دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هفتم، شماره سی و چهارم، بهمن و اسفند 1400
شماره شاپا: 2588X-588

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

کران‌های جدید برای عدد احاطه‌گر ضعیف فرد روی درخت‌ها

هادی رهبانی[*1]، سید نصیب الله دوستی مطلق[2]، نادر جعفری‌راد[3]

[(1و2)] گروه علوم و فناوری دفاعی، دانشگاه و پژوهشگاه عالی دفاع ملی و تحقیقات راهبردی، تهران، ایران
[(3)] گروه ریاضی دانشگاه شاهد، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: 1399/06/25 تاریخ پذیرش مقاله: 1400/03/09

چکیده:

یک مجموعه احاطه‌گر ضعیف فرد در یک گراف زیر مجموعه‌ایی مانند B از رئوس می‌باشد به‌طوری که مجموعه متمایز C از رئوس وجود داشته باشد که هر رأس B دارای تعدادی فرد همسایه در C باشد. بیشترین اندازه بین مجموعه‌های احاطه‌گر ضعیف فرد در گراف G را با $k(G)$ و کمترین اندازه در بین مجموعه‌هایی که احاطه‌گر ضعیف فرد نیستند را با $k'(G)$ نشان می‌دهند. از انگیزه‌های اصلی مطالعه و بررسی مجموعه‌های احاطه‌گر ضعیف فرد طراحی پروتکل تسهیم راز کوانتومی مبتنی بر گراف‌ها می‌باشد. گراف G از مرتبه n متناظر با یک پروتکل تسهیم راز با آستانه $k_Q(G) = \max\{k(G), n - k'(G)\}$ می‌باشد. در این مقاله ما یک کران پایین برای بیشترین اندازه یک مجموعه احاطه‌گر ضعیف فرد در درخت‌ها ارایه می‌دهیم و یک حدس ارایه شده در این خصوص را در درخت‌ها اثبات می‌کنیم. همچنین یک کران بالا برای بیشترین اندازه یک مجموعه احاطه‌گر ضعیف فرد در درخت‌ها براساس مرتبه و تعداد برگ‌ها ارایه می‌کنیم و برخی از کران‌های موجود قبلی را بهبود می‌دهیم.

واژه‌ی کلیدی: مجموعه احاطه‌گر ضعیف فرد، تسهیم راز کوانتومی، گراف، درخت.

[*] عهده‌دار مکاتبات
E-mail: rahbanihadi@gmail.com

بخش اول: مقدمه

گراف $G = (V(G), E(G))$ عبارت است از مجموعه متناهی $V(G)$ و خانواده $E(G)$ از دوتایی‌های نامرتب از اعضای متمایز در $V(G)$ که هر عضو $V(G)$ یک رأس و هر عضو E(G) یک یال نامیده می‌شود. برای آسانی در نوشتار یال $\{u, v\} \in E(G)$ را به صورت $uv \in E(G)$ مشخص کرده و اگر $e = uv \in E(G)$ آنگاه می‌گوییم u و v با هم مجاور هستند. مرتبه گراف تعداد رئوس آن و اندازه یک گراف تعداد یال‌های آن گراف می‌باشند. درجه رأس v در گراف G تعداد یال‌های گراف G است که v بر آن‌ها واقع است و با $deg(v)$ نشان داده می‌شود. بیشترین و کمترین درجه در یک گراف را به ترتیب با $\Delta(G)$ و $\delta(G)$ نشان می‌دهند. مجموعه همه رئوس مجاور رأس v را همسایگی باز v می‌نامیم و با $N(v)$ نشان می‌دهیم و مجموعه $N[v] = N(v) \cup \{v\}$ را همسایه بسته رأس v گوییم. برای مجموعه D مجموعه $Odd[D] = \{u \in V(G): |N[u] \cap D| = 1, mod\ 2\}$ را مجموعه همسایه‌های بسته فرد D و مجموعه $Even[D] = \{u \in V(G): |N[u] \cap D| = 0, mod\ 2\}$ را مجموعه همسایه‌های بسته زوج D گوییم. گراف متمم G که با $\bar{G}$ نشان داده می‌شود گرافی است با مجموعه رئوس $V(G)$ که در آن دو رأس u و v مجاورند اگر وتنها اگر $uv \notin E(G)$. یک برگ رأسی از درجه یک است و رأسی که در همسایگی یک برگ باشد را رأس پشتیبان گویند. مجموعه برگ‌های گراف G را با $L(G)$ و مجموعه رئوس پشتیبان آن را با نماد $S(G)$ نمایش می‌دهند. گراف G را همبند گویند، هرگاه بین هر دو رأس متمایز آن مسیری وجود داشته باشد. هر گراف همبند فاقد دور درخت نامیده می‌شود. یک درخت ریشه‌دار درختی است که یک رأس آن از بقیه رئوس متمایز شده باشد. اگر T یک درخت ریشه‌دار باشد، آن‌گاه زیردرخت ریشه‌دار در رأس v را با نماد T_v نمایش می‌دهیم. اگر $u \in N_{T_v}(v)$ باشد، گوییم u فرزند v و v پدر u است.

مجموعه‌های احاطه‌گر یکی از موضوعات جذاب برای محققین در حوزه گراف و ترکیبیات می‌باشد. یک مجموعه S از راس‌ها در گراف G را یک مجموعه احاطه‌گر گویند هرگاه $N(S) \cup S = V(G)$ [1] . مجموعه احاطه‌گر فرد حالت خاصی از تعمیم کلی مجموعه احاطه‌گر به نام $[\sigma, \rho]$-احاطه‌گر است. فرض کنید $\sigma, \rho \subseteq \mathbb{N}$، مجموعه C در گراف $G = (V, E)$ را یک مجموعه $[\sigma, \rho]$-احاطه‌گر گویند، هرگاه به ازای هر $v \in C$، $|N(v) \cap C| \in \sigma$ و به ازای هر $v \in V \setminus C$، $|N(v) \cap C| \in \rho$ [2]. مجموعه $[EVEN, ODD]$-احاطه‌گر را مجموعه احاطه‌گر فرد گویند که در آن $EVEN = \{2n : n \in \mathbb{N}\}$ و $ODD = \mathbb{N} \setminus EVEN$. مجموعه احاطه‌گر ضعیف فرد حالتی ضعیف از مجموعه‌های احاطه‌گر ضعیف می‌باشد که به صورت زیر تعریف می‌شود. مجموعه $B \subseteq V$ را یک مجموعه احاطه‌گر ضعیف فرد گویند، هرگاه مجموعه $C \subseteq V \setminus B$ وجود داشته باشد به‌طوری که $B \subseteq Odd[C]$. از $B \cap C = \emptyset$ نتیجه گرفته می‌شود که $B \subseteq Odd[C]$ اگر و فقط اگر $B \subseteq Odd(C) = \{u \in V : |N(u) \cap C| = 1,\ mod\ 2\}$. مجموعه‌هایی که احاطه‌گر ضعیف فرد نیستند، دارای کاربردهای ویژه‌ای هستند، در [3] مجموعه‌هایی که احاطه‌گر ضعیف فرد نیستند بررسی شده است و خاصیت مهمی از این گراف‌ها بیان شده است.

لم 1 [3]: فرض کنید $G = (V, E)$ یک گراف باشد. مجموعه $B \subseteq V$ احاطه‌گر ضعیف فرد نیست، اگر و فقط اگر مجموعه $D \subseteq B$ وجود داشته باشد به طوری که

۱. $|D| = 1, mod\ 2$.
۲. $Odd(D) \subseteq B$.

به راحتی می‌توان دید که هر زیرمجموعه یک مجموعه احاطه‌گر فرد ضعیف یک مجموعه احاطه‌گر ضعیف فرد می‌باشد. همچنین هر ابر مجموعه یک مجموعه که احاطه‌گر ضعیف فرد نباشد، مجموعه احاطه گر ضعیف فرد نیست. بنابراین بزرگترین مجموعه احاطه‌گر ضعیف فرد و کوچکترین مجموعه‌ای که احاطه‌گر ضعیف فرد نباشند دارای اهمیت است. برای گراف G اندازه بزرگترین مجموعه احاطه‌گر ضعیف فرد در آن را با $k(G)$ و اندازه کوچکترین مجموعه‌ای که احاطه‌گر ضعیف فرد نباشد را با $k'(G)$ نشان می‌دهند. پارامترهای $k(G)$ و $k'(G)$ نقش مهمی در تسهیم راز کوانتومی مبتنی بر گراف دارند که در بخش بعدی به آن اشاره می‌کنیم.

ساختار این مقاله به شرح زیر است. در بخش دوم به اهمیت مجموعه احاطه‌گر ضعیف فرد در تسهیم راز کوانتومی می‌پردازیم. در بخش سوم برخی از نتایج ارایه شده قبلی را بیان می‌کنیم. در بخش چهارم نتایج اصلی مقاله را به صورت زیر ارایه خواهیم داد: ابتدا یک کران پایین برای بیشترین اندازه یک مجموعه احاطه‌گر ضعیف فرد در درخت‌ها ارایه می‌دهیم و یک حدس ارایه شده در خصوص بیشترین مجموعه‌های احاطه‌گر ضعیف فرد را در درخت‌ها اثبات می‌کنیم. سپس یک کران بالا برای بیشترین اندازه یک مجموعه احاطه‌گر ضعیف فرد در درخت‌ها بر اساس مرتبه و تعداد برگ‌ها ارایه می‌کنیم و برخی از کران‌های موجود قبلی را بهبود می‌دهیم.

بخش دوم: تسهیم راز کوانتومی و مجموعه احاطه‌گر ضعیف فرد

انگیزه اصلی مطالعه مجموعه‌های احاطه‌گر ضعیف فرد به نقش حیاتی آنها در پروتکل‌های تسهیم راز کوانتومی مبتنی بر گراف بر می‌گردد. تسهیم راز کوانتومی عبارت است از به اشتراک گذاشتن یک حالت کوانتومی بین چند نفر، به‌طوری که تنها مجموعه‌های مجاز قادر به بازیابی راز باشند [4]. سه دسته‌بندی مهم از تسهیم راز در [5] ارائه شده است. اولین نوع، تسهیم راز کلاسیکی می‌باشد که در آن کانال امنی بین توزیع کننده و سهامداران وجود دارد و با CC نشان داده می‌شود. دومین نوع این دسته‌بندی تسهیم راز کلاسیکی است که در آن امکان استراق سمع بین توزیع کننده و سهامداران وجود دارد و از کانال‌های کوانتومی برای جلوگیری از این موضوع استفاده می‌شود و این نوع تسهیم راز را با CQ نشان می‌دهند. دسته سوم تسهیم راز کوانتومی بین توزیع کننده و سهامداران روی کانال‌های کوانتومی است که با QQ نشان داده می‌شود.

یک تسهیم راز کوانتومی شامل رمز گذاری یک راز کوانتومی در یک حالت کوانتومی n– بخشی و فرستادن قسمتی از راز به هر یک از n نفر است به طوری که فقط مجموعه‌های مجاز قادر به بازیابی راز باشند. مارخام و ساندرز خانواده ویژه‌ای از پروتکل‌های تسهیم راز کوانتومی را معرفی کردند که حالت‌های کوانتومی n– بخشی که بین بازیکنان تقسیم می‌شوند به صورت گرافی نمایش داده می‌شوند، چنین حالت‌های کوانتومی را حالت‌های گرافی می‌نامند [5]. هرچند حالت‌های گرافی تسهیم راز CC مزیتی نسبت به بقیه طرح‌های کلاسیکی ندارد، با این وجود آن‌ها برای تسهیم رازهای QQ و CQ بسیار مفید هستند. مجموعه A در ادامه کیوبیت‌هایی در گراف G می‌باشند که فروشنده، راز را توسط آن‌ها رمزگذاری می‌کند.

یک پروتکل تسهیم راز (G,A) را k-خصوصی گویند، هرگاه همه مجموعه‌های دارای کمتر از k بازیکن قادر به کسب اطلاعات در مورد راز نباشند. یک پروتکل تسهیم راز (G,A) را k-قابل دستیابی گویند، هرگاه حداقل k بازیکن بتوانند راز را بازیابی کنند. یک پروتکل (G,A) با $n = |V(G)|$ یک پروتکل (k,n)-تسهیم راز نامیده می شود، هرگاه

پروتکل هم k-خصوصی و هم k-قابل دستیابی باشد. در این صورت می‌گویند، پروتکل دارای آستانه k می‌باشد.

در ادامه پیشینه ارتباط مجموعه‌های احاطه‌گر ضعیف فرد و تسهیم راز کوانتومی را بیان می‌کنیم. در [6] شرایط گرافی زیر برای اینکه مجموعه‌ای از بازیکنان بتوانند راز را بازیابی کنند، ارائه شده است.

قضیه 2 [6]: پروتکل تسهیم راز کلاسیکی CC روی گراف G توسط مجموعه S قابل بازیابی است، هرگاه مجموعه $D \subseteq S$ وجود داشته باشد به‌طوری که

- $D \cup Odd(D) \subseteq S$.
- $|D \cap A| = 1, mod\ 2$.

قضیه 3 [6]: پروتکل تسهیم راز کلاسیکی CC روی گراف G توسط مجموعه S قابل بازیابی نیست، هرگاه مجموعه $K \subseteq V\backslash S$ وجود داشته باشد به‌طوری که $Odd(K) \cap S = A \cap S.$

در [5] نشان داده شده است که مجموعه‌ای از بازیکنان به‌طور کامل می‌توانند یک راز کوانتومی توصیف شده با گراف G را بازیابی کنند اگر و فقط اگر راز کلاسیکی را در هر دو پروتکل G و $\bar{G}$ بازیابی کنند. بنابراین از لم 1 و قضایای 2 و 3 نتیجه می‌شود که یک مجموعه از بازیکنان که احاطه‌گر ضعیف فرد نباشند می‌توانند راز کلاسیکی را بازیابی کنند و یک مجموعه از بازیکنان که احاطه‌گر ضعیف فرد باشند، نمی‌توانند راز را بازیابی کنند. بنابراین نتیجه می‌گیریم که هر مجموعه با بیشتر از $k_Q(G) = \max(k(G), k(\bar{G}))$ بازیکن می‌تواند راز کوانتومی توصیف شده با گراف G را بازیابی کند، چون آنها می‌توانند در هر دو پروتکل توصیف شده با G و $\bar{G}$ راز کلاسیکی را بازیابی کنند. به علاوه مجموعه B از بازیکنان وجود دارد به‌طوری که $|B| \leq k_Q(G)$ نمی‌تواند راز را در G و $\bar{G}$ بازیابی کند و لذا B نمی‌تواند راز کوانتومی را کامل بازیابی کند. در نتیجه $k_q(G) + 1$ آستانه بهینه است به این معنی که هر مجموعه‌ای از بازیکنان با تعداد بیش از $k_Q(G)$ می‌توانند راز کوانتومی توصیف شده با G را بازیابی کنند.

قضیه 4 [3]: برای هر گراف G از مرتبه n، $k_Q(G) = \max(k(G), n - k'(G)).$

بخش سوم: کران‌های ارایه شده قبل

با توجه به بخش قبل تعیین پارامترهای $k(G)$ و $k'(G)$ برای گراف G از اهمیت بسیار بالایی برخوردار است. در [3] نشان داده شده است برای گراف G و عدد k، مساله تصمیم‌گیری $k_Q(G) \geq k$ یا به عبارتی $k(G) \geq k$ یا $k'(G) \leq n - k$ یک مسأله NP- کامل است. بنابراین با توجه به کاربردهای این دو پارامتر در تسهیم راز کوانتومی ارائه کران برای این دو پارامتر دارای اهمیت ویژه‌ای است. در [3] کران‌هایی برای $k(G)$ براساس ماکزیمم درجه و مرتبه گراف به صورت زیر ارائه شده است.

لم 5 [3]: برای هر گراف G از مرتبه n، $\Delta \leq k(G) \leq \frac{n\Delta}{\Delta+1}.$

در [7] یک کران پایین احتمالاتی برای $k(G)$ به صورت زیر ارائه شده است.

قضیه 6 [7]: برای هر گراف G و مینیمم درجه $\delta > 0$،

$$k(G) \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1+\log(2\delta)}{4\delta}\right) n,$$

به علاوه اگر $\delta \geq 1$، آنگاه $k(G) \geq \frac{n}{4}$ و برای $\delta \geq 2$، $k(G) \geq \frac{8n}{27}$.

همچنین در [7] حدس زده شده که برای هر گراف G از مرتبه n، $k(G) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$. در این مقاله ما این حدس را برای درختان اثبات می‌کنیم.

حدس 7 [7]: برای هر گراف G از مرتبه n، $k(G) \geq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil$.

بخش چهارم: کران‌های جدید

در این بخش ابتدا به ارایه یک کران پایین برای $k(G)$ در درخت‌ها می‌پردازیم و حدس 7 را در درخت‌ها اثبات می‌کنیم. سپس یک کران بالا برای $k(G)$ در درخت‌ها ارایه می‌دهیم و لم 5 را برای درخت‌ها بهبود می‌دهیم.

قضیه 8: اگر T درختی از مرتبه $n \geq 3$ باشد، آن‌گاه $k(T) \geq \frac{n}{2}$ و این کران شارپ است.

برهان: برای اثبات قضیه از استقرا روی مرتبه n درخت عمل می‌کنیم. اگر $n = 3$ باشد، آن‌گاه $T = P_3$ و در نتیجه $k(T) = 2 > \frac{n}{2}$. بنابراین مرحله آزمون استقراء برقرار است. حال فرض کنید برای هر درخت T' از مرتبه $n' < n$ حکم برقرار باشد، نشان می‌دهیم که حکم برای درخت T از مرتبه nنیز درست می‌باشد. اگر $n \geq 4$ و $diam(T) = 2$ باشد، آن‌گاه $T = K_{1,n}$. در این صورت $k(T) = n - 1 > \frac{n}{2}$.

فرض کنید که $diam(T) = 3$ باشد. اگر $n = 4$، آن‌گاه $T = P_4$ و $k(T) = 2 = \frac{n}{2}$. حال فرض کنید $n \geq 5$. در این صورت T یک ستاره دوگانه با مرکز u و v می‌باشد. قرار دهید $B = L(T)$ و $C = \{u, v\}$. در این صورت به وضوح $B \subseteq Odd(C)$ و لذا B یک مجموعه احاطه‌گر ضعیف فرد است. بنابراین $k(T) \geq n - 2 > \frac{n}{2}$.

حال فرض کنید $diam(T) \geq 4$. درخت T را در رأس x_0 از مسیر قطری $x_0x_1 \dots x_d$ ریشه دار می‌کنیم به طوری که x_{d-1} درای کمترین درجه بین همه رئوس با فاصله $d - 1$ از رأس x_0 باشد. حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت 1) $\deg(x_{d-1}) = 2$.

ابتدا فرض کنید که $\deg(x_{d-2}) = 2$. قرار می‌دهیم $T' = T - T_{x_{d-2}}$. در این صورت $n' = n - 3$. فرض کنید B' یک مجموعه احاطه‌گر ضعیف فرد برای درخت T' باشد و $B' \subseteq Odd(C')$. اگر $x_{d-3} \notin C'$، قرار دهید:

$B = B' \cup \{x_{d-2}, x_d\}$ و $C = C' \cup \{x_{d-1}\}$.

در غیر این صورت قرار دهید:

$B = B' \cup \{x_{d-2}, x_{d-1}\}$ و $C = C' \cup \{x_d\}$.

در هر دو حالت به آسانی می‌توان دید که $B \subseteq Odd(C)$ و لذا B یک مجموعه احاطه‌گر ضعیف فرد برای درخت T می‌باشد. بنابراین از فرض استقراء نتیجه می‌گیریم که

$$k(T) \geq k(T') + 2 \geq \frac{n'}{2} + 2 = \frac{n-3}{2} + 2 = \frac{n+1}{2} > \frac{n}{2}.$$

بنابراین می‌توان فرض کرد که $\deg(x_{d-2}) \geq 3$. قرار دهید $T' = T - T_{x_{d-1}}$. در این صورت $n' = n - 2$. فرض کنید B' یک مجموعه احاطه‌گر ضعیف فرد برای درخت T' باشد و $B' \subseteq Odd(C')$. اگر $x_{d-2} \notin C'$، قرار دهید:

$B = B' \cup \{x_{d-1}\}$ و $C = C' \cup \{x_d\}$.

در غیر این صورت قرار دهید:

$B = B' \cup \{x_d\}$ و $C = C' \cup \{x_{d-1}\}$.

در هر دوحالت بوضوح $B \subseteq Odd(C)$ و لذا B یک مجموعه احاطه‌گر ضعیف فرد برای درخت T می‌باشد. لذا از فرض استقراء نتیجه می‌شود که

$$k(T) \geq k(T') + 1 \geq \frac{n'}{2} + 1 = \frac{n-2}{2} + 1 = \frac{n}{2}.$$

حالت 2) $\deg(x_{d-1}) = 3$.

فرض کنید w برگ مجاور با رأس x_{d-1} غیر از x_d

باشد. ابتدا فرض کنید که $\deg(x_{d-2}) = 2$. قرار دهید $T' = T - T_{x_{d-2}}$. دراین‌صورت $n' = n - 4$، فرض کنید B' یک مجموعه احاطه‌گر ضعیف فرد برای درخت T' باشد و $B' \subseteq Odd(C')$ قرار دهید:
$B = B' \cup \{x_d, w\}$ و $C = C' \cup \{x_{d-1}\}$.

در این صورت $B \subseteq Odd(C)$ و لذا B یک مجموعه احاطه‌گر ضعیف فرد برای درخت T می‌باشد. بنابراین از فرض استقراء نتیجه می‌شود که

$$k(T) \ge k(T') + 2 \ge \frac{n'}{2} + 2 = \frac{n-4}{2} + 2 = \frac{n}{2}.$$

حال فرض کنید که $\deg(x_{d-2}) \ge 3$. در این صورت با توجه به انتخاب x_{d-1}، هیچ فرزند پشتیبانی از رأس x_{d-2} نمی‌تواند پشتیبان ضعیف باشد. ابتدا فرض کنید x_{d-2} دارای فرزند پشتیبان قوی u با حداقل سه برگ مجاور باشد. قرار دهید $T' = T - T_u$. در این صورت $n' = n - l_u - 1$، فرض کنید B' یک مجموعه احاطه‌گر ضعیف فرد برای درخت T' باشد و $B' \subseteq Odd(C')$. قرار دهید:
$B = (B' \cup L(u)) - \{x_{d-2}\}$ و $C = C' \cup \{u\}$.

در این صورت $B \subseteq Odd(C)$ و لذا B یک مجموعه احاطه‌گر ضعیف فرد برای درخت T می‌باشد. بنابراین از فرض استقراء نتیجه می‌شود که

$$k(T) \ge k(T') + l_u - 1 \ge \frac{n'}{2} + l_u - 1 = \frac{n-l_u-1}{2} + l_u - 1 = \frac{n+l_u-3}{2} \ge \frac{n}{2}.$$

حال فرض کنید هر فرزند پشتیبان از x_{d-2} درای دقیقا دو برگ مجاور باشد. قرار دهید $T' = T - T_{x_{d-2}}$. فرض کنید B' یک مجموعه احاطه‌گر ضعیف فرد برای درخت T' باشد و $B' \subseteq Odd(C')$، همچنین فرض کنید r_1 تعداد برگ‌های مجاور x_{d-2} و r_2 تعداد فرزندان پشتیبان قوی آن باشد.

با توجه به اینکه x_{d-1} فرزند پشتیبان قوی از رأس x_{d-2} می‌باشد، پس $r_2 \ge 1$. ابتدا فرض کنید x_{d-2} پشتیبان قوی باشد یا به‌عبارتی $r_1 \ge 2$. در این صورت $r_1 + r_2 \ge 3$، $n' = n - 3r_2 - r_1 - 1$، $|S(T_{x_{d-2}})| = r_2 + 1$ و $|L(T_{x_{d-2}})| = 2r_2 + r_1$. قرار دهید:
$B = (B' \cup L(T_{x_{d-2}})) - \{x_{d-3}\}$ و $C = C' \cup S(T_{x_{d-2}})$.

در این صورت $B \subseteq Odd(C)$ و لذا B یک مجموعه احاطه‌گر ضعیف فرد برای درخت T می‌باشد. بنابراین از فرض استقراء نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} k(T) &\ge k(T') + 2r_2 + r_1 - 1 \\ &\ge \frac{n'}{2} + 2r_2 + r_1 - 1 \\ &= \frac{n-3r_2-r_1-1}{2} + 2r_2 + r_1 - 1 \\ &= \frac{n+r_2+r_1-3}{2} \ge \frac{n}{2}. \end{aligned}$$

حال فرض کنید $r_1 = 1$ و z برگ مجاور رأس x_{d-2} باشد. در این صورت $r_1 + r_2 \ge 2$، $n' = n - 3r_2 - 2$، $|S(T_{x_{d-2}})| = r_2 + 1$ و $|L(T_{x_{d-2}})| = 2r_2 + 1$. اگر $x_{d-3} \notin B'$، قرار دهید:
$B = B' \cup L(T_{x_{d-2}})$ و $C = C' \cup S(T_{x_{d-2}})$.

حال فرض کنید $x_{d-3} \in B'$ و همچنین r_2 عددی زوج باشد. در این صورت قرار دهید:
$B = B' \cup (L(T_{x_{d-2}}) - \{z\}) \cup \{x_{d-2}\}$ و
$C = C' \cup (S(T_{x_{d-2}}) - \{x_{d-2}\}) \cup \{z\}$

و در صورتی که $x_{d-3} \in B'$ و r_2 عددی فرد باشد قرار دهید:
$B = B' \cup (L(T_{x_{d-2}}) - \{z\}) \cup \{x_{d-2}\}$ و
$C = C' \cup (S(T_{x_{d-2}}) - \{x_{d-2}\})$
در هر حالت $B \subseteq Odd(C)$ و لذا B یک مجموعه احاطه‌گر ضعیف فرد برای درخت T می‌باشد. بنابراین از فرض استقراء نتیجه می‌شود که

$k(T) \ge k(T') + 2r_2 + 1 \ge \frac{n'}{2} + 2r_2 + 1$
$= \frac{n-3r_2-2}{2} + 2r_2 + 1 = \frac{n+r_2}{2} \ge \frac{n}{2}.$

حال فرض کنید x_{d-2} پشتیبان نباشد یا به عبارتی $r_1 = 0$. در این صورت $n' = n - 3r_2 - 1$، $|S(T_{x_{d-2}})| = r_2$ و $|L(T_{x_{d-2}})| = 2r_2$. قرار دهید:

$B = B' \cup L(T_{x_{d-2}})$ و $C = C' \cup S(T_{x_{d-2}})$

بوضوح $B \subseteq Odd(C)$ و لذا B یک مجموعه احاطه‌گر ضعیف فرد برای درخت T می‌باشد. بنابراین از فرض استقراء نتیجه می‌شود که

$k(T) \ge k(T') + 2r_2 \ge \frac{n'}{2} + 2r_2$
$= \frac{n-3r_2-1}{2} + 2r_2 = \frac{n+r_2-1}{2} \ge \frac{n}{2}.$

حالت 3) $\deg(x_{d-1}) \ge 4$.

ابتدا فرض کنید که $\deg(x_{d-2}) = 2$. قرار می‌دهیم $T' = T - T_{x_{d-2}}$. فرض کنید $\deg(x_{d-1}) = k$. در این‌صورت $n' = n - k - 1$. فرض کنید B' یک مجموعه احاطه‌گر ضعیف فرد برای درخت T' باشد و $B' \subseteq Odd(C')$. قرار دهید: $B = B' \cup L(x_{d-1})$ و $C = C' \cup \{x_{d-1}\}$.

به آسانی می‌توان دید که $B \subseteq Odd(C)$ و لذا B یک مجموعه احاطه‌گر ضعیف فرد برای درخت T می‌باشد. بنابراین از فرض استقراء نتیجه می‌گیریم که

$k(T) \ge k(T') + k - 1 \ge \frac{n'}{2} + k - 1$
$= \frac{n-k-1}{2} + k - 1 = \frac{n+k-3}{2} > \frac{n}{2}.$

حال فرض می‌کنیم که $\deg(x_{d-2}) \ge 3$. قرار دهید $T' = T - T_{x_{d-1}}$. دراین‌صورت $n' = n - k$. فرض کنید B' یک مجموعه احاطه‌گر ضعیف فرد برای درخت T' باشد و $B' \subseteq Odd(C')$. حال قرار دهید:

$B = (B' \cup L(x_{d-1})) - \{x_{d-2}\}$ و $C = C' \cup \{x_{d-1}\}$.

بوضوح $B \subseteq Odd(C)$ و لذا B یک مجموعه احاطه‌گر ضعیف فرد برای درخت T می‌باشد. لذا از فرض استقراء نتیجه می‌شود که

$k(T) \ge k(T') + k - 2 \ge \frac{n'}{2} + k - 2$
$= \frac{n-k}{2} + k - 2 = \frac{n+k-4}{2} \ge \frac{n}{2}.$

بنابراین حکم استقراء درست می‌باشد و لذا اثبات قضیه کامل است. برای شارپ بودن کران یک مسیر 4 راسی را در نظر بگیرید.

در ادامه ما یک کران بالای جدید برای $k(T)$ بر اساس مرتبه و تعداد برگ‌های درخت ارائه می‌دهیم.

قضیه 9: اگر T درختی از مرتبه $n \ge 3$ باشد، آن‌گاه $k(T) \le \frac{3n+l-3}{4}$ و این کران شارپ است.

برهان: برای اثبات قضیه از استقرا روی مرتبه n درخت عمل می‌کنیم. اگر $n = 3$ باشد، آن‌گاه $T = P_3$ و در نتیجه $k(T) = 2 = \frac{3n+l-3}{4}$. بنابراین مرحله آزمون استقراء برقرار است. حال فرض کنید برای هر درخت T' از مرتبه $n' < n$ حکم برقرار باشد، نشان می‌دهیم که حکم برای درخت T از مرتبه n نیز درست می‌باشد. اگر $n \ge 4$ و $diam(T) = 2$ باشد، آن‌گاه $T = K_{1,n}$. در این صورت $k(T) = n - 1 = \frac{3n+l-3}{4}$.

فرض کنید که $diam(T) = 3$ باشد. اگر $n = 4$، آن‌گاه $T = P_4$ و $k(T) = 2 < \frac{3n+l-3}{4}$. حال فرض کنید $n \ge 5$، در این صورت T یک ستاره دوگانه با مرکز u و v می‌باشد. قرار دهید $B = L(T)$ و $C = \{u, v\}$. در این صورت به وضوح $B \subseteq Odd(C)$ و لذا B یک مجموعه احاطه‌گر ضعیف فرد است. بنابراین $k(T) \ge n - 2 < \frac{n}{2}$.

حال فرض کنید $diam(T) \geq 4$. ابتدا فرض کنید که T دارای رأس پشتیبان قوی u باشد. فرض کنید x و y دو برگ مجاور رأس u باشند. قرار دهید $T' = T - x$. در این صورت $n' = n - 1$ و $l' = l - 1$. فرض کنید B یک $k(T)$-مجموعه باشد و $B \subseteq Odd(C)$. اگر $x \in B$ باشد، آن‌گاه به وضوح $B - \{x\} \subseteq Odd(C)$ و لذا $B - \{x\}$ یک مجموعه احاطه‌گر ضعیف فرد برای درخت T' می‌باشد. بنابراین $k(T') \geq k(T) - 1$.

حالا فرض کنید که $x \notin B$ در این صورت بدون از دست دادن کلیت می‌توان فرض کرد که $y \notin B$. اگر $x \notin C$، آن‌گاه B یک مجموعه احاطه‌گر ضعیف برای درخت T' نیز می‌باشد و لذا $k(T') \geq k(T)$. حال فرض کنید که $x \in C$. اگر $y \in C$، قرار دهید $B' = B$ و $C' = C - \{y\}$.

در غیر این صورت قرار دهید $B' = B$ و $C' = C \cup \{y\}$. در این صورت $B' \subseteq Odd(C')$ و لذا در هر حالت B' یک مجموعه احاطه‌گر ضعیف برای درخت T' نیز می‌باشد و لذا $k(T') \geq k(T)$. بنابراین همواره $k(T') \geq k(T) - 1$ و لذا از فرض استقراء نتیجه می‌گیریم که

$$k(T) \leq k(T') + 1 \leq \frac{3(n-1)+(l-1)-3}{4} + 4 = \frac{3n+l-3}{4}.$$

بنابراین در ادامه فرض می‌کنیم که درخت T دارای رأس پشتیبان قوی نیست.

درخت T را در رأس x_0 از مسیر قطری $x_0x_1 \dots x_d$ ریشه‌دار می‌کنیم. در این‌صورت $\deg(x_{d-1}) = 2$. حالت‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت 1) $\deg(x_{d-2}) \geq 3$.

قرار دهید $T' = T - \{x_d, x_{d-1}\}$. در این صورت $n' = n - 2$ و $l' = l - 1$. فرض کنید B یک $k(T)$-مجموعه باشد و $B \subseteq Odd(C)$. اگر $x_{d-1} \in B$ باشد، آن‌گاه به وضوح $x_d \notin B$ و $B - \{x_{d-1}\} \subseteq Odd(C)$ و لذا $B - \{x\}$ یک مجموعه احاطه‌گر ضعیف فرد برای درخت T' می‌باشد. بنابراین $k(T') \geq k(T) - 1$.

حال فرض کنید که $x_{d-1} \notin B$. اگر $x_{d-1} \in C$ باشد، آن‌گاه به وضوح $x_d \in B$. اگر $x_{d-2} \notin B$، آن‌گاه قرار دهید

$B' = B - \{x_d\}$ و $C' = C - \{x_{d-1}\}$.

در این صورت $B' \subseteq Odd(C')$ و لذا B' یک مجموعه احاطه‌گر ضعیف برای درخت T' نیز می‌باشد و لذا $k(T') \geq k(T) - 1$.

حال فرض کنید که $x_{d-2} \in B$. اگر x_{d-2} یک رأس پشتیبان با برگ u باشد، آن‌گاه به وضوح $u \notin B$. در این صورت اگر $u \in C$ باشد، قرار دهید

$B' = B - \{x_d\}$ و $C' = C - \{x_{d-1}, u\}$،

و در غیر این صورت قرار دهید

$B' = B - \{x_d\}$ و $C' = C - \{x_{d-1}\} \cup \{u\}$.

به وضوح در هر دو حالت $B' \subseteq Odd(C')$ و لذا B' یک مجموعه احاطه‌گر ضعیف برای درخت T' نیز می‌باشد و لذا $k(T') \geq k(T) - 1$.

حال فرض کنید که x_{d-2} یک رأس پشتیبان نباشد و دارای فرزند پشتیبان u با برگ v باشد. اگر $u \in C$ باشد، آن‌گاه به وضوح $v \in B$. قرار دهید

$B' = B - \{v, x_d\} \cup \{u\}$ و $C' = C - \{x_{d-1}, u\} \cup \{v\}$،

حال فرض کنید که $u \notin C$. در این صورت قرار دهید

$B' = B - \{u, x_d\} \cup \{v\}$ و $C' = C - \{x_{d-1}, v\} \cup \{u\}$.

به وضوح در هر دو حالت $B' \subseteq Odd(C')$ و لذا B' یک مجموعه احاطه‌گر ضعیف برای درخت T' نیز می‌باشد و لذا $k(T') \geq k(T) - 1$. بنابراین همواره $k(T') \geq k(T) - 1$ و لذا از فرض استقراء نتیجه

می‌شود که
$k(T) \leq k(T') + 1 \leq \frac{3(n-2)+(l-1)-3}{4} + 1 < \frac{3n+l-3}{4}$.

حالت 2) $\deg(x_{d-2}) = 2$.
ابتدا فرض کنید که $\deg(x_{d-3}) \geq 2$. قرار دهید $T' = T - T_{x_{d-2}}$. در این صورت $n' = n - 3$ و $l' = l - 1$. فرض کنید B یک $k(T)$-مجموعه باشد و $B \subseteq Odd(C)$. اگر $x_{d-2} \in B$ باشد، آن‌گاه به وضوح $B \cap \{x_d, x_{d-1}\} \neq \emptyset$. قرار دهید
$B' = B \cap V(T')$ و $C' = C \cap V(T')$.

در این صورت $B' \subseteq Odd(C')$ و لذا B' یک مجموعه احاطه‌گر ضعیف برای درخت T' نیز می‌باشد و لذا $k(T') \geq k(T) - 2$.
حال فرض کنید که $x_{d-2} \notin B$. در این صورت به وضوح $|B \cap \{x_d, x_{d-1}\}| = 1$. قرار دهید.
$B' = B \cap V(T') - \{x_{d-3}\}$و$C' = C \cap V(T')$.

در این صورت $B' \subseteq Odd(C')$ و لذا B' یک مجموعه احاطه‌گر ضعیف برای درخت T' نیز می‌باشد و لذا $k(T') \geq k(T) - 2$.
بنابراین همواره $k(T') \geq k(T) - 2$ و لذا از فرض استقراء نتیجه می‌شود که
$k(T) \leq k(T') + 2 \leq \frac{3(n-3)+(l-1)-3}{4} + 1 < \frac{3n+l-3}{4}$.

حال فرض کنید که $\deg(x_{d-3}) = 2$. اگر $\deg(x_{d-4}) = 1$، آن‌گاه $T = P_5$ و $k(T) = 3 < \frac{3n+l-3}{4}$حال فرض کنید که $\deg(x_{d-4}) \geq 1$. قرار دهید $T' = T - T_{x_{d-2}}$.
در این صورت $n' = n - 3$ و $l' = l$. فرض کنید B یک $k(T)$-مجموعه باشد و $B \subseteq Odd(C)$. اگر $x_{d-2} \in B$ باشد، آن‌گاه به وضوح $B \cap \{x_d, x_{d-1}\} \neq \emptyset$. قرار دهید
$B' = B \cap V(T')$ و $C' = C \cap V(T')$.

در این صورت $B' \subseteq Odd(C')$ و لذا B' یک مجموعه احاطه‌گر ضعیف برای درخت T' نیز می‌باشد و لذا $k(T') \geq k(T) - 2$.
حال فرض کنید که $x_{d-2} \notin B$. در این صورت به وضوح $|B \cap \{x_d, x_{d-1}\}| = 1$. قرار دهید
$B' = B \cap V(T') - \{x_{d-3}\}$و$C' = C \cap V(T')$.

در این صورت $B' \subseteq Odd(C')$ و لذا B' یک مجموعه احاطه‌گر ضعیف برای درخت T' نیز می‌باشد و لذا $k(T') \geq k(T) - 2$. بنابراین همواره $k(T') \geq k(T) - 2$ و لذا از فرض استقراء نتیجه می‌شود که
$k(T) \leq k(T') + 2 \leq \frac{3(n-3)+l-3}{4} + 2 < \frac{3n+l-3}{4}$.

بنابراین حکم استقراء درست می‌باشد و لذا اثبات قضیه کامل است. برای شارپ بودن کران یک مسیر 3 راسی را در نظر بگیرید. □

فهرست منابع

[1] T. W. H. S. &. S. P. J. Haynes, *Fundamentals of domination in graphs*, New York: Marcel Dekker. Inc, 1998.

[2] J. A. Telle, "Complexity of domination-type problems in graphs," *Nord. J. Comput,* vol. 1(1), pp. 157-171, 1994.

[3] S. J. J. M. M. &. P. S. Gravier, "On weak odd domination and graph-based quantum secret sharing," *Theoretical Computer Science,* vol. 598, pp. 129-137, 2015.

[4]]. D. Gottesman, "Theory of quantum secret sharing," *Phys. Rev. A,* vol. 61, p. 042311, 2000.

[5] D. &. S. B. C. Markham, "Graph states for quantum secret sharing," *Physical Review A,* vol. 78(4), p. 042309, 2008.

[6] D. M. M. S. E. Kashefi, "Information Flow in Secret Sharing Protocols," *DCM 2009: Elec. Proc. Theor. Comp. Sci. ,* Vols. 9, 87, 2009.

[7] D. C. a. S. Perdrix, "Parametrized Complexity of Weak Odd Domination Problems," *In 19th International Symposium on Fundamentals of Computation Theory (FCT'13), LNCS. Springer*, vol. 8070, p. 107–120, 2013.