دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هفتم، شماره بیست و نهم، فروردین و اردیبهشت ۱۴۰۰
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

نرخ‌گذاری بیمه به‌منظور افزایش سرمایه بیمه‌گر با استفاده از نظریه کنترل بهینه

محمود محمودی[1*]، سارا دادرس[2]

[۱و۲] گروه ریاضی کاربردی (کنترل بهینه، بهینه سازی)، دانشکده علوم پایه، دانشگاه قم، قم، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۸/۰۷/۱۴ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۱۱/۰۲

چکیده

تعیین حقِ بیمه مناسب در شرکت‌های بیمه‌ای به منظور افزایش درآمد اهمیت زیادی دارد. هدف از ارائه این مقاله تعیین حقِ بیمه به‌منظور افزایش سرمایه شرکت‌های بیمه با استفاده از نظریه کنترل بهینه و مبتنی بر انتخاب ریسک مناسب می‌باشد. تعیین حقِ بیمه مناسب با توجه به میانگین حقِ بیمه متوسط بازار و مقدار خسارت پرداختی می‌تواند منجر به افزایش سرمایه شرکت بیمه شود. ابتدا یک مدل دینامیکی تصادفی مناسب برای توصیف دریافت حقِ بیمه و پرداخت خسارت بیان شده‌است. سپس متغیر حقِ بیمه به‌عنوان متغیر کنترل مسأله معرفی و در مرحله بعد یک تابع هدف مناسب برای متغیرکنترلی و متغیرهای حالت به‌منظور افزایش سرمایه و متناسب بودن حقِ بیمه نسبت به متوسط حقِ بیمه بازار تعریف شده است. در ادامه، یکی از متغیرهای اصلی مسأله را به‌کمک روش‌های آماری تخمین زده و مسأله کنترل بهینه قطعی حاصل را با استفاده از روش پونتریاگین حل و در پایان دو مثال عددی ارائه شده‌است.

واژه‌های کلیدی: اندوخته، حقِ بیمه، ریسک، سیستم‌های دینامیکی، کنترل‌بهینه.

*. عهده‌دار مکاتبات:
Email: m.mahmoudi@qom.ac.ir

۱. مقدمه

سرمایه‌گذاری یکی از متغیرهای عمده اقتصادی می‌باشد و برای ایجاد و تداوم رشد و توسعه اقتصادی و تشکیل سرمایه در هر کشوری به‌ویژه کشورهای در حال توسعه از اهمیت خاصی برخوردار است و همواره مورد توجه اقتصاددانان و برنامه‌ریزان اقتصادی بوده است. لذا مدل قیمت‌گذاری دارایی سرمایه‌ای یکی از مدل‌های با اهمیت است[۳]. از طرفی بیمه و اقتصاد، لازم و ملزوم یکدیگر در مناسبات اقتصادی و اجتماعی جامعه هستند. زیرا از یک طرف رفاه اقتصادی و توان مناسب خرید جامعه موجب توجه و روی‌آوری مردم برای تهیه پوشش‌های مناسب بیمه‌ای و افزایش سهم بیمه در سبد هزینه خانواده‌ها است و از طرفی وجود بیمه باعث بهبود وضعیت اقتصادی جامعه می‌گردد. تحقیقات زیادی بر روی عوامل شرکتی و ساختارهای خُرد بازار سرمایه و عوامل کلان اقتصادی تاثیرگذار بر متغیرهای عملکردی شرکت‌ها انجام شده است. بازارهای مالی با تجهیز و هدایت پس‌انداز خانوارها به سمت فعالیت‌های سرمایه‌گذاری، می‌توانند موجبات افزایش سرمایه‌گذاری و رشد اقتصادی را فراهم آورند[۱۶]. از این‌رو توسعه مناسب این بازارها می‌تواند زمینه‌ساز رشد بیشتر شود که شرکت بیمه نیز به‌عنوان یک بنگاه اقتصادی در این زمینه فعالیت می‌کند[۱۳]. افزایش سرمایه در شرکت‌های بیمه تأثیر زیادی در اقتصاد کشور داشته که این افزایش سرمایه از راه‌های مختلفی مانند افزایش پرتفو، افزایش ذخیره و... می‌تواند صورت پذیرد. یکی از راه‌های مهم افزایش پرتفو در شرکت‌های بیمه افزایش فروش معقولانه است و از آنجا که همه شاخه‌های بیمه رقابتی هستند، بنابراین یکی از عوامل حائز اهمیت برای مشتریان در تعیین نوع شرکت بیمه و یا تغییر آن در دوره‌های بعدی که منجر به افزایش پرتفو در شرکت‌های بیمه می‌شود، بحث نرخ‌گذاری است. به‌طوری‌که تعیین نرخ مناسب، افزایش تقاضا و درنتیجه فروش معقولانه بیشتر را به‌دنبال خواهد داشت[۷]. در علم اکچوئری نرخ‌گذاری بیمه یک اصل کلی است[۱۲] و همچنین حقِ بیمه تعیین شده از طرف شرکت‌های بیمه ارتباط مستقیم با میزان خسارت وارده دارد. بیمه‌گر حقِ بیمه را به‌منظور پوشش هزینه‌ها و بالا بردن سود خود دریافت می‌کند. پابلو و همکارانش در مقاله‌ای با استفاده از یک مدل کنترل بهینه تصادفی دو بعدی، به حداکثرسازی سهم سود سهامدار پرداخته است[۹]. در مقاله امز وهابرمن[۵]حقِ بیمه با استفاده از تئوری کنترلِ بهینه محاسبه شده‌است که علاوه بر محاسبه حقِ بیمه، سرمایه نهایی شرکت بیمه نیز بر روی قانون تقاضا، ماکزیمم خواهد شد و همچنین تیلور[۱۴] در سال ۱۹۸۶ اولین کسی بود که تأثیر نرخ‌گذاری بیمه در رقابت بین شرکت‌های بیمه را بررسی کرد. او تغییرات شدیدی، وابسته به حقِ بیمه‌های تعیین شده توسط بیمه‌گرها در بازارهای بیمه استرالیا مشاهده کرد. همچنین ساختار مدل تیلور بر مبنای یک مدل تقاضای گسسته بوده که درآن قیمت متوسط بازار به‌طور کامل ارزیابی شده است. در مقاله امز و هابرمن به‌طور کامل در خصوص این موضوع بحث شده‌است. یکی از خصوصیات مدل‌های نرخ‌گذاری نامحدود این است که بهینه می‌تواند حقِ بیمه منفی را به خود بگیرد این موضوع در ابتدا نشان‌دهنده استراتژی قیمت‌گذاری نسبتا کم در بازار برای تولید فروش است و در صورتی‌که تأثیری روی خسارت نداشته باشد، اعتبار شرکت بیمه را افزایش می‌دهد. با استفاده از این افزایش اعتبار، شرکت بیمه می‌تواند تا وقتی که هم فروش دارد و هم سود، نرخ بالاتری را انتخاب کند. در تمامی مقالات، برای مقایسه بیمه‌نامه‌ها فرض بر این است که در یک شرکت بیمه، حقِ بیمه بهینه وجود دارد و قیمت تحت تأثیر حقِ بیمه‌های شارژ شده توسط سایر بیمه‌گران در بازار نیست. این موضوع به نظر می‌رسد یک فرض مناسب برای یک شرکت بیمه کوچک در یک بازار بزرگ است. درچنین بازاری، مدل‌های قیمت‌گذاری رقابتی موجود برای بیمه‌نامه‌های عمومی قابل اجرا نیست و باید بررسی شود که واکنش بیمه‌گر به نرخ‌های بیمه‌گران دیگر، چطور می‌باشد[۶]. این مقاله به صورت زیر، سازماندهی شده است. در بخش دوم، بدنبال مدل امز و تیلور، معادلات دینامیکی مسأله ارائه می‌گردد. در بخش سوم، براساس مدل ارائه شده، مساله اصلی تبیین می‌شود. بخش چهارم، با تخمین نرخ اندازه خسارت با استفاده از داده‌های آماری به‌دست آمده از یک شرکت بیمه در ایران

در شاخه بیمه‌ی شخص ثالث، مدل قطعی شده است. در بخش پنجم، با استفاده از تعریف دو مدل تابع تقاضا، به حلِ عددی مسأله پرداخته و در نهایت نتیجه‌گیری ارائه خواهد شد.

۲. بیان مدل دینامیکی

در این بخش، بر مبنای کار اخیر تیلور[۱۴] و امز[۶]، تمام قیمت‌ها و خسارات با توجه به میزان در معرض خطر قرار گرفتن[1] آنها مشخص شده است. که در اینجا در معرض خطر قرار گرفتن برای بیمه‌گر، واحدی از ریسک است و متناسب با نوع بیمه‌ی مورد نظر تغییر می‌کند.

- بیمه‌گذاران حقِ بیمه $u(t)$ را پرداخت می‌کنند.
- $t\geq0$ ، $u(t)$ واحدی از در معرض خطر قرارگرفتن، بعنوان حق‌بیمه (u) در زمان t برای بیمه‌نامه با طول مدت l در نظرگرفته شده است.
- $x_1(t)$، که واحدی از در معرض خطر قرارگرفتن است، به‌عنوان حقِ بیمه متوسط بازار برای همان بیمه‌نامه در همان دوره در نظر گرفته شده است.
- $x_2(t)$، نیز بیانگر میزان در معرض خطر قرارگرفتن است.
- G را به‌عنوان تابع تقاضا در نظر گرفته که با حقِ بیمه مرتبط است.
- ذخیره حق‌بیمه با $x_3(t)$ نشان داده شده‌است. بیانگر توانایی فعلی شرکت بیمه‌گر است که با فروش بیمه‌نامه افزایش و با پرداخت خسارت کاهش می‌یابد.
- $x_4(t)$، نیز نرخ اندازه خسارت بوده که واحدی از در معرض خطر قرار گرفتن می‌باشد.

حقِ بیمه بهینه به حقِ بیمه‌ی متوسط بازار وابسته می‌باشد اگر بیمه‌گر حقِ بیمه پایین‌تر از حقِ بیمه‌ی متوسط بازار تعیین کند، با فروش بیشتر در معرض خطر قابل توجهی قرار می‌گیرد. در این‌صورت بازار واکنش نشان می‌دهد. بنابراین تغییرات در قیمت متوسط بازار را به دو قسمت خسارات و واکنش بازار به حقِ بیمه‌ی بهینه و حقِ بیمه‌ی متوسط بازار تقسیم شده است.

[1] Exposure

محدودیت مربوط به تغییرات نرخ متوسط بازار به شرح ذیل می‌باشد:

$$dx_1(t)=\gamma^{-1}dx_4(t)+\lambda(u(t)-x_1(t))dt \qquad (۱)$$

اگر بازار فاقد واکنش باشد، در این‌صورت اصل ارزش مورد انتظار را پذیرفته و فرض می‌کنیم که حقِ بیمه متوسط بازار برابر است با ($x_1(t)=\gamma^{-1}x_4(t)$). که γ ثابت و نشان‌دهنده یک ضریب ثابت از خسارات است و همچنین در این مدل تغییر در حقِ بیمه متوسط بازار که منجر به واکنش بازار خواهد شد. از جمع رابطه فوق با $\lambda(u(t)-x_1(t))dt$ بدست می‌آید. $\lambda \geq 0$ و یک ثابت نرخ واکنش بازار به قیمت بهینه بیمه‌نامه است.
محدودیت مربوط به تغییرات در معرض خطر قرار گرفتن پوشش بیمه‌ای در بازه زمانی dt به‌صورت زیر فرض شده است:

$$dx_2(t)=x_2(t)(G-k)dt \qquad (۲)$$

فرض می‌کنیم که بیمه‌گذار حقِ بیمه $u(t)$ را در زمان t و در بازه‌ای به طول بیمه‌نامه ($l=k^{-1}$) پرداخت کند و اگر بیمه‌گذار بیمه‌نامه خود را تجدید کند، یک مشتری جدید محسوب می‌گردد. به‌دنبال در معرض خطر قرارگرفتن مدل امز[۴]، تغییرات در معرض خطر قرار گرفتن به در معرض خطر قرارگرفتن فعلی ($x_2(t)$) بستگی دارد و فرض می‌کنیم که شرکت‌های بیمه‌ای بزرگ نسبت به شرکت‌های بیمه‌ای کوچک تمایل بیشتری برای پذیرش ریسک‌های بزرگ با حقِ بیمه‌های متناسب دارند، به این دلیل که بیمه‌گران قوی با توجه به توانگری مالی بالا، احتمال شکست کمتری را دارند. در نتیجه افزایش ریسک یا در معرض خطر قرار گرفتن ($x_2(t)$) تناسب خطی با ضرب تابع تقاضا در متغیر در معرض خطر قرار گرفتن فعلی دارد و کاهش آن از ضرب در معرض خطر قرارگرفتن در k می‌باشد. افزایش در میزان اندوخته $x_3(t)$ با فروش بیمه‌نامه در زمان t افزایش می‌یابد که به‌دنبال آن افزایش در معرض خطر قرار گرفتن در حقِ بیمه‌های جاری و تابع تقاضا G را نیز دارد ($x_2(t)\times G\times u(t)\times dt$)، که این افزایش ناشی از تجدید بیمه‌نامه‌های قبلی و بیمه‌نامه جدید است. از

طرفی کاهش اندوخته نیز ناشی از پرداخت خسارات در بازه زمانی dt، $x_4(t)\times x_2(t)\times dt$ می‌باشد که $x_4(t)$ نرخ اندازه خسارت است، بنابراین با توجه به توضیحات فوق تغییرات اندوخته بیمه‌گر به شرح ذیل می‌باشد:

$$dx_3(t)=-\alpha x_3(t)dt+x_2(t)(Gu(t)-x_4(t))dt \tag{۳}$$

که α در آن ثابت و تعیین‌کننده سرمایه از دست رفته از بابت بازگشت به سهامداران می‌باشد در اینجا $x_4(t)$ متغیر نرخ اندازه خسارت است و با توجه به این‌که ارتباط مستقیم با نرخ اندازه خسارت و ذخیره فعلی دارد، لذا آخرین محدودیت مدل به شرح زیر می‌باشد:

$$dx_4(t)=x_4(t)(\mu dt+\sigma dw(t)) \tag{۴}$$

که μ وσ ثابت و w حرکت براونی[1] می‌باشد. بنابراین مختصات بردار حالت این مدل به صورت زیر است:

$$x(t)=(x_1(t),x_2(t),x_3(t),x_4(t))$$

۳. تشریح مسأله مدل کنترل بهینه

یکی از مواردی که در افزایش سرمایه در شرکت‌های بیمه در ایران بسیار مؤثر است، افزایش فروش و در واقع رشد پرتفوی شرکت بیمه می‌باشد که در مدل ارائه شده با نزدیک کردن حقِ بیمه تعیین شده به حقِ بیمه متوسط بازار، با توجه به این‌که مشتریان در این‌صورت تمایل بیشتری به خرید با این نوع نرخ‌گذاری دارند سعی در افزایش فروش داریم. اگر حق‌بیمه تعیین شده از حقِ بیمه متوسط بازار خیلی بیشتر باشد، مشتریان تمایلی به خرید بیمه‌نامه با این نرخ ندارند و طبق قانون تقاضا[۱۳] فروش به‌شدت کاهش می‌یابد و اگر حقِ بیمه تعیین شده از حقِ بیمه متوسط بازار خیلی کمتر باشد در این‌صورت منجر به افزایش غیرمعقول تقاضا شده و ممکن است با انتخاب ریسک نامناسب، تعداد خسارات بی‌رویه بالا رفته و منجر به ورشکستگی بیمه‌گر گردد، هرچند در کشور ایران شاهد انتخاب این قبیل ریسک‌ها که از طریق کاهش نامناسب قیمت بوده و منجر به ضرر و زیان شرکت بیمه شده‌است، بوده‌ایم. لذا در این مدل سعی شده است با نرخ‌گذاری نزدیک به نرخ متوسط بازار و افزایش معقول تقاضا مطابق با محدودیت‌های مدل به افزایش سرمایه دست یابیم.

اگر چه اندوخته نشان‌دهنده شرایط مالی شرکت بیمه است اما توان پرداخت یا دارایی شرکت بیمه را تشریح نمی‌کند، معمولا از طرف دولت حداقلی برای اندوخته شرکت بیمه در نظر گرفته می‌شود به‌طوری‌که اگر خسارتی در آینده به شرکت بیمه تحمیل گردد امکان جبران آن فراهم آید که این مسأله در مدل ارائه شده قابل تمرکز نمی‌باشد. در این مدل اندوخته مورد انتظار در پایان دوره برنامه‌ریزی که مقداری ثابت و از پیش تعیین شده می‌باشد را با x_d نمایش می‌دهیم و یکی از اهداف مسأله نزدیک کردن $x_3(t_f)$ به x_d است.

با توجه به موارد فوق مسأله را در حالت کلی در قالب مدل زیر بیان می‌کنیم:

$$\min J[x,u]=(\beta_1\left(\|x_1(t)-u(t)\|_{L1}\right)+\beta_2\left(\|x_d-x_3(t_f)\|_{L1}\right)$$

$$\text{s.t} \tag{۵}$$

$$dx_1(t)=\gamma^{-1}dx_4(t)+\lambda(u(t)-x_1(t))dt$$
$$dx_2(t)=x_2(t)(G-k)dt$$
$$dx_3(t)=-\alpha x_3(t)dt+x_2(t)(Gu(t)-x_4(t))dt$$
$$dx_4(t)=x_4(t)(\mu dt+\sigma dW(t)).$$

که وضعیت فعلی بیمه‌گر بصورت $x=(x_1(t),x_2(t),x_3(t),x_4(t))^T$ می‌باشد.

۴. تبدیل مدل تصادفی به قطعی

از آنجا که مدل به‌دست آمده در بخش قبلی یک مدل کنترل بهینه تصادفی می‌باشد، در این بخش، ابتدا بر اساس یک برآورد آماری از داده‌های یک شرکت بیمه در بیمه خودرو با تخمین پارامتر تصادفی مدل، مسأله ارائه شده از حالت تصادفی به قطعی تبدیل شده است. به‌عبارتی دیگر، با استفاده از داده‌های آماری یک شرکت بیمه در ایران به محاسبه نرخ اندازه خسارت $x_4(t)$ پرداخته تا مدل از حالت تصادفی به قطعی تبدیل و در مرحله بعد مدل قطعی به‌دست آمده حل شده‌است. بدین منظور خسارات وارده در ۴ سال متوالی۱۳۹۳، ۱۳۹۲، ۱۳۹۱و ۱۳۹۴ از بابت بیمه‌نامه شخص ثالث (مطابق

[1] Brownian motion

جدول۱) در یک شرکت بیمه را تهیه نموده و تابع توزیع نرخ اندازه خسارت آن در طی این سال‌ها محاسبه شده است. با بررسی داده‌های به دست آمده، نتیجه‌ی حاصله، آن است که داده‌های آماری فوق از توزیع نمایی با تابع توزیع $x_4(t)=1-e^{-0.1375t}$ پیروی می‌کنند. برازش نیکویی مدل نمایی به داده‌های موجود، از آماره کلوموگروف–اسمینوف استفاده شده است. مقدار عددی این آماره برابر ۱،۰۱۸ با سطح معنی‌داری ۰،۴۶۳ به‌دست آمده و نشان‌دهنده آن است که داده‌های موجود در سطح معنی‌داری ۰،۰۵ از توزیع نمایی فوق‌الذکر پیروی می‌کنند. لذا با فرض آن‌که به‌عنوان $x_4(t)$ در مسأله شماره (۵) جایگذاری شود، مدل زیر بدست می‌آید.

$$\min J[x,u]=(\beta_1\left(\left\|x_1(t)-u(t)\right\|_{L1}\right)+\beta_2\left(\left\|x_d-x_3(t_f)\right\|_{L1}\right)$$

s.t (۶)

$$\dot{x}_1(t)=\gamma^{-1}(0.1375\, e^{-0.1375t})+\lambda(u(t)-x_1(t))$$
$$\dot{x}_2(t)=x_2(t)(G-k)$$
$$\dot{x}_3(t)=-\alpha x_3(t)+x_2(t)(Gu(t)+e^{-0.1375t}-1).$$

همان‌طور که در بخش‌های قبلی نیز ذکر شده، در مدل فوق G تابع تقاضا بوده است. مقدار تولید محصول توسط تولیدکننده و مقدار تقاضا توسط مصرف‌کننده، وابسته به قیمت محصول در بازار است. مطابق قانون عرضه، در صورت ثابت بودن سایر شرایط، مقدار عرضه وابسته به قیمت است و در قیمت بالاتر عرضه بیشتر و در قیمت پایین‌تر عرضه کمتر خواهد بود. با توجه به قانون تقاضا نیز با ثابت بودن سایر عوامل در قیمت‌های بالا، تقاضا کمتر و در قیمت‌های پایین تقاضا بیشتر خواهد بود[۲].

جدول ۱: نرخ اندازه خسارت در بیمه‌نامه شخص ثالث

خسارت بیمه خودرو	ماه	سال	خسارت بیمه خودرو	ماه	سال
۳۹۳۳	۵	۱۳۹۳	۶۶۴۰	۱	۱۳۹۱
۴۴۹۳	۶		۶۹۱۱	۲	
۴۱۵۴	۷		۷۱۰۶	۳	
۳۸۶۰	۸		۷۵۰۳	۴	
۴۱۸۷	۹		۴۱۴۸	۱	۱۳۹۲
۴۳۶۷	۱۰		۴۸۶۵	۲	
۴۱۷۳	۱۱		۴۴۴۲	۳	
۳۸۶۶	۱۲		۴۸۴۳	۴	
۳۱۱۳	۱	۱۳۹۴	۴۴۵۲	۵	
۳۴۳۷	۲		۴۴۳۹	۶	
۳۳۲۳	۳		۴۱۹۰	۷	
۳۲۷۸	۴		۳۵۶۰	۸	
۳۶۵۵	۵		۳۵۳۱	۹	
۳۶۲۰	۶		۳۴۴۴	۱۰	
۳۴۱۴	۷		۳۵۸۰	۱۱	
۳۴۱۰	۸		۳۲۸۴	۱۲	
۳۸۸۲	۹		۳۱۵۱	۱	۱۳۹۳
۳۸۷۷	۱۰		۳۳۹۳	۲	
۳۹۶۳	۱۱		۳۴۳۱	۳	
۳۹۶۳	۱۲		۳۷۳۷	۴	

در یک بازار رقابتی، قیمت و مقدار تعادلی کالا، با توجه به عرضه و تقاضای بازار برای آن کالا تعیین می‌شود. قیمت تعادلی یک کالا دقیقاً برابر با قیمتی است که مصرف‌کنندگان تمایل بیشتری برای خرید کالا در یک دوره زمانی خاص دارند و مقدار تعادلی آن کالا نیز برابر با مقداری است که تولیدکنندگان آن کالا حاضرند عرضه کنند. در قیمت‌های بالاتر کمبود تقاضا اتفاق افتاده و باعث مازاد عرضه می‌شود. این اضافه عرضه به قیمت فشار آورده و باعث بازگشت دوباره قیمت به سطح تعادلی آن می‌شود. در قیمت‌های پایین‌تر نیز، مقدار تقاضا از مقدار عرضه بیشتر شده و باعث مازاد تقاضا می‌شود. این مازاد تقاضا باعث افزایش قیمت و در نتیجه بازگشت قیمت به اندازه قبل خود (قیمت تعادلی) می‌شود. پس از این‌که قیمت به تعادل رسید، این قیمت میل به استمرار و باقی‌ماندن دارد. در بازار بیمه نیز در حالت کلی طبق قانون تقاضا رابطه قیمت و مقدار تقاضا، معمولاً رابطه‌ای معکوس می‌باشد. به عبارت دیگر شیب منحنی تقاضا، منفی است که به قانون منفی بودن شیب منحنی تقاضا معروف است. همچنین در بخش قبل دیدیم که حقِ بیمه تعیین شده با قانون تقاضا نسبت عکس دارد. به‌عبارتی دیگر، تمایل مردم به خرید بیمه‌نامه با حقِ بیمه کمتر، بیشتر است. که در بخش بعدی به این موضوع بیشتر خواهیم پرداخت. مدل‌های رقابتی برای قیمت‌گذاری بیمه‌نامه‌های عمومی از یک تابع تقاضا استفاده می‌کنند که رابطه بین حقِ بیمه‌ی بیمه‌گر با تقاضا را تعیین می‌کند. از آنجا که مشتریان اغلب تمایل به خرید بیمه‌نامه با قیمتی نزدیک به حقِ بیمه متوسط بازار را دارند. لذا طبق قانون تقاضا اگر بیمه‌گر حقِ بیمه‌ی پایین‌تر از حقِ بیمه‌ی متوسط بازار تعیین کند، فروش بیشتری نیز خواهند داشت و واضح است که اگر کل بازار، حقِ بیمه بالا را تعیین کنند، با توجه به قانون تقاضا، فروش قابل توجهی برای یک شرکت بیمه بهینه فراهم می‌کند. در واقع طبیعی است که مشتریان حقِ بیمه‌ی بالاتر از ارزش کالای مورد بیمه را پرداخت نخواهند کرد. در مسأله ارائه شده β_1 و β_2 ثابت بوده و بر اساس درجه اهمیت هر کدام از قسمتهای تابع هدف برای شرکت بیمه، تعیین می‌گردد.

۵. حل مدل

مدل ارائه شده در بخش ۳ با استفاده از قضیه اصل کمینه‌سازی پونتریاگین[1] (PMP) [۸] و بر اساس الگوریتمی[۱۵] که در ذیل تشریح شده در نرم‌افزار مطلب حل که نتایج آن در مراحل بعدی تشریح شده است. با درنظر گرفتن شرایط بهینگی قضیه پونتریاگین الگوریتم مورد استفاده بشرح ذیل می‌باشد:

۱- بازه $[t_0,t_f]$ را به N زیربازه تقسیم و $u^0(t)=u^0(t_k)$ ،$t\in[t_k,t_{k+1}]$ ،$k=0,1,\dots,N-1$، در نظر بگیرید.

۲- استفاده از کنترل u^i فرض شده برای رسیدن به معادله حالت از t_0 تا t_f با شرایط اولیه $x(t_.)=x_.$ و ذخیره مسیر حالت x^i .

۳- استفاده از u^i و x^i به جهت رسیدن به معادلات co-stateها در بازه $[t_0,t_f]$. مقدار اولیه $p^i(t_f)$ از معادله زیر بدست می‌آید:

$$p^i(t_f)=\frac{\partial H}{\partial X}\left(X^i(t_f)\right) \tag{۷}$$

محاسبه $\frac{\partial H^i(t)}{\partial u}, t\in\left[t_0,t_f\right]$ و بردار بدست آمده را ذخیره و به مرحله ۴ بروید.

۴- اگر

$$\left\|\frac{\partial H^i}{\partial u}\right\|\leq\gamma \tag{۸}$$

$$\left\|\frac{\partial H^i}{\partial u}\right\|^2=\int_{t_0}^{t_f}\left[\left\|\frac{\partial H^i}{\partial u}\right\|\right]^T\left[\left\|\frac{\partial H^i}{\partial u}\right\|\right]dt \tag{۹}$$

نگاه تکرار را متوقف کنید. مقادیر x_iها به ازای $i=1,2,3$ در شکل(۱) نمایش داده شده است (γ در اینجا یک مقدار ثابت کوچک مثبت می‌باشد). در غیر این صورت تابع کنترل را از معادله زیر بدست بیاورید:

$$u^{i+1}(t_k)=u^i(t_k)-\tau\frac{\partial H^i}{\partial u}(t_k),\ k=0,1,\dots,N-1$$

u^i را با u^{i+1} جایگزین کنید و به گام ۲ بروید (τ در اینجا سایز گام است).

[1] Pontryagin

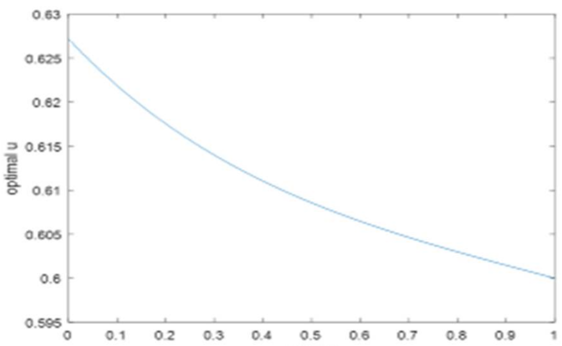
- H تابع همیلتونین می باشد.
- $u(t)$ متغیر کنترل است.
- x_i ها معادلات حالات سیستم هستند.
- p_i ها را بعنوان ضرایب لاگرانژ و *co-state*های سیستم در نظر می‌گیریم.

برای حل مدل و پیاده‌سازی الگوریتم فوق تابع G را در دو حالت مختلف زیر در نظر گرفته و با جایگذاری در مدل (۶) و درنظر گرفتن داده‌ها مطابق جدول (۲) مسأله ارائه شده حل شده است.

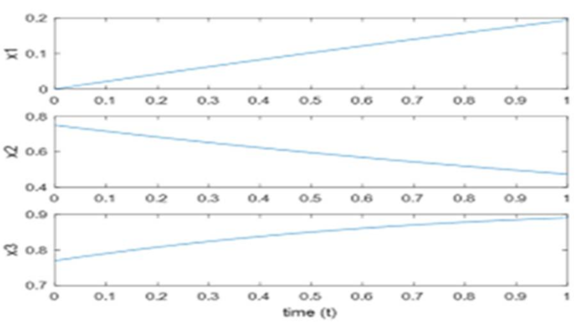
حالت۱: با در نظر گرفتن تابع تقاضا $G=\frac{1}{e^{au(t)}}$ و شرایط اولیه $x(0)=(0,0.7,0.78)$ و ذخیره مورد انتظار و به‌دنبال آن منحنی کنترل و معادلات حالات مطابق شکل (۱) و شکل (۲) خواهند بود.

جدول ۲: داده‌های ثابت مساله

Tافق برنامه‌ریزی	1 yr
αاستهلاک سرمایه	0.05 p.a.
a پارامتر تقاضا	1
b پارامتر تقاضا	1
$l=k^{-1}$ طول بیمه نامه	1 yr
λ نرخ کاهش بازار	0.1 p.a.
γ ضریب ثابت خسارت	0.9 p.a.



شکل ۱. منحنی تغییرات کنترل



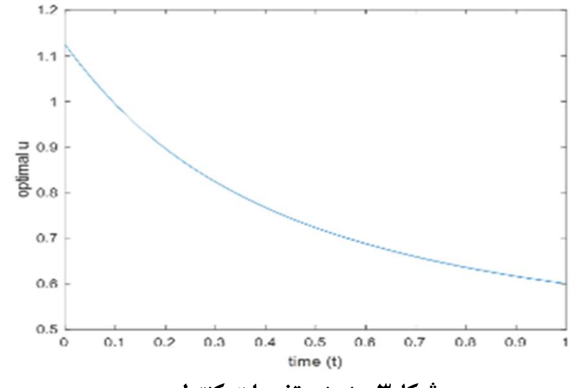
شکل ۲. منحنی نمودار حالات سیستم

شکل (۲) نمایانگر معادلات حالات سیستم می‌باشند. به‌طوریکه x_1 بیانگر تغییرات نرخ متوسط بازار، x_2 تغییرات در معرض خطر قرارگرفتن و نمودار سوم بیانگر تغییرات ذخیره حق‌بیمه x_3 می‌باشد که مطابق تابع هدف مقدار آن در پایان دوره برنامه‌ریزی با ذخیره مورد انتظار $x_d=0.9$ کاملا مماس شده است و همان‌طور که ملاحظه می‌فرمایند نمودار ریسک مسأله ارائه شده در طول مدت برنامه‌ریزی همواره نزولی می‌باشد که نشان‌دهنده انتخاب مناسب ریسک است.

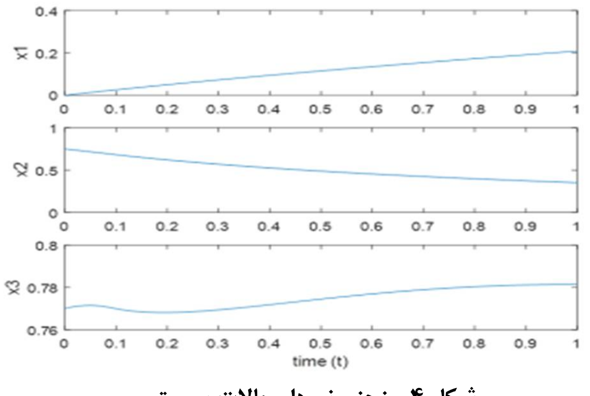
حالت II: با در نظر گرفتن تابع تقاضا به صورت $G(t)=a-bu(t)$ و شرایط اولیه $x(0)=\left(0,0.75,0.77\right)$ و $x_d=0.79$ مقدار بهینه تابع هدف برابر $J=0.269$ و منحنی کنترل و معادلات حالات مطابق شکل (۳) و (۴) خواهند بود.

در شکل (۴) نیز تغییرات معادلات حالات نمایانگر این موضوع است که در اینجا نیز ذخیره حق‌بیمه x_3 در پایان دوره برنامه‌ریزی به ذخیره مورد انتظار $x_d=0.79$ نزدیک شده و اهداف تابع هدف برآورده شده است.

شکل (۲) و (۴) نمایانگر نتایج خوبی از مدل طراحی شده می‌باشند، از جمله این‌که حقِ بیمه تعیین شده در انتهای دوره به حقِ بیمه متوسط بازار تا حد امکان نزدیک شده است. از آنجا که تمایل مشتریان به خرید بیمه‌نامه با نرخ نزدیک به قیمت متوسط بازار می‌باشد لذا در مدل طراحی شده تقاضا تا حد معقولی بالا خواهد رفت. از طرفی مسأله مهم دیگر که در هر دو حالت مدل به چشم می‌خورد، کاهشی بودن منحنی ریسک است که نشان‌دهنده انتخاب مناسب ریسک در مدل ارائه شده‌است.



شکل۳. منحنی تغییرات کنترل



شکل ۴. منحنی نمودار حالات سیستم

۶. نتیجه‌گیری

از آنجا که در کلیه مدل‌های ریاضیات مالی ارائه شده، چه کنترلی و یا برنامه‌ریزی خطی و غیرخطی مستقیما خود سرمایه ماکزیمم شده است لذا در این مقاله سعی شده تا با ارائه مدلی کنترلی با استفاده از روشی غیرمستقیم سرمایه افزایش داده شود و مستقیما از خود پارامتر سرمایه استفاده نشده است. همچنین نکته مورد توجه دیگر این مقاله این است که در کلیه مدل‌های کنترلی ریاضیات مالی تنها از روش بلمن جهت حل مسأله کنترل بهینه تصادفی استفاده شده‌است ولی در این مقاله ابتدا مدل قطعی و سپس با استفاده از قضیه پونتریاگین مسأله مورد نظر حل شده است.

در واقع در این مقاله با استفاده از یک مدل کنترلِ بهینه تصادفی با تعیین حقِ بیمه مناسب به‌طوری‌که نرخ تعیین شده به نرخ متوسط بازار نزدیک باشد، به افزایش فروش معقول، نه بی‌رویه و در نتیجه افزایش سرمایه یک شرکت بیمه پرداخته‌ایم. در انتها با معرفی ۲ مدل تابع تقاضا که هر دو نسبت عکس با نرخ حقِ بیمه داشت، نتایج مطلوبی بدست آمده‌است. به‌طوری‌که مقدار تابع هدف به حداقل مقدار خود رسید و حقِ بیمه بدست آمده در طول مدت برنامه‌ریزی در هر دو حالت به حقِ بیمه متوسط بازار همگرا شد. همچنین همان‌طور که در بخش قبلی ملاحظه شد، در مدل ارائه شده با انتخاب ریسک مناسب که منحنی آن نرخ نزولی دارد به سرمایه‌ی صعودی رسیدیم، یعنی در مدل ارائه شده توانستیم همواره به کاهش نرخ ریسک و افزایش سرمایه دست یابیم.

فهرست مراجع

[1] Agida, M., Kumar, A.S., 2010. A Boubaker polynomials expansion scheme solution to randomLove's equation in the case of a rational kernel. Electronic Journal of Theoretical Physics 24, 319–326.

[2] Clarke, D.J., 2016. A theory of rational demand for index insurance. American Economic Journal 8(1), 283–306.

[3] Delong, L., 2019. Optimal investment for insurance company with exponential utility and wealth-dependent risk aversion coefficient. Mathematical Methods of Operations Research 89, 73–113.

[4] Emms, P., Haberman, S., 2005. Pricing general insurance using optimal control theory. Astin Bulletin 35, 427–453.

[5] Emms, P., Haberman, S., 2009. Optimal management of an insurer's exposure in a competitive general insurance market. North American Actuarial Journal 13, 77–105.

[6] Emms, P., 2011. Pricing general insurance in a reactive and competitive market. Journal of Computational and Applied Mathematics 236, 1314–1332.

[7] Mahmoudi, M., Dadras, S., 2018. Pricing insurance in order to minimizing the expected loss in wealth via optimal control. Journal of National Academy of Managerial Staff of Culture and Arts Herald, 238–243.

[8] Mao, H., Carson, J., Ostaszewski, K., and Wen, Z., 2013. Optimal Decision on Dynamic Insurance Price and Investment Portfolio of an Insurer Insurance. Mathematics and Economics 52, 359–369.

[9] Michael Ross, I., 2015. A primer on pontryagin's principle in optimal control. Collegiate Publishers, Springer Berlin Heidelberg, 2003, 327-342.

[10] Pablo, A., Nora, M. and Zbigniew, P., 2019. Optimal dividend payments for a twodimensional insurance risk process. European Actuarial Journal 9, 241–272.

[11] Pinch Enid, R. (1992). *Optimal control and the Calculus of Variations*. Oxford university Press.

[12] Rutquist Per, E. and Marcus M. Edvall. (2010). *Propt-matlab optimal control software.* Tomlab Optimization Inc 260.

[13] Rolski, T., Schmidli, H., Schmidt, V. and Teugels, J. (1999). *Stochastic Processes for Insurance and Finance*. Wiley.

[14] Samphantharak, K., Townsend, R. (2017). *Risk and return in village economies.* National Bureau of Economic Research.

[15] Taylor, G.C., 1986. Underwriting strategy in a competitive insurance environment insurance. Mathematics and Economics 5, 59–77.

[16] Wang, X. (2009). *Solving Optimal Control Problems with Matlab Indirect Methods.* North Carolina State University, Raleigh, NC, USA.

[17] Zhao, X., Ji, H.Y. and Shi, Y., 2019. Optimization Problem of Insurance Investment Based on Spectral Risk Measure and Raroc Criterion. Mathematical Problems in Engineering 9, 1568–1580.