دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هفتم، شماره سی و یکم، مرداد و شهریور ۱۴۰۰
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

معرفی یک معادله مرتبه چهارم بیضوی از نوع کیرشهف و یافتن بی‌نهایت جواب ضعیف برای آن

کریمه بهاری اردشیری[۱]، سمیه خادملو[۲]*، قاسم علیزاده افروزی[۳]

[(۱و۳)] گروه ریاضی دانشگاه مازندران، مازندران، ایران
[(۲)] گروه ریاضی دانشگاه صنعتی نوشیروانی بابل، بابل، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۰۴/۲۶   تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۰۶/۲۵

چکیده

این مقاله به بررسی وجود بی‌نهایت جواب یک معادله‌ی بیضوی مرتبه چهار کیرشهف، شامل پتانسیل چند تکینگی معکوس مربعی، در یک دامنه‌ی کراندار با استفاده از روش‌های آنالیز غیرخطی بخصوص روش تغییراتی می‌پردازد. آنالیز غیرخطی ابزاری توانمند در حل بسیاری از مدل‌های فیزیکی و تکنیکی برای اثبات حل‌پذیری آنها است. در میان روش‌های مطرح شده در آنالیز غیرخطی، روش‌های تغییراتی قادرند وجود و چندگانگی جواب‌ها را بدون یافتن مقدار دقیق آن به اثبات برسانند. از این منظر شاید بتوان گفت یکی از مهمترین کاربردهای آنالیز را در حل مدل‌های واقعی برگرفته از مسائل واقعی، در همین زیرشاخه از آنالیز می‌توان یافت. ویژگی مهم مسئله‌ی مطرح شده در این مقاله، وجود نقاط تکینگی در دامنه است. با استفاده از نظریه نقطه‌ی بحرانی، ثابت می‌کنیم بازه‌ای یافت می‌شود که در آن مسئله دارای دنباله‌ای از جواب‌های ضعیف متمایز می‌باشد. به عبارت دیگر وجود بی‌نهایت جواب ضعیف برای این مسئله ثابت می‌شود. این مسئله از نوع معادلات پواسون- شرودینگر مستقل از زمان است که در متون فیزیکی کاربرد دارد.

واژه‌های کلیدی: نظریه‌ی نقطه‌ی بحرانی، بی‌نهایت جواب ضعیف، معادله‌ی بیضوی، کیرشهف مرتبه‌ی چهار، پتانسیل چند تکینگی معکوس مربعی.

*. عهده‌دار مکاتبات
Email: s.khademloo@nit.ac.ir

مقدمه

در این مقاله معادله مرتبه چهارم بیضوی زیر را که شامل پتانسیل‌های معکوس مربعی چندتکینگی روی یک دامنه کراندار هموار $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 5)$ است، برای $x \in \Omega - \{a_1, \dots, a_k\}$ مورد بررسی قرار می‌دهیم.

$$\Delta^2 u = -M\left(\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \sum_{i=1}^{k} \frac{\mu_i}{|x-a_i|^2}|u|^2\right)dx\right)\left(\Delta u - \sum_{i=1}^{k}\frac{\mu_i}{|x-a_i|^2}u\right) = \lambda f(x,u) + \mu g(x,u). \quad (۱)$$

شرط مرزی در نظر گرفته شده برای معادله فوق به صورت $x \in \partial\Omega$ برای $u(x) = \Delta u(x) = ۰$ است که در آن Δ^2 که یک عملگر دو همساز می‌باشد. به عبارت دیگر

$$\Delta^2 u = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial^4}{\partial x_i^4} u + \sum_{i \neq j}^{N} \frac{\partial^4}{\partial x_i^2 \partial x_j^2} u,$$

و $a_i \in \Omega, i = 1, 2, \dots, k$ به ازای $k \geq 1$. نقاط مختلفی هستند. به علاوه $۰ \leq \mu_i \in \mathbb{R}$ و $\sum_{i=1}^{k} \mu_i < \bar{\mu} := \left(\frac{N-2}{2}\right)^2$ که $\bar{\mu}$ ثابت بهینه در نامساوی هاردی می‌باشد.
همچنین $f, g: \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ دو تابع پیوسته هستند و $M \in C^1([۰, +\infty[, \mathbb{R})$.
در سال ۱۸۸۳ کیرشهف [21] معادله کلاسیک موج را با معرفی معادله

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left(\frac{\rho_۰}{h} + \frac{E}{2L}\int_۰^L \left|\frac{\partial u}{\partial x}\right| dx\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = ۰,$$

توسیع داد. پس از آن مسائل مقدار مرزی غیرموضعی بیضوی از نوع زیر، که به مسائل کیرشهف معروف هستند، بسیار مورد بررسی قرار گرفت.

$$\begin{cases} -M\left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\Delta u(x) = f(x,u) & \Omega \\ u = ۰, & \partial\Omega \end{cases}$$

[26، 24، 23، 22]. مسئله (۱) یک نسخه مستقل از زمان معادله شرودینگر-پواسون می‌باشد که دارای کاربرد فیزیکی است. بنابر معادله کلاسیک برخورد یک ذره با یک میدان الکترومغناطیسی را می‌توان با معادلات پواسن-شرودینگر غیرخطی مدل‌سازی کرد [8]، [3]. در [14] از روش تغییراتی و نظریه نقطه بحرانی برای پیدا کردن جواب‌های غیرمنفی و غیربدیهی از مرتبه چهار کیرشهف اختلال یافته از نوع بیضوی زیر استفاده شده است.

$$\begin{cases} \Delta_p^2 u - \left[M\left(\int_\Omega |\nabla u|^p\right)\right]^{p-1}\Delta_p u + \rho|u|^{p-2}u = \lambda f(x,u) & \Omega \\ u = \Delta u = ۰, & \partial\Omega \end{cases}$$

که در آن

$$\Delta_p^2 u = \Delta(|\Delta u|^{p-2}\Delta u), p > \max\{1, \tfrac{N}{2}\}$$

یک عملگر از مرتبه چهار است. $\lambda > ۰$ یک عدد حقیقی، $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 1)$ یک دامنه کراندار هموار، $\rho > ۰$ و $f: \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ یک تابع L^1-کاراتئودری می‌باشد. به عنوان یک نمونه دیگر در [15] وجود جواب‌های مسئله بیضوی با پتانسیل هاردی

$$\begin{cases} \Delta_p u = \mu \frac{|u|^{p-2}u}{|x|^p} + \lambda f(x,u) & \Omega \\ u = ۰, & \partial\Omega \end{cases}$$

مورد مطالعه قرار گرفته است. هانگ و لیو در [17] نیز درباره جواب‌های مختلف العلامه معادلات p-همساز با پتانسیل هاردی مطالعاتی را انجام دادند.

$$\begin{cases} \Delta_p^2 u - \frac{a}{|x|^{2p}}|u|^{p-2}u = f(x,u) & \Omega \\ u = \Delta u = ۰. & \partial\Omega \end{cases}$$

به علاوه در [26] درباره وجود بی‌نهایت جواب ضعیف از مرتبه چهار کیرشهف مسئله بیضوی باپتانسیل هاردی

$$\begin{cases} M\left(\int_\Omega |\nabla u|^p dx\right)\Delta^2{}_p u - \frac{a}{|x|^{2p}}|u|^{p-2}u = \lambda f(x,u) + \mu g(x,u) & \Omega, \\ u = \Delta u = ۰ & \partial\Omega. \end{cases}$$

البته در این زمینه مطالعاتی دیگر نیز انجام شده است [11، 19، 25]. در ادامه معادله کیرشهف مرتبه چهار بیضوی (1) را مورد مطالعه قرار خواهیم داد.

۲. مفاهیم و قضایای مقدماتی

در ابتدا به تبیین مفروضات و شرایط مورد نیاز می‌پردازیم.

(H_1) تابع $M : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ تابع پیوسته است و ثوابت مثبت m_1, m_0 وجود دارند، بطوری که برای هر $t \geq 0$ داری

$$0< m_0 \le 1 \le M(t) \le m_1, \qquad (۲)$$

و

$$\widetilde{M}(t) \ge M(t)t, \qquad (۳)$$

که در آن

$$\widetilde{M}(t) = \int_0^t M(s)ds \quad t \ge 0.$$

(H_2) $0\le \mu_1 \le \mu_2 \le \cdots \le \mu_k < \bar{\mu}$ و $\sum_{i=1}^k \mu_i < \bar{\mu}$

فرض کنید λ_1 اولین مقدار ویژه مثبت از مساله مقدار ویژه مرتبه دوم زیر باشد.

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \Omega, \\ u = 0 & \partial\Omega. \end{cases}$$

در این صورت $\lambda_1(\lambda_1 - c)$ اولین مقدار ویژه مثبت از مساله مقدار ویژه درجه چهار

$$\begin{cases} \Delta^2 u + c\Delta u = \lambda u & \Omega, \\ \Delta u = u = 0 & \partial\Omega, \end{cases}$$

خواهد بود که در آن $c < \lambda_1$ می باشد. با استفاده از نامساوی پوانکاره برای هر $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ داریم:

$$\frac{\|\Delta u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)}}{\|u\|^2_{L^2(\Omega)}} \ge \lambda_1(\lambda_1 - c). \qquad (۴)$$

[4، 5، 7]. برای $\mu_i = 0$ با استفاده از نامساوی سوبولف-هاردی برای هر $u \in H_0^1(\Omega)$ داریم:

$$\left(\int_\Omega \frac{|u|^p}{|x-a|^s} dx\right)^{\frac{2}{p}} \le C_{p,s} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx,$$

که در آن $2 \le p \le 2^{**}, a \in \Omega$ (2^{**} نمای بحرانی سوبولوف است.) و $0 \le s < 2$. در حالتی که $p = s = 2$ باشد، برای هر $u \in H_0^1(\Omega)$، با استفاده از نامساوی هاردی داریم

$$\int_\Omega \frac{u^2}{|x-a|^2} dx \le \frac{1}{\bar{\mu}} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx. \qquad (۵)$$

[19، 12، 10]. فرض کنید $X = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ یک فضای هیلبرت مجهز به ضرب داخلی

$$(u,v)_1 = \int_\Omega \left(\Delta u\, \Delta v + \nabla u\, \nabla v - \sum_{i=1}^k \frac{\mu_i}{|x-a_i|^2} uv\right) dx,$$

و نرم کاهش یافته

$$\|u\|_1^2 = \int_\Omega \left(|\Delta u|^2 + |\nabla u|^2 - \sum_{i=1}^k \frac{\mu_i}{|x-a_i|^2} |u|^2\right) dx,$$

باشد. این نرم معادل با نرم

$$\|u\|^2 = \int_\Omega (|\Delta u|^2 + |\nabla u|^2) dx,$$

می‌باشد که متناظر با ضرب داخلی

$$(u,v) = \int_\Omega (\Delta u\, \Delta v + \nabla u\, \nabla v) dx,$$

در X است. یادآور می‌شویم که اگر یک فضای هیلبرت دارای دو نرم معادل $\|.\|$ و $\|.\|_1$ باشد، می‌توان ثابت‌های C_1 و C_2 را طوری یافت که برای هر $u \in X$ در نامساوی زیر صدق کنند.

$$C_1 \|u\|_1^2 \le \|u\|^2 \le C_2 \|u\|_1^2, \qquad (۶)$$

به ویژه طبق H_2 داریم: $\sum_{i=1}^k \frac{\mu_i}{|x-a_i|^2} > 0$. در نتیجه

$$\|u\|_1^2 = \int_\Omega \left(|\Delta u|^2 + |\nabla u|^2 - \sum_{i=1}^k \frac{\mu_i}{|x-a_i|^2} |u|^2\right) dx < .$$

از H_2 و (۵) داریم:

$$\|u\|_1^2 = \int_\Omega \left(|\Delta u|^2 + |\nabla u|^2 - \sum_{i=1}^k \frac{\mu_i}{|x-a_i|^2}|u|^2\right) dx \geq \int_\Omega |\Delta u|^2 dx + \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^k \mu_i}{\bar{\mu}}\right)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx \geq = \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^k \mu_i}{\bar{\mu}}\right)\|u\|^2.$$

پس برای ثابت‌های $C_1 = 1$ و $C_2 = \left(1 - \frac{\sum_{i=1}^k \mu_i}{\bar{\mu}}\right)^{-1}$ نامساوی (۶) برقرار است.

(H_3) $f: \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ تابعی پیوسته است،

$$F(x,t) = \int_\circ^t f(x,s) ds \quad (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R},$$

و برای هر $(x,t) \in \Omega \times [\circ, \infty[$ داریم: $F(x,t) \geq \circ$

(H_4) : فرض کنید $s > \circ$ و $B(\circ,s) \subset \Omega$ چنان باشند که در آن $B(\circ,s)$ نشان‌دهنده یک گوی به مرکز صفر و شعاع s باشد و

$$\theta_1 = \frac{2\pi^{\frac{N}{2}}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}\int_{\frac{s}{2}}^s \left|\frac{12(N+1)}{s^3} r - \frac{24N}{s^2} + \frac{9(N-1)}{s}\frac{1}{r}\right|^2 r^{N-1} dr,$$

$$\theta_2 = \int_{B(\circ,s)\setminus B(\circ,\frac{s}{2})} \sum_{i=1}^N \left(\frac{12x_i}{s^3} - \frac{24x_i}{s^2} + \frac{9x_i}{sr}\right)^2 dx,$$

که در آن Γ تابع گاما و

$$\Theta = \theta_1 + \theta_2. \tag{۷}$$

(H_5): $s > \circ$ در H_4 طوری انتخاب می‌شود، به طوریکه اگر قرار دهیم

$$\alpha := \liminf_{t\to+\infty} \frac{\sup_{\|\xi\|_{L^2(\Omega)}\leq t}\int_\Omega F(x,\xi) dx}{t^2},$$

$$\beta := \limsup_{t\to+\infty} \frac{\int_{B(\circ,\frac{s}{2})} F\left(x,\frac{t}{h}\right) dx}{t^2},$$

رابطه $\alpha < L\beta$ حاصل شود که

$$L = \frac{\lambda_1(\lambda_1 - c)m_\circ h^2}{m_1 \Theta C_2} \tag{۸}$$

($h > 1$, Θ در رابطه (۷) و C_2 در رابطه (۶) معرفی شده‌اند).

(H_6) $g: \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ پیوسته است،

$$G(x,t) = \int_\circ^t g(x,s) ds . (x,t) \in \Omega \times \mathbb{R}$$

و برای هر $(t,u) \in \bar{\Omega} \times [\circ, +\infty[$ داریم $G(t,u) \geq \circ$ و نیز تعریف می‌کنیم:

$$g_\infty := \limsup_{t\to+\infty} \frac{\sup_{\|\xi\|_{L^2(\Omega)}\leq t}\int_\Omega G(x,\xi) dx}{t^2}.$$

تعریف ۱. $u \in X$ را یک جواب ضعیف از مساله (۱) گویند، اگر برای هر $u, v \in X$ داشته باشیم

$$\int_\Omega \Delta u \Delta v \, dx + M\left(\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \sum_{i=1}^k \frac{\mu_i}{|x-a_i|^2}|u|^2\right) dx\right)\left(\int_\Omega \nabla u \nabla v - \sum_{i=1}^k \frac{\mu_i}{|x-a_i|^2} uv dx\right) = \lambda\left(\int_\Omega f(x,u) v dx + \frac{\mu}{\lambda}\int_\Omega g(x,u) v dx\right).$$

تابعک انرژی متناظر با مساله (۱) به صورت

$$I_\lambda(u) = \Phi(u) - \lambda\Psi(u),$$

تعریف می‌شود که در آن

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\Delta u|^2 dx + \frac{1}{2}\widetilde{M}\left(\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \sum_{i=1}^k \frac{\mu_i}{|x-a_i|^2}|u|^2\right) dx\right), \tag{۹}$$

$$\Psi(u) = \int_\Omega \left(F(x,u) + \frac{\mu}{\lambda} G(x,u)\right) dx.$$

توابع Φ و Ψ خوش تعریف و بطور پیوسته گاتو مشتق‌پذیر می‌باشند. مشتق آنها برای هر $u,v \in X$ عبارت است از

$$\Phi'(u)v = \int_\Omega \Delta u \Delta v \, dx + M\left(\int_\Omega \left(|\nabla u|^2 - \sum_{i=1}^k \frac{\mu_i}{|x-a_i|^2}|u|^2\right) dx\right)\left(\int_\Omega \nabla u \nabla v - \sum_{i=1}^k \frac{\mu_i}{|x-a_i|^2} uv dx\right), \tag{۱۰}$$

و

$$\Psi'(u)(v) = \int_\Omega f(x,u) v dx + \frac{\mu}{\lambda}\int_\Omega g(x,u) v dx. \tag{۱۱}$$

می‌دانیم جواب غیربدیهی از مساله (۱) معادل با نقاط بحرانی غیرصفر از $I_\lambda(u)$ است. نتایج اصلی مقاله در زیر آمده است:

قضیه ۲. فرض کنید $H_1 - H_6$ برقرار باشند. در این صورت برای هر

$$\lambda \in \Lambda = \frac{\lambda_1(\lambda_1-c)m_\circ}{2\,C_2}\left]\frac{1}{L\beta},\frac{1}{\alpha}\right[,$$

و هر $g \in C(\bar{\Omega}\times\mathbb{R})$ اگر قرار دهیم

$$\begin{cases}\mu^* = \dfrac{\lambda_1(\lambda_1-c)m_\circ-2\lambda\alpha C_2}{2C_2 g_\infty} & g_\infty > \circ,\\ +\infty & g_\infty < \circ,\end{cases} \qquad (۱۲)$$

آنگاه مساله (۱) برای هر $\mu \in [\circ,\mu^*[$ دارای یک دنباله بیکران از جواب‌های ضعیف در X خواهد بود.

همچنین فرض کنید:

(H_3') $f:\bar{\Omega}\times\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ یک تابع پیوسته باشد و $\mathfrak{C}>\circ$ وجود داشته باشد، بطوری که برای هر $(x,t)\in\Omega\times[\circ,\mathfrak{C}]$ داشته باشیم $F(x,t)\geq\circ$.

(H_4') انتخاب $s>\circ$ در H_4 بگونه‌ای است که اگر قرار دهیم

$$\tilde{\alpha} := \liminf_{t\to\circ^+}\frac{\sup_{\|\xi\|_{L^2(\Omega)}\leq t}\int_\Omega F(x,\xi)dx}{t^2},$$

$$\tilde{\beta} := \limsup_{t\to\circ^+}\frac{\int_{B\left(\circ,\frac{s}{2}\right)}F\left(x,\frac{t}{h}\right)dx}{t^2},$$

آنگاه $\tilde{\alpha} < L\tilde{\beta}$.

(H_5'): برای هر $(t,u)\in\bar{\Omega}\times[\circ,\mathfrak{C}]$ داریم $G(t,u)\geq\circ$ و تعریف می‌کنیم

$$g_\circ := \limsup_{t\to\circ^+}\frac{\sup_{\|\xi\|_{L^2(\Omega)}\leq t}\int_\Omega G(x,\xi)dx}{t^2}.$$

قضیه ۳. فرض کنید H_1، H_2 و H_5'-H_3' برقرار باشند. در این صورت برای هر

$$\lambda \in \tilde{\Lambda} = \frac{\lambda_1(\lambda_1-c)m_\circ}{2\,C_2}\left]\frac{1}{L\tilde{\beta}},\frac{1}{\tilde{\alpha}}\right[,$$

و هر $g \in C(\bar{\Omega}\times\mathbb{R})$ اگر قرار دهیم

$$\mu_* = \begin{cases}\dfrac{\lambda_1(\lambda_1-c)m_\circ-2\lambda\alpha C_2}{2C_2 g_\circ} & g_\circ > \circ,\\ +\infty & g_\circ < \circ,\end{cases}$$

آنگاه مساله (۱) برای هر $\mu \in [\circ,\mu_*[$ دارای یک دنباله قویا همگرا به صفر از جواب‌های ضعیف در X است.

تذکر ۴. *شرط‌های* $H_5 - H_3$, $H_3{}'$ و $H_4{}'$ تضمین می‌کنند که مساله (۱) بی‌نهایت جواب دارد.
شرایط $H_5 - H_3$ صریحاً اطمینان می‌دهند که تابع اولیه F از تابع f دارای یک رفتار مناسب نوسانی در بی نهایت برای به دست آوردن جواب‌های نامحدود می‌باشد و شرایط $\mathrm{H}_3{}'$ و $\mathrm{H}_4{}'$ اطمینان می‌دهندکه تابع اولیه F از f دارای یک رفتار ارتعاشی مناسب نزدیک مبدا برای پیدا کردن جواب‌های کوچک دلخواه می‌باشد. [18].
ابزار اصلی ما برای اثبات دو قضیه فوق، قضیه بینهایت نقطه بحرانی [2] می‌باشد که در ادامه به طور کامل بیان شده است.

قضیه ۵. فرض کنید X یک فضای باناخ حقیقی انعکاسی باشد و $\Phi,\Psi : X\to\mathbb{R}$ دو تابع گاتو دیفرانسیل‌پذیر باشند به‌طوری که Φ نیمه پیوسته پایینی ضعیف دنباله‌ای، قویا پیوسته و اجباری و Ψ نیمه پیوسته بالایی ضعیف دنباله‌ای باشند. برای هر $r > \inf_X \Phi$ فرض کنید

$$\varphi(r) = \inf_{u\in\Phi^{-1}(]-\infty,r[)}\frac{\sup_{v\in\Phi^{-1}(]-\infty,r[)}\Psi(v)-\Psi(u)}{r-\Phi(u)}$$

$$\gamma = \liminf_{r\to+\infty}\varphi(r),$$

$$\delta = \liminf_{r\to(\inf_X\Phi)^+}\varphi(r),$$

سپس خواهیم داشت:

(i) اگر $\gamma < +\infty$ برای هر $\lambda\in\left]\circ,\frac{1}{\gamma}\right[$ یکی از گزینه‌های زیر برقرار است: یا تابعک $\Phi-\lambda\Psi$ دارای مینیمم سراسری است یا وجود دارد یک

دنباله $\{u_n\}$ از نقاط بحرانی (مینیمم‌های موضعی) از $\Phi-\lambda\Psi$ بطوری که $\lim_{n\to+\infty}\Phi(u_n)=+\infty$.

(ii) اگر $\delta<+\infty$ برای هر $\lambda\in\left]\circ,\frac{1}{\delta}\right[$ یکی از گزینه‌های زیر برقرار است: یا یک مینیمم سراسری از Φ وجود دارد که مینیمم موضعی از $\Phi-\lambda\Psi$ است یا یک دنباله $\{u_n\}$ از نقاط بحرانی دو به دو متمایز (مینیمم‌های موضعی) از $\Phi-\lambda\Psi$ با $\lim_{n\to+\infty}\Phi(u_n)=\inf_X\Phi$ می‌باشد بطوری که ضعیفا همگرا به مینیمم سراسری از Φ است.

۳. اثبات قضایای اصلی

در این بخش به اثبات نتایج اصلی خواهیم پرداخت. ما از قسمت اول قضیه ۵ برای اثبات قضیه ۲ استفاده خواهیم کرد. در واقع نشان داده می‌شود که تابعک I_λ مینیمم سراسری ندارد.

اثبات قضیه ۲. فرض کنید Φ، Ψ تابع‌هایی باشند که در رابطه (۹) تعریف شد. چون

$$\widetilde{M}\left(\int_\Omega\left(|\nabla u|^2-\sum_{i=1}^k\frac{\mu_i}{|x-a_i|^2}|u|^2\right)dx\right)=\int_\circ^{\left(\int_\Omega\left(|\nabla u|^2-\sum_{i=1}^k\frac{\mu_i}{|x-a_i|^2}|u|^2\right)dx\right)}M(s)\,ds,$$

پس از روابط (۵) و (۶) خواهیم داشت:

$$\Phi(u)\geq\begin{cases}\frac{1}{2\,C_2}\|u\|^2 & m_\circ\geq 1,\\ \frac{m_\circ}{2\,C_2}\|u\|^2 & m_\circ<1,\end{cases}\qquad(۱۴)$$

$$\Phi(u)\leq\begin{cases}\frac{1}{2}\|u\|^2 & m_1\leq 1,\\ \frac{m_1}{2}\|u\|^2 & m_1>1,\end{cases}\qquad(۱۵)$$

نامساوی‌های بالا و H_1 نتیجه می‌دهند

$$\frac{m_\circ}{2\,C_2}\|u\|^2\leq\Phi(u)\leq\frac{m_1}{2}\|u\|^2\qquad(۱۶)$$

که در آن $C_2=\left(1-\frac{\sum_{i=1}^k\mu_i}{\widetilde{\mu}}\right)^{-1}$ می‌باشد. در نتیجه تابعک Φ اجباری است. از نیم پیوستگی ضعیف پایینی نرم همچنین یکنواختی و پیوستگی $\widetilde{M}$، واضح است که تابعک Φ نیمه پیوسته ضعیف پایینی دنباله‌ای است. بعلاوه تابعک Φ بطور پیوسته مشتق‌پذیر گاتو است و مشتق گاتو آن دارای وارون پیوسته می‌باشد.

حال به ازای یک $u\in X$ ثابت، فرض کنید وقتی n به ∞ میل می‌کند $u_n\rightharpoonup u$ همگرای ضعیف در X باشد. در این صورت u_n وقتی $n\to\infty$، روی Ω بطور یکنواخت همگرا به u می‌باشد [27]. از آنجاییکه $f(x,u)+\frac{\mu}{\lambda}g(x,u)$ برای هر $x\in\Omega$ در $\mathbb{R}$ پیوسته است، بنابراین برای هر $x\in\Omega$ وقتی $n\to\infty$، داریم

$$f(x,u_n)+\frac{\mu}{\lambda}g(x,u_n)\to f(x,u)+\frac{\mu}{\lambda}g(x,u)$$

پس وقتی $n\to\infty$، $\Psi'(u_n)\to\Psi(u)$ و این بدین معنی است که Ψ روی X قویا پیوسته می‌باشد. گزاره ۲۶,۲ در منبع [27] نتیجه می‌دهد که Ψ' یک عملگر فشرده بوده، پس به‌طور ضعیف نیمه پیوسته بالایی دنباله‌ای است. حال می‌خواهیم ثابت کنیم $\gamma<+\infty$.

با استفاده از روابط (۴) و (۱۶) می توان دید

$$\begin{aligned}\Phi^{-1}(\,]-\infty,r[\,)&=\{u\in X,\Phi(u)<r\}\\&\subset\left\{u\in X,\ \frac{m_\circ}{2\,C_2}\|u\|^2<r\right\}\\&\subset\left\{u\in X,\|u\|^2<\frac{2\,rC_2}{m_\circ}\right\}\\&\subset\left\{u\in X:\|u\|^2_{L^2(\Omega)}<\frac{2\,rC_2}{\lambda_1(\lambda_1-c)m_\circ}\right\}.\qquad(۱۷)\end{aligned}$$

توجه کنید که $\Phi(\circ)=\circ$ و $\Psi(\circ)=\circ$ است. برای هر $r>\circ$ با استفاده از (۱۷) می‌توان نوشت

$$\varphi(r)=\inf_{u\in\Phi^{-1}(]-\infty,r[)}\frac{\sup_{u\in\Phi^{-1}(]-\infty,r[)}\Psi(v)-\Psi(u)}{r-\Phi(u)}\leq\frac{\sup_{u\in\Phi^{-1}(\,]-\infty,r[\,)}\Psi(v)}{r}\leq$$

$$\frac{\sup_{\|\xi\|_{L^2(\Omega)}\le d}\int_\Omega F(x,\xi)dx}{r} + \frac{\mu}{\lambda}\frac{\sup_{\|\xi\|_{L^2(\Omega)}\le d}\int_\Omega G(x,\xi)dx}{r},$$

که در آن

$$d = \frac{2\,rC_2}{\lambda_1(\lambda_1-c)m_0}$$

می‌باشد. فرض کنید $\{d_n\}$ یک دنباله از اعداد مثبت باشد بطوری‌که $d_n \to +\infty$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sup_{\|\xi\|_{L^2(\Omega)}\le d_n}\int_\Omega F(x,\xi)dx}{d_n^2} = \liminf_{t\to\infty}\frac{\sup_{\|\xi\|_{L^2(\Omega)}\le t}\int_\Omega F(x,\xi)dx}{t^2}. \quad (۱۸)$$

فرض کنید برای هر

$$r_n = \frac{\lambda_1(\lambda_1-c)m_0}{2\,C_2}d_n^2 \quad n\in\mathbb{N}$$

بنابر H_5 و (۱۸) داریم:

$$\gamma = \liminf_{r\to\infty}\varphi(r) \le \liminf_{n\to\infty}\varphi(r_n) \le \frac{2\,C_2}{\lambda_1(\lambda_1-c)m_0}\lim_{n\to\infty}\frac{\sup_{\|\xi\|_{L^2(\Omega)}\le d_n}\int_\Omega F(x,\xi)dx}{d_n^2} + \frac{\mu}{\lambda}\frac{2\,C_2}{\lambda_1(\lambda_1-c)m_0}\lim_{n\to\infty}\frac{\sup_{\|\xi\|_{L^2(\Omega)}\le d_n}\int_\Omega G(x,\xi)dx}{d_n^2} \le \frac{2\,C_2}{\lambda_1(\lambda_1-c)m_0}\left(\alpha+\frac{\mu}{\lambda}\,g_\infty\right) < +\infty. \quad (۱۹)$$

با استفاده از روابط (۱۲) و (۱۹) داریم:

$$\gamma < \begin{cases} \frac{2\,C_2}{\lambda_1(\lambda_1-c)m_0}\left(\alpha+\frac{\mu^*}{\lambda}\,g_\infty\right) = \frac{1}{\lambda} & g_\infty > 0, \\ \frac{2\,C_2}{\lambda_1(\lambda_1-c)m_0}\,\alpha < \frac{1}{\lambda} & g_\infty < 0. \end{cases} \quad (۲۰)$$

چون $\alpha < L\beta$ پس خواهیم داشت $]\,0,\frac{1}{\lambda}\,[\subset \Lambda$. با ثابت در نظر گرفتن $\lambda\in\Lambda$ از نامساوی قبلی قسمت اول قضیه ۵ نتیجه می‌شود و یا I_λ دارای مینیمم سراسری است یا یک دنباله $\{u_n\}$ از جواب مساله(۱)وجود دارد بطوری که $\lim_{n\to\infty}\|u_n\| = +\infty$. گام بعدی اثبات این است که تابعک $\Phi-\lambda\Psi$ برای $\lambda\in\Lambda$ از پایین بیکران است. چون

$$\frac{1}{\lambda} < \frac{2\,C_2}{\lambda_1(\lambda_1-c)m_0}\,L\beta = \frac{2\,h^2}{m_1\,\Theta}\,\beta,$$

یک دنباله $\{a_n\}$ از اعداد مثبت و $\zeta>0$ وجود دارد بطوری که $a_n\to+\infty$ و برای n به اندازه کافی بزرگ نامساوی زیر برقرار است

$$\frac{1}{\lambda} < \zeta < \frac{2\,h^2}{m_1\,\Theta}\,\frac{\int_{B(0,\frac{s}{2})}F\left(x,\frac{a_n}{h}\right)dx}{a_n^2} \quad (۲۱)$$

فرض کنید $\{w_n\}$ یک دنباله در X باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود

$$w_n(x) = \begin{cases} 0 & x\in\bar{\Omega}\backslash B(0,s) \\ \frac{a_n}{h}\left(\frac{4}{s^3}\rho^3-\frac{12}{s^2}\rho^2+\frac{9}{s}\rho-1\right) & x\in B(0,s)\backslash B\left(0,\frac{s}{2}\right) \\ \frac{a_n}{h} & x\in B\left(0,\frac{s}{2}\right) \end{cases} \quad (۲۲)$$

که در آن

$$\rho = dist(x,0) = \sqrt{\sum_{i=1}^N x_i^2}$$

واضح است که $w_n\in X$. با محاسبه مشتق جزئی داریم:

$$\frac{\partial w_n(x)}{\partial x_i} = \begin{cases} 0 & x\in\left(\bar{\Omega}\backslash B(0,s)\right)\cap B\left(0,\frac{s}{2}\right) \\ \frac{a_n}{h}\left(\frac{12\,\rho x_i}{s^3}-\frac{24\,x_i}{s^2}+\frac{9\,x_i}{s\rho}\right) & x\in B(0,s)\backslash B\left(0,\frac{s}{2}\right). \end{cases}$$

و

$$\frac{\partial^2 w_n(x)}{\partial x_i^2} = \begin{cases} 0 & x\in\left(\bar{\Omega}\backslash B(0,s)\right)\cap B\left(0,\frac{s}{2}\right) \\ \frac{a_n}{h}\left(\frac{12(x_i^2+\rho^2)}{s^3\rho}-\frac{24}{s^2}+\frac{9\,(\rho^2-x_i^2)}{s\rho^3}\right) & x\in B(0,s)\backslash B\left(0,\frac{s}{2}\right) \end{cases} \quad (۲۳)$$

با بکارگیری (۲۳) و H_4 می‌توان نوشت

$$\sum_{i=1}^N\frac{\partial^2 w_n(x)}{\partial x_i^2} = \begin{cases} 0 & x\in\left(\bar{\Omega}\backslash B(0,s)\right)\cap B\left(0,\frac{s}{2}\right) \\ \frac{a_n}{h}\left(\frac{12\,\rho(N+1)}{s^3}-\frac{24\,N}{s^2}+\frac{9\,(N-1)}{s\rho}\right) & x\in B(0,s)\backslash B\left(0,\frac{s}{2}\right) \end{cases} \quad (۲۴)$$

و

$$\int_\Omega|\Delta\,w_n(x)|^2dx = \left(\frac{a_n}{h}\right)^2\frac{2\,\pi^{N/2}}{\Gamma\left(\frac{N}{2}\right)}\int_{\frac{s}{2}}^{s}\left|\frac{12\,(N+1)}{s^3}-\frac{24\,N}{s^2}+\frac{9\,(N-1)}{s}\frac{1}{r}\right|^2 r^{N-1}dr = \frac{\theta_1}{h^2}a_n^2$$

و

$$\int_\Omega |\Delta w_n(x)|^2 dx = \int_{B(\circ,s)\setminus B\left(\circ,\frac{s}{2}\right)} \sum_{i=1}^N \left(\frac{a_n}{h}\right)^2 \left(\frac{12\,(N+1)x_i}{s^3} - \frac{24\,x_i}{s^2} + \frac{9}{s}\frac{x_i}{\rho}\right)^2 dx = \left(\frac{a_n}{h}\right)^2 \int_{B(\circ,s)\setminus B\left(\circ,\frac{s}{2}\right)} \sum_{i=1}^N \left(\frac{a_n}{h}\right)^2 \left(\frac{12\,\rho x_i}{s^3} - \frac{24\,x_i}{s^2} + \frac{9\,x_i}{s\rho}\right)^2 dx = \left(\frac{a_n}{h}\right)^2 \theta_2. \quad (۲۵)$$

بنابراین روابط (۲) و (۲۴) و (۲۵) ایجاب می‌کنند

$$\Phi(w_n) \le \frac{m_1}{2}\|w_n\|^2 = \frac{m_1}{2}\int_\Omega (|\Delta w_n|^2 + |\nabla w_n|^2)dx = \frac{m_1}{2}\left(\frac{\theta_1}{h^2}a_n^2 + \frac{\theta_2}{h^2}a_n^2\right) = \frac{m_1\Theta}{2\,h^2}a_n^2 \quad (۲۶)$$

از طرف دیگر با استفاده از (۲۱) و H_4 داریم

$$\Psi(w_n) = \int_\Omega \left(F(x, w_n(x)) + \frac{\mu}{\lambda}G(x,\xi)\right)dx \ge \int_{B\left(\circ,\frac{s}{2}\right)} F\left(x, \frac{a_n}{h}\right)dx \ge \frac{m_1\Theta\zeta a_n^2}{2\,h^2} \quad (۲۷)$$

پس از روابط (۲۱)، (۲۶) و (۲۷) برای هر $n \in N$ به اندازه کافی بزرگ نتیجه می‌شود که:

$$\Phi(w_n) - \lambda\Psi(w_n) \le \frac{m_1\Theta\zeta a_n^2}{2\,h^2} - \lambda\int_{B\left(\circ,\frac{s}{2}\right)} F\left(x,\frac{a_n}{h}\right)dx \le \frac{m_1\Theta}{2\,h^2}(1-\lambda\zeta)a_n^2 \quad (۲۸)$$

بنابراین

$$\lim_{n\to\infty}\left(\Phi(w_n) - \lambda\Psi(w_n)\right) = -\infty$$

بنابر قسمت اول قضیه ۵ دنباله بیکران $\{u_n\}$ از نقاط بحرانی تابعک $\Phi - \lambda\Psi$ وجود دارد. طبق ترادف بین نقاط بحرانی $\Phi - \lambda\Psi$ و جواب‌های ضعیف مساله (۱) اثبات تمام می‌شود.

در ادامه با استفاده از قسمت (ii) قضیه ۵ قضیه ۲ را اثبات می‌کنیم. به عبارت دیگر نشان می‌دهیم که دنباله‌ی بی‌نهایت جواب مساله (۱) به صفر همگراست.

اثبات قضیه ۲. فرض کنید $\{d_n\}$ یک دنباله مثبت از اعداد و $d_n \to \circ^+$ و همچنین

$$\delta := \liminf_{r\to\circ^+}\varphi(r) \le \liminf_{n\to+\infty}\varphi(r_n) \le \frac{2\,C_2}{\lambda_1(\lambda_1-c)m_\circ}\lim_{n\to+\infty}\frac{\sup_{\|\xi\|_{L^2(\Omega)}\le d_n}\int_\Omega F(x,\xi)dx}{d_n^2} + \frac{\mu}{\lambda}\frac{2\,C_2}{\lambda_1(\lambda_1-c)m_\circ}\lim_{n\to+\infty}\frac{\sup_{\|\xi\|_{L^2(\Omega)}\le d_n}\int_\Omega G(x,\xi)dx}{d_n^2} \le \frac{\mu}{\lambda}\frac{2\,C_2}{\lambda_1(\lambda_1-c)m_\circ}\left(\tilde{\alpha} + \frac{\mu}{\lambda}g_\circ\right) < +\infty \quad (۲۹)$$

بنابراین $\widetilde{\Lambda} \subset \left]\circ, \frac{1}{\delta}\right[$.

فرض کنید Φ و Ψ همان توابع تعریف شده در (۸) باشند. فرض کنید $\{a_n\}$ یک دنباله از اعداد مثبت باشند بطوری‌که $a_n \to \circ^+$ و $\zeta > \circ$ برای n به اندازه کافی بزرگ داشته باشیم

$$\frac{1}{\lambda} < \zeta < \frac{2\,h^2}{m_1\,\Theta}\frac{\int_{B\left(\circ,\frac{s}{2}\right)} F\left(x,\frac{a_n}{h}\right)dx}{a_n^2}$$

و دنباله $\{w_n\}$ تعریف شده در (۲۹) را در نظر بگیرید. با توجه به $\min_X \Phi = \Phi(\circ) = \circ$، (۲۱)، (۲۶) و (۲۷) به ازای هر $n \in N$ به اندازه کافی بزرگ خواهیم داشت

$$\Phi(w_n) - \lambda\Psi(w_n) \le \frac{m_1\Theta\zeta a_n^2}{2\,h^2} - \lambda\int_{B\left(\circ,\frac{s}{2}\right)} F\left(x,\frac{a_n}{h}\right)dx \le \frac{m_1\Theta}{2\,h^2}(1-\lambda\zeta)a_n^2 \le \circ = \Phi(\circ) - \lambda\Psi(\circ),$$

حال با استفاده از این حقیقت که $\|w_n\| \to \circ$، می‌توانیم بگوییم که $\Phi - \lambda\Psi$ دارای مینیمم موضعی صفر نمی‌باشد. بنابراین با توجه به قسمت (ii) قضیه ۵ اثبات تمام است.

تذکر ۶. متذکر می‌شویم که در [17] با استفاده از روش تغییراتی مشابه اما با استدلالی متفاوت وجود بی‌نهایت جواب مساله (۱) که در آن $k = 1$ و $1 < q < 2$، $f(x,u) = |u|^{q-2}u$، $2 < q < 2^{**}$ نشان داده شده است.

تذکر ۷. با استفاده از اصل ماکزیمم قوی و استدلال‌های متعارف می‌توان بررسی کرد که جواب‌های بدست آمده در قضیه ۲ تغییر علامت نمی‌دهند، لذا می‌توان آن‌ها را مثبت در نظر گرفت. همچنین در [6] نشان داده شد که اگر شرایط مرزی $\partial\Omega$ به صورت $u = \Delta u = 0$ باشد آنگاه اصل ماکزیمم برقرار است و مینیمم کننده آن نیز وجود دارد. لذا می‌توان انتظار جواب غیرمنفی را داشت. [9، 13، 16]

فهرست مراجع

[1] D. Cao, P. Han, Solutions to critical elliptic equations with multisingular inverse square potentials, Differential Equations. 224 (2006) 332-372.

[2] V. Benci and D. Fortunato, Discreteness conditions of the spectrum of Schrödinger operators, J. Math. Anal. Appl, 64(3) (1978) 695-700.

[3] N. Ghoussoub, C. Yuan, Multiple solutions for quasilinear PDEs involving critical Sobolev and Hardy exponents, Trans. Amer. Math. Soc. 352 (2000) 5703-5743.

[4] P. N. Srikanth, Uniqueness of solutions of ninlinear Dirichlet problems, Differential Integral Equations .6 (1993) 663-670.

[5] M. Willem, Minimax theorems, Progress in Nonlinear Differential

[6] Adimurthi, M. Grossi, S. Santra, maximum principle and related eigenvalue problem, J. Funct. Anal. 240 (2006) 36-83.

[7] Y. An, R. Liu, Existence of nontrivial solutions of an asymptotically linear fourth-order elliptic equations, Nonlinear Anal. 68 (2008) 3325-3331.

[8] V. Benci, D. Fortunato, An eigenvalue problem for the Schrödinger-Maxwell equations, Topol. Methods Nonlinear Anal. 11 (1998) 283-293.

[9] E. Berchio, A. Farina, A. Ferrero, F. Gazzola, Existence and stability of entire solutions to a semi linear fourth order elliptic problem, Differential Equations. 252(3) (2012)2596-2616.

[10] F. Catrina, Z.Q. Wang, On the Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities: sharp constants, existence (and nonexistence) and symmetry of extremal functions, Comm. Pure Appl. Math. 56 (2001) 229-258.

[11] D. Cao, P. Han, Solutions to critical elliptic equations with multisingular inverse square potentials, Differential Equations. 224 (2006) 332-372.

[12] K.S. Chou, C.W. Chu, On the best constant for a weighted Sobolev-Hardy inequality, J. Lond. Math. Soc. 48 (1993) 137-151.

[13] D. R. Dunninger, Maximum principles for solutions of some fourthorder elliptic equations, Math. Anal. Appl. 37(1972) 655-658.

[14] M. Ferrara, S. Khademloo, S. Heidarkhani, Multiplicity results for perturbed fourth-order Kirchhoff type elliptic problems, Appl. Math. Comput. 234 (2014), 316-325.

[15] M. Ferrara, G. Molica Bisci, Existence results for elliptic problems with Hardy potential, Bull. Sci. math. 138 (2014) 846-859.

[16] F. Gazzola, H.C. Grunau, G. Sweers, Polyharmonic boundary value problems, LNM 1991 Springer (2010).

[17] Giovani M. Figueiredo, Rúbia G. Nascimento, Multiplicity of solutions for equations involving a nonlocal term and the biharmonic operator, Electron. J. Diff. Equ. 2016 (2016) 217, 1–15.

[18] A. Hadjian, M. Ramezani, Existence of Infinitely many solutions for forth-order equations depending on two parameters, Electron. J. Diff. Equ. 2017 (2017) 117, 1–10.

[19] T. S. Hsu, Multiple positive solutions for semi linear elliptic equations involving multi-singular inverse square potentials and concave–convex nonlinearities, Nonlinear Analysis. 74 (2011) 3703-3715.

[20] Y. Huang, X. Liu, Sign-changing solutions for p-biharmonic equations with Hardy potential, J. Math. Anal. Appl. 412 (2014), 142-154.

[21] G. Kirchhoff, Vorlesungen uber Mathematische Physik Mechanik, Teubner, leipzig, Germany, 1883.

[22] Y. Li, F. Li, J. Shi, Existence of a positive solution to Kirchhoff type problems without compactness conditions, J. Differ. Equ. 253 (2012), 2285-2294.

[23] M. Massar, Existence and multiplicity solutions for nonlocal elliptic problems, Electron. J. Diff. Equ. 2013 (2013), No. 75, pp. 1-14.

[24] F. Wang, Y. An, Existence and multiplicity of solutions for a forthorder elliptic equation, Boundary Value Problems 2012 (2012) 6, 1-9.

[25] L. Wei, X. Cheng, Z. Feng, Exact behavior of positive solutions to elliptic equations with multi-singular inverse square potentials, Discrete and continuous dynamical systems. 36 (2016) 12, 7169-7189.

[26] M. XU, C. BAI, Existence of Infinitely many solutions for perturbed Kirchhoff type elliptic problems with Hardy potential, Electronic Journal of Differential Equations. 2015 (2015), 268, 1-9.

[27] E. Zeidler, Nonlinear Functional Analysis and Its Applications, voll. II, Springer, Berlin-HeidelberNew York, 1985.