = 0\},$$
$$\alpha = \alpha(\bar{x}) := \{i \mid G_i(\bar{x}) = 0,\ H_i(\bar{x}) > 0\},$$
$$\beta = \beta(\bar{x}) := \{i \mid G_i(\bar{x}) = 0,\ H_i(\bar{x}) = 0\},$$
$$\gamma = \gamma(\bar{x}) := \{i \mid G_i(\bar{x}) > 0,\ H_i(\bar{x}) = 0\}.$$

مجموعه‌ی β، مجموعه‌ی تبهگن [10] نام دارد. اگر این مجموعه تهی باشد گوئیم بردار $\bar{x}$ در شرط تکمیلی اکید[11] صدق می‌کند. چون در این حالت تمام ایستایی‌هایی که برای این گونه مسائل تعریف شده‌اند به یک حالت تبدیل می‌شوند و نتایج بدست آمده چندان جالب نخواهد بود، لذا در این مقاله حالت مهم β ناتهی در نظر گرفته خواهد شد.

3-شرایط بهینگی

دراین بخش ابتدا ، با استفاده از مفهوم محدب‌کننده توصیف قیدی آبادی[12] و مفهوم ایستایی قوی را تعریف می‌کنیم. سپس نشان خواهیم داد که تحت این توصیف قیدی، ایستایی قوی یک شرط لازم بهینگی برای مساله‌ی MPEC است. به دنبال آن مساله‌ی دوگان از نوع دوگان ولف را برای مسائل MPEC معرفی می‌کنیم و قضایای دوگانگی ضعیف و قوی را برای این مساله بیان و اثبات می‌کنیم.

تعریف 3. 1: گوئیم توصیف قیدی آبادی تعمیم یافته‌ی استاندارد[13] (GSACQ) در نقطه‌ی $\bar{x} \in \mathbf{\Omega}$ برقرار است، اگر حداقل یکی از مجموعه‌های دوگان استفاده شده در تعریف $\Gamma(\bar{x})$، ناتهی باشد و داشته باشیم:

$$\Gamma(\bar{x}) \subset T_B(\mathbf{\Omega}, \bar{x}),$$

جایی که در آن

$$\Gamma(\bar{x}) := g^- \cap \mathrm{h}^- \cap \mathrm{G}_\alpha^- \cap \mathrm{H}_\gamma^- \cap (\mathrm{GH})_\beta^-,$$

و

$$g := \bigcup_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}_g} co\, \partial^* g_\mathrm{i}(\bar{x}),$$
$$\mathrm{h} := \bigcup_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{q}} co\, \partial^* \mathrm{h}_\mathrm{i}(\bar{x}) \cup \mathrm{co}\, \partial^*(-\mathrm{h}_\mathrm{i})(\bar{x}),$$
$$\mathrm{G}_\alpha := \bigcup_{\mathrm{i} \in \alpha} co\, \partial^* \mathrm{G}_\mathrm{i}(\bar{x}) \cup \mathrm{co}\, \partial^*(-\mathrm{G}_\mathrm{i})(\bar{x}),$$
$$\mathrm{G}_\beta := \bigcup_{\mathrm{i} \in \beta} co\, \partial^* \mathrm{G}_\mathrm{i}(\bar{x}),$$
$$\mathrm{H}_\gamma := \bigcup_{\mathrm{i} \in \gamma} co\, \partial^* \mathrm{H}_\mathrm{i}(\bar{x}) \cup \mathrm{co}\, \partial^*(-\mathrm{H}_\mathrm{i})(\bar{x}),$$
$$\mathrm{H}_\beta := \bigcup_{\mathrm{i} \in \beta} co\ \partial^* \mathrm{H}_\mathrm{i}(\bar{x}),$$
$$(GH)_\beta := \bigcup_{\mathrm{i} \in \beta} co\ \partial^*(-G_\mathrm{i})(\bar{x}) \cup \mathrm{co}\, \partial^*(-H_\mathrm{i})(\bar{x}).$$

حال تعریف ایستایی قوی برای مسائل MPEC را با استفاده از مفهوم محدب‌کننده بیان می‌کنیم.

تعریف 3. 2 (نقطه‌ی ایستایی قوی تعمیم یافته): نقطه موجه $\bar{x}$ از مساله‌ی MPEC را نقطه‌ی ایستای قوی تعمیم یافته یا نقطه‌ی SG –ایستا گوئیم. هرگاه بردارهای $\lambda = \left(\lambda^g, \lambda^h, \lambda^G, \lambda^H\right) \in \mathbb{R}^{p+q+2m}$ و $\mu = (\mu^h, \mu^G, \mu^H) \in \mathbb{R}^{q+2m}$ وجود داشته باشند به‌طوری‌که روابط زیر برقرار باشند:

$$0 \in co\partial^* f(\bar{x}) + \sum_{i \in I_g} \lambda_i^g co\partial^* g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{q} [\lambda_j^h\, co\partial^* h_j(\bar{x}) + \mu_j^h co\partial^*(-h_j)(\bar{x})] + \sum_{i=1}^{m} \left[\lambda_i^G\, co\, \partial^*(-G_i)(\bar{x}) + \lambda_i^H\, co\partial^*(-H_i)(\bar{x})\right] +$$

---

[10] Degenerate set
[11] Strict complenentarity
[12] Abadie Constraint Qualifications
[13] Generalized Standard Abadie Constraint Qualification

$\sum_{i=1}^{m}\left[\mu_i^G \; co\; \partial^*(G_i)(\bar{x}) + \mu_i^H \; co\partial^*(H_i)(\bar{x})\right]$,
$\lambda_{I_g}^g \geq 0,\quad \lambda_j^h, \mu_j^h \geq 0\;, j = 1, \dots, q,$
$\lambda_i^G, \lambda_i^H, \mu_i^G, \mu_i^H \geq 0, i = 1, \dots, m,$
$\lambda_\gamma^G = \lambda_\alpha^H = \mu_\gamma^G = \mu_\alpha^H = 0,$
$\forall\, i \in \beta,\quad \mu_i^G = 0,\quad \mu_i^H = 0.$

با توجه به آنچه که در تبصره 102 بیان شد، در حالت مشتق‌پذیر f دارای محدب‌کننده‌ی منظم بالایی منحصر به فرد $\{\nabla f(\bar{x})\}$ خواهد بود. بنابراین در تعاریف فوق اگر محدب‌کننده را با گرادیان عوض کنیم همان تعاریف آورده شده در حالت هموار از مراجع [3، 4] بدست خواهد آمد.

حال در اینجا قضیه‌ای بیان می‌کنیم که تحت شرایط بسیار ضعیف برقرار است و به جز تابع هدف مساله که لیپ‌شیتس در نظر گرفته می‌شود بقیه توابع حتی در هیچ شرط پیوستگی هم صدق نمی‌کنند.

قضیه 3. 1: فرض کنید $\bar{x}$ یک جواب بهینه از مساله‌ی MPEC باشد. همچنین فرض کنید f اطراف $\bar{x}$ موضعاً لیپ‌شیتس و f و قیود فعال در $\bar{x}$ دارای محدب‌کننده‌ی نیم – منظم بالایی کراندار در $\bar{x}$ باشند. در این صورت اگر توصیف قیدی GSACQ در $\bar{x}$ برقرار باشد، آنگاه $\bar{x}$ یک نقطه‌ی SG – ایستا خواهد بود.

برهان: قرار می‌دهیم

$$\Pi \coloneqq cone\; co\;\; g + cone\; co\;\; h + cone\; co\;\; G_\alpha + cone\; co\;\; H_\gamma + cone\; co\;\; (GH)_\beta\;\;,$$

و نشان می‌دهیم که

$$0 \in co\;\; \partial^* f(\bar{x}) + \Pi\,. \tag{2}$$

اثبات بر اساس برهان خلف دنبال می‌شود و لذا فرض می‌کنیم رابطه‌ی (2) برقرار نباشد پس داریم:

$$co\; \partial^* f(\bar{x}) \cap (-\Pi) = \emptyset.$$

باتوجه به فرضیات قضیه، چون f و توابع قیود فعال دارای محدب‌کننده‌ی نیم – منظم بالایی کراندار هستند پس $co\;\partial^* f(\bar{x})$ یک مجموعه‌ی محدب فشرده و Π یک مجموعه‌ی محدب بسته هستند. از این رو با توجه به قضیه‌ی تفکیک‌پذیری محدب بردار ناصفر $v \in \mathbb{R}^n$ و عدد $r \in \mathbb{R}$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $\xi \in co\;\; \partial^* f(\bar{x})$ و هر $\eta \in -\Pi$ داریم:

$$\langle \xi, v\rangle < r < \langle \eta, v\rangle\,. \tag{3}$$

چون $-\Pi$ یک مخروط است پس $r = 0$ و بنابراین برای هر $\xi \in co\;\; \partial^* f(\bar{x})$،

$$\langle \xi, v\rangle < 0 \tag{4}$$

از طرفی چون $co\;\partial^* f(\bar{x})$ یک محدب‌کننده‌ی نیم – منظم بالایی کراندار برای f در $\bar{x}$ است لذا با توجه به رابطه‌ی (4) و تعریف محدب‌کننده‌ی نیم – منظم بالایی داریم:

$$f^+(\bar{x};\; v) < 0\,.$$

لذا $\delta > 0$ وجود دارد به‌طوری‌که برای هر $t \in (0, \delta)$،

$$f(\bar{x};\; tv) < f(\bar{x}) \tag{5}$$

باتوجه به مخروط بودن Π و رابطه‌ی (3)، به ازای هر $\eta \in \Pi$ داریم:

$$\langle \eta, v\rangle \leq 0\,.$$

بنابراین با توجه به تعریف Π این رابطه نشان می‌دهد که،

$$v \in g^- \cap h^- \cap G_\alpha^- \cap H_\gamma^- \cap (GH)_\beta^- = \Gamma(\bar{x}).$$

باتوجه به برقراری توصیف قیدی GSACQ در نقطه‌ی $\bar{x}$ بردار v متعلق به $T_B(\boldsymbol{\Omega}, \bar{x})$ خواهد بود. بنابراین دنباله‌هایی مانند $t_n \downarrow 0$ و $v_n \to v$ را می‌توان طوری یافت که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $\bar{x} + t_n v_n \in \boldsymbol{\Omega}$ باشد. از طرفی چون f نزدیک $\bar{x}$

لیپ‌شیتس با ثابت لیپ‌شیتسی K است لذا بدون کاسته شدن از کلیت برهان برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$f(\bar{x} + t_n v_n) \leq f(\bar{x} + t_n v) + K\|v_n - v\|. \qquad (6)$$

رابطه‌های (5) و (6) نشان می‌دهد که برای nهای به اندازه کافی بزرگ $f(\bar{x} + t_n v_n) < f(\bar{x})$, و این با بهینه بودن $\bar{x}$ در تناقض است لذا فرض خلف باطل و بنابراین $0 \in Co\ \partial^* f(\bar{x}) + \Pi$. از این رو ضرائب $\lambda_i^G, i \in \alpha \cup \beta$، $\lambda_j^h, j = 1, \dots, q$ ، $\lambda_i^g, i \in J_g$ و $\mu_i^G\ i \in \alpha$ ، $\mu_j^h, j = 1, \dots, q$، $\lambda_i^H, i \in \gamma \cup \beta$ و $\mu_i^H, i \in \gamma$ وجود دارد به‌طوری‌که:

$$\begin{aligned}0 \in\ & co\ \partial^* f(\bar{x}) + \sum_{i \in I_g} \lambda_i^g\ co\ \partial^* g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{q} [\lambda_j^h\ co\ \partial^* h_j(\bar{x}) + \mu_j^h\ co\ \partial^*(-h_j)(\bar{x})] \\ & + \sum_{i \in \alpha \cup \beta} \lambda_i^G\ co\ \partial^*(-G_i)(\bar{x}) + \sum_{i \in \gamma \cup \beta} \lambda_i^H\ co\ \partial^*(-H_i)(\bar{x}) + \sum_{i \in \alpha} \mu_i^G\ co\ \partial^*(G_i)(\bar{x}) + \sum_{i \in \gamma} \mu_i^H\ co\ \partial^*(H_i)(\bar{x}).\end{aligned}$$

از این رو با قرار دادن $\lambda_\gamma^G = \lambda_\alpha^H = \mu_{\gamma \cup \beta}^G = \mu_{\alpha \cup \beta}^H = 0$ بدست می‌آوریم که $\bar{x}$ یک نقطه‌ی $SG-$ایستا است و اثبات تمام است.

1.3. دوگان

در این بخش دوگان ولف را برای مساله‌ی MPEC(1) فرمول‌بندی می‌کنیم و با استفاده از تحدب تعمیم یافته‌ی معرفی شده در بخش‌های قبلی، قضایای دوگانگی را برای این مساله‌ی دوگان مورد بررسی قرار خواهیم داد. برای این منظور ابتدا نمادهای زیر را که در ادامه استفاده خواهند شد معرفی می‌کنیم.

$$\begin{aligned}\beta_\mu^G &:= \{i \in \beta : \mu_i^H = 0, \mu_i^G > 0\}, \\ \beta_\mu^H &:= \{i \in \beta : \mu_i^G = 0, \mu_i^H > 0\} \\ \alpha_\mu^+ &:= \{i \in \alpha : \mu_i^G > 0\}, \\ \gamma_\mu^+ &:= \{i \in \gamma : \mu_i^H > 0\}.\end{aligned}$$

دوگان ولف برای مساله‌ی MPEC (1) بصورت زیر فرمول‌بندی می‌شود:

$$\begin{aligned}\text{WD} - \text{MPEC:} \quad & Max\ \psi(u, \lambda, \mu) = f(u) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^g g_i(u) + \sum_{j=1}^{q} \tilde{\lambda}_j^h h_j(u) - \sum_{i=1}^{m} [\tilde{\lambda}_i^G G_i(u) + \tilde{\lambda}_i^H H_i(u)] \\ \text{s. t.} \quad & \\ & 0 \in cone\partial^* f(u) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^g cone\partial^* g_i(u) + \sum_{j=1}^{q} \left[\lambda_j^h cone\partial^* h_j(u) + \mu_j^h cone\partial^*(-h_j)(u)\right] \\ & + \sum_{i=1}^{m} \left[\lambda_i^G cone\partial^*(-G_i)(u) + \lambda_i^H cone\partial^*(-H_i)(u)\right] + \sum_{i=1}^{m} \left[\mu_i^G cone\partial^* G_i(u) + \mu_i^H cone\ \partial^* H_i(u)\right] \qquad (7) \\ & \lambda_{I_g}^g \geq 0,\ \ \lambda_j^h, \mu_j^h \geq 0,\ \ j = 1, \dots, q, \\ & \lambda_i^G, \lambda_i^H, \mu_i^G, \mu_i^H \geq 0,\ \ i = 1, \dots, m, \\ & \lambda_\gamma^G = \lambda_\alpha^H = \mu_\gamma^G = \mu_\alpha^H = 0, \\ & \forall\ i \in \beta,\ \ \mu_i^G = 0,\ \ \mu_i^H = 0,\end{aligned}$$

جایی که در آن $u \in \mathbb{R}^n$ و $\tilde{\lambda}_j^H = \lambda_j^H - \mu_j^H$, $\tilde{\lambda}_i^G = \lambda_i^G - \mu_i^G$, $\tilde{\lambda}_j^h = \lambda_j^h - \mu_j^h$ ، $\lambda = (\lambda^g, \lambda^h, \lambda^H) \in \mathbb{R}^{p+q+2m}$ و $\mu = (\mu^h, \mu^G . \mu^H) \in \mathbb{R}^{q+2m}$.

قضیه‌ی زیر دوگانگی ضعیف بین مساله‌ی اولیه‌ی MPEC و مساله‌ی دوگان WD-MPEC را توصیف می‌کند.

قضیه 1.4 (دوگانگی ضعیف): فرض کنید $\bar{x}$ جواب موجه برای مساله‌ی اولیه MPEC و (u, λ, μ) یک جواب موجه برای مساله‌ی دوگان WD-MPEC باشد. همچنین فرض کنید $-G_i\ (i \in \alpha \cup \beta)$, f, $g_i\ (i \in I_g)$, $\pm h_j\ (j = 1, \dots, q)$ و $-H_i(i \in \gamma \cup \beta)$ دارای محدب‌کننده‌ی نیم-منظم بالایی کراندار و ∂^*- محدب در u باشند. در این صورت، اگر $\beta_\mu^H \cup \beta_\mu^G \cup \alpha_\mu^+ \cup \gamma_\mu^+ = \emptyset$، آنگاه برای هر $x \in \boldsymbol{\Omega}$ داریم:

$$f(x) \geq \psi(u, \lambda, \mu).$$

برهان: فرض کنید $x \in \mathbf{\Omega}$ دلخواه باشد. چون f، ∂^* - محدب است، برای هر $\xi \in f(u)$ داریم:

$$f(x) - f(u) \geq \langle \xi, x-u \rangle. \quad (8)$$

به طریق مشابه داریم:

$$g_i(x) - g_i(u) \geq \langle \xi_i^g, x-u \rangle, \quad \forall \xi_i^g \in \partial^* g_i(u), \ \ i \in I_g \quad (9)$$

$$h_j(x) - h_j(u) \geq \langle \xi_j^h, x-u \rangle, \quad \forall\, \xi_j^h \in \partial^* h_j(u), \ \ j = 1, \dots, q \quad (10)$$

$$-h_j(x) + h_j(u) \geq \langle \xi_j^{-h}, x-u \rangle, \quad \forall \xi_j^{-h} \in \partial^*(-h_j)(u), \ \ j = 1, \dots, q \quad (11)$$

$$-G_i(x) + G_i(u) \geq \langle \xi_i^{-G}, x-u \rangle, \quad \forall\, \xi_i^{-G} \in \partial^*(-G_i)(u), \ \ i \in \alpha \cup \beta \quad (12)$$

$$-H_i(x) + H_i(u) \geq \langle \xi_i^{-H}, x-u \rangle, \quad \forall\, \xi_i^{-H} \in \partial^*(-H_i)(u), i \in \gamma \cup \beta. \quad (13)$$

حال اگر $\beta_\mu^G \cup \beta_\mu^H \cup \alpha_\mu^+ \cup \gamma_\mu^+ = \emptyset$ آنگاه:

$$\sum_{i=1}^m \left[\mu_i^G G_i(u) + \mu_i^H H_i(u)\right] = 0. \quad (14)$$

بنابراین با توجه به رابطه‌ی (8) و همچنین ضرب روابط (9) تا (13) به ترتیب در $\lambda_i^g, \lambda_j^h, \mu_j^h, \lambda_i^G$ و λ_i^H و جمع مقادیر حاصل باهم داریم:

$$f(x) - f(u) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^g [g_i(x) - g_i(u)] + \sum_{j=1}^q \lambda_j^h [h_j(x) - h_j(u)] - \sum_{j=1}^q \mu_j^h [h_j(x) - h_j(u)] - \sum_{i=1}^m \lambda_i^G [G_i(x) - G_i(u)] - \sum_{i=1}^m \lambda_i^H [H_i(x) - H_i(u)] \geq \langle \xi + \sum_{i=1}^p \lambda_i^g \xi_i^g + \sum_{j=1}^q \left[\lambda_j^h \xi_j^h + \mu_j^h \xi_j^{-h}\right] + \sum_{i=1}^m \left[\lambda_i^G \xi_i^G + \lambda_i^H \xi_i^H\right], x-u \rangle \quad (15)$$

از آنجایی که بردار u جواب موجه برای مساله‌ی WD-MPEC است لذا باتوجه به رابطه‌ی (7)،
$\bar{\xi} \in cone\ \partial^* f(u)$،
$\bar{\xi}_i^g \in cone\ \partial^* g_i(u)$ ،$\bar{\xi}_j^h \in cone\ \partial^* h_j(u)$،
$\bar{\xi}_j^{-h} \in cone\ \partial^*(-h_j)(u)$،
$\bar{\xi}_i^{-G} \in cone\ \partial^*(-G_i)(u)$ و
$\bar{\xi}_i^{-H} \in cone\ \partial^*(-H_i)(u)$
وجود دارند به‌طوری‌که

$$\bar{\xi} + \sum_{i \in I_g} \lambda_i^g \bar{\xi}_i^g + \sum_{j=1}^q [\lambda_j^h \bar{\xi}_j^h + \mu_j^h \bar{\xi}_j^{-h}] + \sum_{i=1}^m [\lambda_i^G \bar{\xi}_i^{-G} + \lambda_i^H \bar{\xi}_i^{-H}] = 0 \quad (16)$$

از این رو با توجه به موجه بودن x برای مساله‌ی MPEC(1)، $g_i(x) \leq 0$، $h_j(x) = 0$، $G_i(x) \geq 0$ و $H_i(x) \geq 0$ لذا با توجه به رابطه‌های (15) و (16) داریم:

$$f(x) - f(u) - \sum_{i \in I_g} \lambda_i^g g_i(u) - \sum_{j=1}^q \lambda_j^h h_j(u) + \sum_{j=1}^q \mu_j^h h_j(u) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^G G_i(u) + \sum_{i=1}^m \lambda_i^H H_i(u) \geq 0\,.$$

بنابراین با توجه به رابطه‌ی (14) نتیجه می‌گیریم:

$$f(x) \geq f(u) + \sum_{i=1}^p \lambda_i^g g_i(u) + \sum_{j=1}^q \tilde{\lambda}_j^h h_j(u) - \sum_{i=1}^m \left[\tilde{\lambda}_i^G G_i(u) + \tilde{\lambda}_i^H H_i(u)\right] = \ \psi(u, \lambda, \mu)$$

که در آن $\tilde{\lambda}_i^G = \lambda_i^G - \mu_i^G, \tilde{\lambda}_j^h = \lambda_j^h - \mu_j^h$ و $\tilde{\lambda}_i^H = \lambda_i^H - \mu_i^H$ و این اثبات را کامل می‌کند.

حال قضیه‌ای را بیان می‌کنیم که دوگانگی قوی بین مساله‌ی اولیه MPEC و مساله‌ی دوگان WD-MPEC را مورد بررسی قرار می‌دهد.

قضیه 4. 2 (دوگانگی قوی): فرض کنید $\bar{x}$ یک جواب بهینه موضعی برای مساله‌ی MPEC باشد و f در نزدیکی $\bar{x}$ لیپ‌شیتس در نظر گرفته شود، همچنین فرض کنید f، $g_i\ (i \in I_g)$، $\pm h_j\ (j = 1, \dots, q)$، $-G_i\ (i \in \alpha \cup \beta)$ و $-H_i (i \in \gamma \cup \beta)$ دارای محدب‌کننده‌ی نیم-منظم بالایی کراندار و ∂^*−محدب در $\bar{x}$ باشند. در این صورت اگر توصیف قیدی GSASQ در $\bar{x}$ برقرار باشد، ضرائب $(\bar{\lambda}, \bar{\mu}) \in \mathbb{R}^{p+q+2m} \times \mathbb{R}^{q+2m}$ وجود دارند به‌طوری‌که $(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$ یک جواب موجه برای WD-MPEC است و $f(\bar{x}) = \psi(\bar{x}, \bar{\lambda}, \bar{\mu})$. به علاوه اگر شرایط قضیه‌ی دوگانگی ضعیف 104 برای هر جواب موجه

(u,λ,μ) از WD-MPEC برقرار باشد، آنگاه $(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu})$ یک جواب بهینه برای WD-MPEC خواهد بود.

برهان: از آنجایی که $\bar{x}$ یک جواب بهینه برای مساله‌ی MPEC است و توصیف قیدی GSACQ برقرار است لذا با توجه به قضیه 3. 1بردارهای $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}^g, \bar{\lambda}^h, \bar{\lambda}^G, \bar{\lambda}^H) \in \mathbb{R}^{p+q+2m}$ و $\bar{\mu} = (\bar{\mu}^h, \bar{\mu}^G, \bar{\mu}^H)$ وجود دارند به‌طوری‌که $\bar{x}$ یک SG – ایستا است. بنابراین $(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu})$ یک جواب موجه برای WD-MPEC خواهد بود.

چون $\bar{x}$ موجه برای MPEC و $(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu})$ موجه برای WD-MPEC است، بنابراین $g_i(\bar{x}) = 0\ (i \in I_g)$ و برای هر j، $h_j(\bar{x}) = 0$، همچنین $G_i(\bar{x}) = 0\ (i \in \alpha \cup \beta)$ و $H_i(\bar{x}) = 0 (i \in \gamma \cup \beta)$.

بنابراین داریم:

$$f(\bar{x}) = f(\bar{x}) + \sum_{i\in I_g} \bar{\lambda}_i^g g_i(\bar{x}) + \sum_{j=1}^{p} \tilde{\bar{\lambda}}_j^g h_j(\bar{x}) - \sum_{i=1}^{m} \left[\tilde{\bar{\lambda}}_i^G G_i(\bar{x}) + \tilde{\bar{\lambda}}_i^H H_i(\bar{x})\right] = \psi(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu}) \qquad (17)$$

که در ان $\tilde{\bar{\lambda}}_i^G = \bar{\lambda}_i^G - \bar{\mu}_i^G$, $\tilde{\bar{\lambda}}_j^h = \bar{\lambda}_j^h - \bar{\mu}_j^h$ و $\tilde{\bar{\lambda}}_i^H = \bar{\lambda}_i^H - \bar{\mu}_i^H$. بعلاوه از آنجایی که شرایط قضیه دوگانگی ضعیف در هر (u,λ,μ) موجه از WD-MPEC برقرار است داریم:

$$f(\bar{x}) \ge f(u) + \sum_{i=1}^{p} \lambda_i^g g_i(u) + \sum_{j=1}^{q} \tilde{\lambda}_j^h h_j(u) - \sum_{i=1}^{m} \left[\tilde{\lambda}_i^G G_i(u) + \tilde{\lambda}_i^H H_i(u)\right] \qquad (18)$$

جایی که $\tilde{\lambda}_i^G = \lambda_i^G - \mu_i^G$, $\tilde{\lambda}_j^h = \lambda_j^h - \mu_j^h$ و $\tilde{\lambda}_i^H = \lambda_i^H - \mu_i^H$ روابط (17) و (18) نشان می‌دهد $(\bar{x},\bar{\lambda},\bar{\mu})$ یک جواب بهینه برای WD-MPEC است و لذا اثبات کامل است.

حال در اینجا مثالی ارائه می‌دهیم که قضیه دوگانگی قوی 4 . 2 را مورد بررسی قرار می‌دهد.

مثال 4. 1: مساله‌ی MPEC زیر را در فضای $\mathbb{R}^2$ در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} &(\mathrm{P}_1) \quad \min \quad f(x,y) = x + |y| \\ &\mathrm{s.t} \quad g(x,y) = -x \le 0 \\ &G(x,y) = x - y \ge 0, \quad H(x,y) = y \ge 0 \\ &G(x,y)\,H(x,y) = 0. \end{aligned}$$

بنابراین ناحیه موجه مساله در $\mathbb{R}^2$ بصورت زیر است:

$\mathbf{\Omega} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \ge 0 , x = y\right.$ یا $\left. x \ge 0 , y = 0\right\}$.

به‌وضوح نقطه‌ی $\bar{x} = (0,0)$ یک جواب بهینه از مساله‌ی P_1 است. برای هر $u \in \mathbb{R}^2$ داریم:

$$\begin{aligned} &\partial^* f(u) = \{1\} \times \{-1,1\}, \\ &\partial^* g(u) = \{(-1,0)\}, \\ &\partial^*(-G)(u) = \{(-1,1)\}, \\ &\partial^*(-H)(u) = \{(0,-1)\}, \\ &\partial^*(G)(u) = \{(1,-1)\}. \\ &\partial^*(H)(u) = \{(0,1)\}. \end{aligned}$$

بنابراین دوگان ولف مساله P_1 به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} &D_1 :\ max\ \psi(u,\lambda,\mu) = u_1 + |u_2| + \lambda^g(-u_1) - \tilde{\lambda}^G(u_1 - u_2) - \tilde{\lambda}^H u_2 \\ &s.t\ (0,0) \in co\{(-1,1),(1,1)\} + \lambda^g(-1,0) + \lambda^G(-1,1) + \lambda^H(0,-1) + \\ &\mu^G(1,-1) + \mu^H(0,1), \\ &\lambda^g, \lambda^G, \lambda^H, \mu^G, \mu^H \ge 0, \end{aligned}$$

جایی که در آن $\tilde{\lambda}^G = \lambda^G - \mu^G$ و $\tilde{\lambda}^H = \lambda^H - \mu^H$. با اندکی محاسبه داریم:

$$\begin{aligned} &g^- = \{(v_1,v_2)|\ v_1 \ge 0\}, \\ &(GH)^- = \{(v_1,v_2)|\ v_1 - v_2 \ge 0, v_2 \ge 0\} \end{aligned}$$

بنابراین توصیف قیدی $GSACQ$ نیز برقرار است.

به عنوان مثال با قرار دادن $\lambda^g = \mu^G = \mu^H = 0$ و $\lambda^G = \lambda^H = 1$ به وضوح قضیه 4. 2 بین P_1 و D_1 برقرار خواهد بود.

نتیجه گیری

مسائل ریاضی با قیود تعادلی از مسائل مهم و مشکل بهینه‌سازی هستند که کاربردهای فراوانی در علوم مهندسی و اقتصاد دارند. از این رو بدست آوردن

شرایط لازم و کافی بهینگی و بررسی مساله‌ی دوگان این گونه مسائل در جهت تجزیه و تحلیل و یافتن راه حل عددی مناسب برای حل این دسته از مسائل مخصوصا در حالت ناهموار از اهمیت زیادی برخوردار است. از این رو در این مقاله یک شرط لازم بهینگی و همچنین دوگان یک مساله‌ی برنامه‌ریزی با قیود تعادلی را در حالت ناهموار و بدون هیچ فرض مشتق‌پذیری یا تحدبی بدست می‌آوریم. در آینده می‌توان ضمن بررسی راه حل‌های عددی جهت حل این گونه مسائل به بررسی شرایط بهینگی مسائل بهینه‌سازی چند هدفه با قیود تعادلی و دوگان آنها پرداخت.

فهرست منابع

[1]. Scheel H, Scholtes S. Mathematical programs with complementarity constraints: stationarity, optimality and sensitivity. Mathematics of Operations Research.,25:1-22(2000).

[2]. M. L. Flegel, Constraint Qualifications and Stationarity Concepts for Mathematical Programs with Equilibrium Constraints, Ph.D. Dissertation, Faculty of Mathematics University of Wurzburg, Germany, (2005).

[3]. Ye, J.J.: Necessary and sufficient optimality conditions for mathematical programs with equilibrium constraints. Journal of Mathematical Analysis and Applications.307, 350-369 (2005).

[4]. Flegel, M.L., Kanzow, C.: Abadie-type constraint qualification for mathematical programs with equilibrium constraints. Journal of Optimization Theory and Applications. 124, 595-614 (2005).

[5]. Flegel, M.L., Kanzow, C.: On M-stationary points for mathematical programs with equilibrium constraints. J. Journal of Mathematical Analysis and Applications. 310, 286-302 (2005).

[6]. Outrata, J. V., Kocvara, M., Zowe, J.: Nonsmooth approach to optimization problems with equilibrium constraints. In: Pardalos, P. (ed.) Theory, Applications and Numerical Results, Kluwer Academic, Dordrecht (1998).

[7]. Movahedian, N., Nobakhtian, S.: Necessary and sufficient conditions for nonsmooth mathematical programs with equilibrium constraints. Nonlinear Analysis. 72, 2694-2705 (2010).

[8]. Ye, J.J., Zhang, J.: Enhanced Karush–Kuhn–Tucker conditions for mathematical programs with equilibrium constraints. Journal of Optimization Theory and Applications. 163, 777-794 (2014).

[9]. V. F. Demyanov, Constructive Nonsmooth Analysis, Peterlang, Frankfurt am Main, (1995).

[10]. V. Jeyakumar and D.T. Luc, Nonsmooth calculus, minimality, and monotonicity of convexificators, Journal of Optimization Theory Applications. 101, 599-621(1999).

[11]. Demyanov VF. Convexification and concavification of a positively homogenous function by the same family of linear functions. Report 3, 208, 802. Universita di Pisa; (1994).

[12]. V. F. Demyanov, and V. Jeyakumar, Hunting for a smaller convex subdifferential, Journal of Global Optimization. 10, 305-326(1997).

[13]. Jeyakumar V, Luc DT. Approximate Jacobian matrices for nonsmooth continuous maps and C1-optimization. SIAM Journal on Control and Optimization.36:1815-1832(1998).

[14]. Ansari Ardali, A., Movahedian, N., Nobakhtian, S.: Convexificators and boundedness of the Kuhn–Tucker multipliers set, Optimization. 66:9, 1445-1463(2017).

[15]. Ansari Ardali, A, Boundedness of KKT Multipliers in Fractional Programming Problem Using Convexificators, Iranian Journal of Operations Research. 6(1), pp. 79-91(2015).

[16]. Ansari Ardali, A., Movahedian, N., Nobakhtian, S.: Optimality conditions for nonsmooth mathematical programs with equilibrium constraints, using

convexificators. Optimization. 65:1, 67-85, (2014).

[17]. Wolfe, P.: A duality theorem for nonlinear programming. Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics. 19, 239-244 (1961).

[18]. Mond, B., Weir, T.: Generalized Concavity and Duality, Generalized Concavity in Optimization and Economics. Academic Press, New York (1981).

[19]. Pini, R., Singh, C.:Asurvey of recent [1985–1995] advances in generalized convexity with applications to duality theory and optimality conditions. Optimization. 39(4), 311-360 (1997).

[20]. Bo¸t, R.I., Grad, S.-M.: Wolfe duality andMond–Weir duality via perturbations. Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. 73(2), 374-384 (2010).

[21]. Borwein JM, Lewis AS. Convex analysis and nonlinear optimization: theory and examples. Vol. 3. New York: Springer; (2010).

[22] Dutta J, Chandra S. Convexificators, generalized convexity and vector optimization. Optimization. 53:77-94(2004).