دسترسی در سایت http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال ششم، شماره بیست و هشتم، بهمن و اسفند ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸
دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

توابع خوشریخت محدب از مرتبه معکوس α و خواص آنها

سیروس مرادی[1*]، محمد طاعتی[2]

(۱) دانشیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه لرستان، ۶۸۱۵۱-۴-۴۳۱۶، خرم آباد، ایران.
(۲) گروه ریاضی، دانشگاه پیام نور، ص. پ . ۳۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران، ایران.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۹/۰۸/۰۸ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۰۹/۲۵

چکیده

می‌دانیم که تابع خوشریخت، یک تابع تحلیلی روی دامنه D است که نقاط تکین منفرد آن روی دامنه D، ازنوع قطب می‌باشد. این دسته از توابع، توابع منظم نیز نامیده می‌شوند. اخیرا توابع خوشریخت محدب از مرتبه α تعریف شده و خواص آن مورد بحث بررسی قرار گرفته است. در این مقاله ابتدا به معرفی توابع خوشریخت محدب ازمرتبه معکوس α می‌پردازیم. در واقع توابع خوشریخت محدب ازمرتبه معکوس α رده خاصی از توابع تحلیلی روی قرص باز واحد $\mathbb{U}$ می‌باشندکه در شرط زیرصدق می کنند:

$$\Re\left(1+\frac{f'(z)}{zf''(z)}\right) < -\alpha,$$

که در آن $0 \le \alpha < 1$ یک مقدار ثابت و z یک مقدار دلخواه در $\mathbb{U}$ می‌باشد. در ادامه با در نظر گرفتن خواص توابع تحلیلی و ستاره‌گون و با استفاده از لم‌هایی از قبیل لم جک، شرایط کافی برای اینکه یک تابع در رده مذکور باشد را مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم. در ادامه مثال هایی را از رده ذکر شده را بیان می‌کنیم. نتایج به دست آمده در این مقاله، شکل متفاوتی از توابع ستاره‌گون را معرفی و مورد بررسی قرار داده است. در واقع نتایج به دست آمده، نتایج مربوط به سان و کونگ را به شکل دیگری برای رده جدید از توابع تحلیلی ستاره‌گون مورد مطالعه قرار داده است.

واژه‌های کلیدی: تحلیلی، خوشریخت، محدب، ستاره‌گون.

*.عهده‌دار مکاتبات: Email: moradi.s@lu.ac.ir

۱- مقدمه

نظریه آنالیز مختلط یکی از شاخه‌های مهم ریاضی است که در بسیاری از علوم نظری و کاربردی مورد استفاده قرارمی گیرد وبه طور ویژه در فیزیک (نظریه پتانسیل) و علوم مهندسی (برق، مکانیک و ...) کاربرد فراوان دارد. قرن نوزدهم میلادی برخورد دقیق با اعداد مختلط آغاز گردید و نظریه توابع با متغیرهای مختلط توسط کوشی، وایرشتراس و ریمان پایه‌گذاری شد. در این راستا یکی از مباحث جالب و کاربردی در آنالیز مختلط رده توابع تک ارز و ستاره‌گون و زیر رده‌ها و خواص آنها و همچنین ارتباط بین آنها می‌باشد. مطالعه توابع تک‌ارز، امروزه شامل بررسی خانواده‌های خاصی از توابع تحلیلی و تک‌ارز در دامنه‌های از پیش تعریف شده می‌باشد. کوبه در سال ۱۹۰۷ توانست پیش از سایر ریاضی‌دانان قرن بیستم برآوردهای بسیار شناخته شده‌ای را در این نظریه ارائه دهد. اولین زیر رده اختصاصی خانواده تک‌ارز، توابع محدبی می‌باشند که قرص باز واحد را به دامنه‌های محدب می‌نگارند. این توابع بعدها توسط گرانوا لولاونر و افراد دیگری مورد مطالعه قرار گرفتند.

در سال‌های اخیر، بسیاری از پژوهشگران، توابع خوشریخت ستاره‌گون و محدب و توابع ستاره‌گون و محدب از مرتبه معکوس α را مورد مطالعه و بررسی قرار داده‌اند. در این پژوهش‌ها رده‌های خاصی از این توابع معرفی می‌شوند و سپس به بررسی خواص این رده‌ها می‌پردازند و برخی شرایط کافی برای عضویت این توابع در این رده‌ها به دست می‌آورند. (به عنوان مثال مراجع [1] تا [7]). در این مقاله یک رده جدید ازتوابع محدب معرفی می‌کنیم. همچنین برخی شرایط کافی برای عضویت توابع در این رده جدید به دست می‌آوریم.

Σ را گردایه تمام توابع f به صورت

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

در نظر می‌گیریم که در قرص باز واحد محذوف

$$\mathbb{U}^* := \{z : z \in C\ 0 < |z| < 1\} = \mathbb{U} - \{0\}$$

تحلیلی‌اند.

بسیاری از ویژگی‌های مهم و مشخصات جالب زیررده‌های Σ مثل رده $\mathcal{MS}^*(\alpha)$ توسط لیو و سرویستاوا، آوف و همکاران مورد بررسی قرار گرفته است [8]، [9] و [10]. یانگ سان و همکارانش زیررده $\mathcal{NS}^*(\alpha)$ را معرفی کردند و برخی شرایط برای عضویت این توابع در آن را به دست آوردند [11]. همچنین برخی از خواص جالب توابع تحلیلی وابسته به ضرب گروهی، توسط فورنیر و همکاران، آهوجا و همکاران مورد بررسی قرار داده شده است [12] و [13].

در سال ۲۰۱۲ سان و کونگ رده خاصی از توابع ستاره‌گون محدب را به صورت زیر معرفی کردند [11].

تعریف ۱-۱: گوییم تابع $f \in \Sigma$ در رده $\mathcal{MC}(\alpha)$ ازتوابع خوشریخت محدب از مرتبه α قرار دارد اگر در شرط زیر صدق کند،

$$\Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) < -\alpha.$$

که در آن $0 \le \alpha < 1$ یک مقدار ثابت و z یک مقدار دلخواه در $\mathbb{U}$ می‌باشد.

مثال ۱-۱: تابع $f \in \Sigma$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f(z) = \frac{e^{\beta z}}{z},$$

که در آن $0 < \beta < \frac{1}{3}$ یک مقدار ثابت و z یک مقدار دلخواه در $\mathbb{U}$ می‌باشد.

به سادگی ملاحظه می‌کنیم

$$\frac{zf''(z)}{f'(z)} = \frac{\beta z + 1}{\beta z - 1}.$$

بنابراین

$$\Re\left(1 + \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) = \Re\left(2 + \frac{2}{\beta z - 1}\right) < 2 + \frac{2}{\beta - 1} = -\frac{2\beta}{1-\beta}.$$

در نتیجه یک تابع خوشریخت محدب از مرتبه

$\alpha = \frac{2\beta}{1-\beta}$ می‌باشد.
در ادامه دسته جدید از توابع ستاره‌گون محدب از مرتبه معکوس α معرفی می‌کنیم.

تعریف ۱-۲: تابع $f \in \Sigma$ در رده $\mathcal{NC}(\alpha)$ متشکل از توابع خوشریخت محدب از مرتبه معکوس α قرار دارد اگر و تنها اگر،

$$\Re\left(1 + \frac{f'(z)}{zf''(z)}\right) < -\alpha.$$

که در آن $0 \le \alpha < 1$ یک مقدار ثابت و z یک مقدار دلخواه در $\mathbb{U}$ می‌باشد.

نکته ۱-۱: ملاحظه می‌کنیم از $\Re(p(z)) < 0$ نتیجه می‌شود،

$$\Re\left(\frac{1}{p(z)}\right) = \Re\left(\frac{p(z)}{|p(z)|^2}\right) < 0.$$

بنابراین، $f \in \Sigma$ تابع خوشریخت محدب ازمرتبه معکوس α است اگر و تنها اگر،

$$\left|\frac{zf''(z)}{f'(z)} + \frac{1}{2(1+\alpha)}\right| < \frac{1}{2(1+\alpha)}$$

که در آن $0 \le \alpha < 1$ یک مقدار ثابت و z یک مقدار دلخواه در $\mathbb{U}$ می‌باشد.
برای اثبات نتایج این مقاله به لم‌های تکراری زیر نیاز داریم.

لم ۱-۲ (لم جک [14]): گیریم φ یک تابع منظم غیرثابت در U باشد. اگر $|\varphi|$ ماکسیمم مقدار خود را روی دایره $|z| = r < 1$ در z_0 بگیرد، آنگاه

$$z_0\varphi'(z_0) = k\varphi(z_0),$$

که در آن $k \ge 1$ یک عدد حقیقی است.

لم ۱-۳: ([15]): گیریم Ω یک مجموعه درصفحه مختلط $\mathbb{C}$ باشد. فرض کنید که Φ نگاشتی از $\mathbb{C}^2 \times \mathbb{U}$ به $\mathbb{C}$ باشد که $\Phi(ix, y; z) \notin \Omega$. برای $z \in \mathbb{U}$ و برای هرعدد حقیقی x, y به طوری‌که $y \le -\frac{1+x^2}{2}$، اگر

$$p(z) = 1 + c_1z + c_2z^2 + \cdots$$

تحلیلی در $\mathbb{U}$ و $\Phi(p(z), zp'(z); z) \in \Omega$ برای هر $z \in \mathbb{U}$، آن‌گاه $\Re(p(z)) > 0$.
در ادامه شرایط کافی برای این که یک تابع در رده $\mathcal{NC}(\alpha)$ باشد را مورد بحث و بررسی قرار می‌دهیم و مثال‌هایی را از رده ذکر شده بیان می‌کنیم. در واقع نتایج به دست آمده، نتایج مربوط به سان و کونگ را به شکل دیگری برای رده جدید از توابع تحلیلی ستاره‌گون مورد مطالعه قرار داده است.

۲- نتایج اصلی

مااین بخش را با ارائه یک شرط کافی برای عضویت توابع در $\mathcal{NC}(\alpha)$ شروع می‌کنیم.

قضیه ۲-۱: فرض کنیم $f \in \Sigma$ به صورت،

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

باشد و در رابطه،

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\big(k + \alpha(k-1)\big)|a_k| \le \frac{1}{2}\left(1 - |4 + 4\alpha - 1|\right), \qquad (۱)$$

صدق کند. آن گاه $f \in \mathcal{NC}(\alpha)$ که در آن $0 < \alpha < 1$ یک مقدار ثابت دلخواه است.
برهان. با استفاده از نکته ۱-۱ کافی است نشان دهیم برای هر $z \in \mathbb{U}$،

$$\left|\frac{2(1+\alpha)zf''(z)}{f'(z)} + 1\right| < 1. \qquad (۲)$$

ابتدا مشاهده می‌کنیم که

$$\left|\frac{2(1+\alpha)zf''(z)+f'(z)}{f'(z)}\right| = \left|\frac{(4+4\alpha-1)}{-1+\sum_{k=0}^{\infty} Ka_kz^{k+1}} + \frac{\sum_{k=0}^{\infty}((2+2\alpha)k(k-1)+k)a_kz^{k+1}}{-1+\sum_{k=0}^{\infty} Ka_kz^{k+1}}\right| < \frac{|4+4\alpha-1|}{1-\sum_{k=0}^{\infty} k|a_k||z|^{k+1}} +$$

$$\frac{\sum_{k=0}^{\infty}\left((2+2\alpha)k(k-1)+k\right)|a_k||z|^{k+1}}{1-\sum_{k=0}^{\infty}k|a_k||z|^{k+1}} < \frac{|4+4\alpha-1|}{1-\sum_{k=0}^{\infty}k|a_k|} + \frac{\sum_{k=0}^{\infty}(2+2\alpha)k(k-1)+k)|a_k|}{1-\sum_{k=0}^{\infty}k|a_k|}.$$

حال با استفاده از نامساوی (۱) داریم،

$$\frac{|4-4\alpha-1|}{1-\sum_{k=0}^{\infty}k|a_k|} + \frac{\sum_{k=0}^{\infty}\left((2+2\alpha)k(k-1)+k\right)|a_k|}{1-\sum_{k=0}^{\infty}k|a_k|} < 1 \qquad (۳)$$

بنابراین با توجه به روابط (۲) و (۳) اثبات قضیه کامل می‌شود.□

در زیر دسته‌ای از توابع را معرفی می‌کنیم.

مثال ۲-۱: فرض کنیم $0 < \alpha < 1$ یک مقدار ثابت دلخواه باشد. تابع $f \in \Sigma$ به صورت زیر

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(1-|4+4\alpha-1|)}{k^2(k+1)\left(k+\alpha(k-1)\right)} a_k\, z^k$$

متعلق به $\mathcal{NC}(\alpha)$ است.

در ادامه یک شرط کافی دیگر برای عضویت یک تابع در $\mathcal{NC}(\alpha)$ بیان می‌کنیم.

قضیه ۲-۲: فرض کنیم $f \in \Sigma$ به صورت،

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

باشد و در رابطه،

$$\Re\left(\frac{f'(z)}{zf''(z)}\left(1+\beta\frac{zf'''(z)}{f''(z)}\right)\right) < \frac{1}{2}\beta(\alpha+3) - (1+\alpha), \qquad (۴)$$

صدق کند. آن گاه $f \in \mathcal{NC}(\alpha)$ که در آن $0 \le \alpha < 1$ و $\beta \ge 0$ ثابت‌های دلخواه می‌باشند.

برهان. تابع کمکی $h(z)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$h(z) := \frac{-\frac{f'(z)}{zf''(z)}-(1+\alpha)}{-\alpha} \qquad (۵)$$

که در آن $0 < \alpha < 1$ یک مقدار ثابت و z یک مقدار دلخواه در $\mathbb{U}$ می‌باشد.

آن گاه h در $\mathbb{U}$ تحلیلی است. از رابطه (۴) نتیجه می‌شود

$$1+\beta\frac{zf'''(z)}{f''(z)} = -\beta\frac{[zh'(z)\alpha+1]}{h(z)\alpha+(1+\alpha)} + 1 - \beta \qquad (۶)$$

با ترکیب (۵) و (۶)، به دست می‌آوریم

$$\frac{f'(z)}{zf''(z)}\left(1+\beta\frac{zf'''(z)}{f''(z)}\right) = -\beta zh'(z)\alpha + (1-\beta)h(z)\alpha + (1-\beta)(1+\alpha) - \beta = \Phi(h(z), zh'(z); z),$$

که در آن

$$\Phi(r,s;t) = \beta\alpha s + (1-\beta)\alpha r + (1-\beta)(1+\alpha) - \beta.$$

حال برای هر x و y حقیقی که $y \le -\frac{1+x^2}{2}$، داریم

$$\Re(\Phi(ix,y;z)) = -\beta\alpha y + 1 + \alpha - 2\beta - \beta\alpha \le \frac{\beta\alpha}{2}(1+x^2) + 1 + \alpha - 2\beta - \beta\alpha = (1+\alpha) - \frac{1}{2}\beta(4+\alpha) \quad (0 \le \alpha < 1).$$

اگر قرار دهیم،

$$\Omega = \left\{\varsigma : \Re(\varsigma) > (1+\alpha) - \frac{1}{2}\beta\,(4+\alpha)\right\},$$

آن گاه برای هر x و y حقیقی که $y \le -\frac{1+x^2}{2}$، داریم $\Phi(ix,y;z) \notin \Omega$. علاوه بر این، به موجب رابطه (۴)، ما می‌دانیم که

$$\Phi\left(h(z), z\acute{h}(z); z\right) \in \Omega.$$

بنابراین، با توجه لم ۱-۳، نتیجه می‌گیریم برای هر $z \in \mathbb{U}$، $\Re\left(h(z)\right) > 0$.

این دلالت بر درستی قضیه دارد.□

قضیه ۲–۳: فرض کنیم $f \in \Sigma$ به صورت،
$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k,$$

باشد و در رابطه،
$$\Re\left(1 + \frac{zf'''(z)}{f''(z)} - \frac{zf''(z)}{f'(z)}\right) < \begin{cases} \frac{1}{2(1+\alpha)} \left(0 \le \alpha < \frac{1}{2}\right), \\ \frac{1+\alpha}{2} \; \left(\frac{1}{2} \le \alpha < 1\right), \end{cases} \tag{۷}$$

صدق کند. آن گاه $f \in \mathcal{NC}(\alpha)$ که در آن $0 \le \alpha < 1$ مقدار ثابت دلخواه می‌باشد.

برهان. تابع کمکی $g(z)$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،
$$g(z) := -1 - \alpha - \frac{f'(z)}{zf''(z)} \tag{۸}$$

که در آن $0 < \alpha < 1$ یک مقدار ثابت و z یک مقدار دلخواه در $\mathbb{U}$ می‌باشد.

آن‌گاه g در $\mathbb{U}$ تحلیلی است. از رابطه (۸) نتیجه می‌شود
$$1 + \frac{zf'''(z)}{f''(z)} - \frac{zf''(z)}{f'(z)} = \frac{zg'(z)}{g(z)+(1+\alpha)} = \Phi(g(z), zg'(z); z),$$

که در آن
$$\Phi(r, s; t) = \frac{s}{r+(1+\alpha)}.$$

حال برای هر x و y حقیقی که $y \le -\frac{1+x^2}{2}$، داریم
$$\Re(\Phi(ix, y; z)) = \frac{(1+\alpha)y}{x^2+(1+\alpha)^2}$$
$$\le -\frac{(1+\alpha)\times(\frac{1+x^2}{2})}{x^2+(1+\alpha)^2}$$
$$\le -\frac{(1+\alpha)}{2} \times \frac{1+x^2}{x^2+(1+\alpha)^2}$$
$$\le \begin{cases} -\frac{(1+\alpha)}{2} \times \frac{1}{(1+\alpha)^2} \left(0 \le \alpha < \frac{1}{2}\right), \\ \;\; -\frac{(1+\alpha)}{2} \times 1 \quad \left(\frac{1}{2} \le \alpha < 1\right), \end{cases}$$

حال قرار می‌دهیم
$$\Omega = \left\{ \varsigma : \Re(\varsigma) > \begin{cases} \frac{1}{2(1+\alpha)} \left(0 \le \alpha < \frac{1}{2}\right) \\ \frac{\alpha+1}{2} \; \left(\frac{1}{2} \le \alpha < 1\right) \end{cases} \right\},$$

بنابراین برای هر x و y حقیقی که $y \le -\frac{1+x^2}{2}$، داریم $\Phi(ix, y; z) \notin \Omega$.

همچنین با توجه به (۷) داریم $\Phi(g(z), zg'(z); z) \in \Omega$. آن‌گاه بنابر لم ۱–۳، نتیجه می‌گیریم
$$\Re(g(z)) > 0 \qquad (z \in \mathbb{U}).$$

این اثبات قضیه را کامل می‌کند.□

تشکر و قدردانی

نویسندگان مقاله مراتب تشکر خود را از سردبیر و داوران محترم ابراز می‌کنند.

فهرست منابع

[1] R. M. Ali, V. Ravichandran. *Classes of meromorphic convex functions*, Taiwanese J. Math. 14, (2010), 1479-1490.

[2] M. H. Mohd, R. M. Ali, L. S. Keong, V. Ravichandran. *Subclasses of mermorphical functions associated with convolution*. J. Inequal. Appl. Article ID 190291, (2009), 1-10.

[3] Y. Sun, W. P. Kuang, Z-G. Wang. *On meromorphicstarlike functions of reciprocalorder α.* Department of Mathematics, Bulletin of the Malayslan MathematicalSciences Society, May (2012), 469-477.

[4] Z. G. Wang, Z. H. Liu, R. G. Xiang. *Some criteria for meromorphic multivalent starlike functions.* Appl. Math. Compute. doi:10.1016/ j.amc. (2011), 2011.03.079.

[5] M. Taati, S. Moradi, S. Najafzadeh. *Some properties and results for certain subclasses of starlike and convex functions.*Sahand Communications in Mathematical Analysis (SCMA) Vol. 7 No. 1, (2017), 1-15.

[6] M. Taati, S. Moradi, S. Najafzadeh. *Sufficient Conditions for a New Class of Polynomial Analytic Functions.*Mathematics nterdisciplinary Research. 2, (2017), 59 - 69.

[7] Z. G. Wang, H. M. Srivastava, S. M. Yuan. *Some basic properties of certain Subclasses of meromorphicallystarlike functions.*J. Inequal. Appl. 2014:29, (2014).

[8] J. L. Liu, H. M. Srivastava. *Some convolution conditions for starlikeness and convexity of mermorphically multivalent functions*. Appl. Math. Lett. 16, (2003), 13-16.

[9] J. L. Liu, H. M. Srivastava. *A linear operator and associated families of meromorphically multivalent functions.* J. Math. Anal. Appl. 259, (2001), 566-581.

[10] M. K. Aouf. *Argument estimates of certain mermorphically multivalent functionsassociated with generalized hypergeometric function.* Appl. Math. Comput. 206, (2008),772-780.

[11] Y. Sun, W. P. Kuang, Z. G. Wang. *On MeromorphicStarlike Functions of Reciprocal Order α*. Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 35(2), (2012), 469–477.

[12] R. Fournier, S. T. Ruscheweyh. Remarks on a multiplier conjecture for univalent functions. Proc. Amer. Math. Soc. 116, (1992), 35-43.

[13] O. P. Ahuja, J. M. Jahangiri, H. Silverman. *Subclasses of starlike functions related to a multiplier family.* Journal of natural geometry, 15, (1999), 65-72.

[14] I. S. Jack. *Function starlike and convex of orderα.* j. London Math. Soc. 3 (1971), 469-474.

[15] S. S. Miller, P.T. Mocanu. *Differential subordinations and inequalities in the complex plane.* J. Differential Equations 67, (1987), 199-211.