دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال نهم، شماره چهل و ششم، بهمن و اسفند ۱۴۰۲
شماره شاپا: ۵۸۸-۲۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

تأثیر طرح‌مسئله بر یادگیری مفاهیم هندسی دانش‌آموزان مبتنی بر نظریهٔ APOS

وحید عالمیان*[۱]، اسماعیل اندایشگر[۲]

(۱و۲) گروه ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، تهران، ایران.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۱۱/۱۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۳/۰۲/۱۱

چکیده

طرح‌مسئله یکی از روش‌های نوین یاددهی-یادگیری است که در آن به دانش‌آموزان فرصتی داده می‌شود تا مسئله‌های خود را بسازند یا مسئله‌های موجود را صورت‌بندی مجدد کنند.

هدف این پژوهش تأثیر طرح‌مسئله بر درک ریاضی دانش‌آموزان پایهٔ نهم از مفهوم حجم و مساحت اجسام هندسی مبتنی بر نظریهٔ APOS است. جامعهٔ آماری آن، دانش‌آموزان پسر پایهٔ نهم دورهٔ اول متوسطه شهرستان سلماس استان آذربایجان‌غربی که در سال ۱۴۰۰-۱۳۹۹ تحصیل می‌کردند، می‌باشد. نمونهٔ مورد نظر به‌صورت دردسترس به تعداد40 نفر برای دو گروه‌آزمایش و گواه در نظر گرفته شد. این مطالعه از نظر هدف کاربردی، از نظر اجرا شبه-تجربی است. ابزار اندازه‌گیری این پژوهش دو آزمون کتبی محقّق‌ساخته بوده است که سوالات آن براساس نظریهٔ APOS انتخاب شده‌اند. ضریب آلفا کرونباخ پیش‌آزمون و پس‌آزمون به ترتیب۰/۷۹۴ و۰/۸۰۹ به‌دست آمد. نتایج به‌دست آمده از این پژوهش نشان داد که طرح‌مسئله سبب بهبود میانگین سطح درک دانش‌آموزان گروه-آزمایش نسبت به گروه‌گواه بر اساس نظریهٔ APOS شده است. هم‌چنین طرح‌مسئله تفاوت معناداری بین عملکرد دانش‌آموزان گروه‌آزمایش و گواه به سود گروه‌آزمایش در سطح ۰/۰۵ به‌وجود آورد. بنابراین طرح‌مسئله بر درک ریاضی دانش‌آموزان تأثیر دارد و سبب بهبود سطح درک آن‌ها براساس نظریهٔ APOS می‌شود.

واژه‌های کلیدی: طرح‌مسئله، نظریهٔ APOS، عمل، فرآیند، شی و طرح‌واره.

۱. عهده‌دار مکاتبات: Email: vahid_alamian@yahoo.com

مقدمه

ریاضیات یکی از دستاوردهای بزرگ بشریت است. ریاضیات با افزایش قابلیت‌های ذهن انسان موجب تسهیل و توسعه علوم، فناوری، مهندسی، تجارت و سیاست می‌شود. ریاضیات هم‌چنین یک دستاورد فکری با پیچیدگی و زیبایی فوق‌العاده است که مظهر قدرت استدلال قیاسی است. مردم برای مشارکت کامل در جامعه، باید ریاضیات اولیّه را بدانند. شهروندانی که نمی‌توانند از لحاظ ریاضی استدلال کنند از تمام حوزه‌های تلاش بشر جدا شده‌اند. آن‌ها بدون شمارش نه تنها از فرصت بلکه از صلاحیت در کارهای روزمره محروم می‌شوند[۱].

هندسه یکی از مهارت‌های اساسی در ریاضیات است. از دید برخی از پژوهشگران، هندسه، توانایی مشاهده‌کردن، تصورکردن و فکرکردن است و از آن‌جا که موضوع هندسه بررسی فضا و شکل‌ها است و همه پدیده‌ها در فضا رخ می‌دهند، هندسه به گونه‌ای زمینهٔ همهٔ علوم طبیعی است. هم‌چنین هندسه بستر مناسب بُروز و تقویت خلاقیّت و تخیل انسان را فراهم می‌کند[۲].

یکی از اهداف اصلی آموزش ریاضی، ارزیابی و بهبود سطح درک دانش‌آموزان در حوزه‌ها و مهارت‌های مختلف ریاضی است. طرح‌مسئله یکی از روش‌های نوین یاددهی–یادگیری است چرا که در چند دههٔ اخیر مورد تاکید آموزشگران و محقّقان ریاضی قرار گرفته است. طبق تعریف سیلور[۳] در طرح‌مسئله به دانش‌آموزان اجازه داده می‌شود تا مسئله‌های خود را بسازند و یا مسئله‌های موجود را صورت‌بندی مجدد نمایند. طرح‌مسئله به دانش آموزان اجازه می‌دهد تا ساختارهای عمیق فکری خود را شکل دهند[۴]. بنابراین طرح‌مسئله جایگاه مهمّی در آموزش ریاضی دارد و می‌تواند سبب بهبود سطح درک دانش‌آموزان شود.

یکی از روش‌های سنجش و ارزیابی درک دانش‌آموزان در مفاهیم مختلف ریاضی مثل اجسام هندسی، استفاده از نظریهٔAPOS[۲] است. با توجّه به این‌که نظریهٔAPOS، یک نظریهٔ ساختارگرایی است که ساختار ذهنی افراد حین انجام فعالیت ریاضی را بررسی می‌کند و هم‌چنین سطوح مختلفی برای این ارزیابی دارد که شامل عمل، فرآیند، شی و طرح‌واره است، آرنون و همکاران[۵] بیان می‌کنند که یکی از اجزایی که تحقیقات و برنامه‌های آموزشی حوزهٔ نظریهٔAPOS مورد استفاده قرار می‌دهند جمع‌آوری، تجزیه وتحلیل داده‌ها به‌وسیلهٔ این تئوری است، پس این تئوری می‌تواندرک ریاضی دانش‌آموزان را حین فعالیت طرح‌مسئله در مفهوم حجم و مساحت اجسام هندسی را نیز بررسی و ارزیابی نماید.

طرح مسئله

حل‌مسئلهٔ ریاضی همواره به عنوان یکی از موضوعات مهم و چالش برانگیز در تحقیقات آموزش ریاضی مطرح بوده است. در حال حاضر، تأکید زیادی بر به‌کارگیری رویکرد حل‌مسئله در فرآیند آموزش ریاضی وجود دارد. با پذیرش اهمیت حل‌مسئله و جایگاه آن در آموزش ریاضی، سوالات جدیدی در پیش‌رو قرار می‌گیرد. به عنوان مثال، این که منشا این مسئله‌ها کجاست؟ یعنی مسئله‌هایی که حل می‌کنیم از کجا می‌آیند و چگونه طرح و تولید می‌شوند؟ آیا دانش‌آموزان هم می‌توانند مسئله تولید کنند؟ آیا طرح‌مسئله در آموزش ریاضی، فرآیند مهمّی به شمار می‌آید؟ و جایگاه آن در برنامهٔ‌درسی و کتاب‌های ریاضی مدرسه‌ای کجاست؟ انشتین و اینسفلد[۶] معتقدند که صورت بندی یک مسئله اغلب از حل آن مهم‌تر است چرا که حل آن صرفاً چیزی در حد یک مهارت تجربی یا ریاضی است. در این مورد، سیلور بیان می‌کند که اگرچه حل مسئله‌ها مورد بررسی و مطالعه‌های دقیق قرار گرفته است

---

[۲]. حروف اول کلمات Actions(عمل)، Processes(فرآیند)، Objects(شی) و Shemas(طرح‌واره)

امّا به ایجاد تنوع در منبع مسئله‌هایی که در مدارس حل می‌شوند، توجّه کمتری شده است. هم‌چنین وی می‌افزاید که اغلب از دانش‌آموزان خواسته می‌شود که مسئله‌های مطرح شده توسط معلّم یا کتاب را حل کنند و به ندرت از آن‌ها می‌خواهند که خودشان مسئله تولید کنند.کیلدیر و سیزن[۷] معتقدند که حل‌مسئله یکی از رویدادهایی است که بارها برای توضیح یک موضوع ریاضی یا تعیین موفقیت ریاضی دانش‌آموزان به‌کار رفته است در حالی که فرآیند طرح‌مسئله چنان جامع است که حل‌مسئله را نیز در بر می‌گیرد. در مقابل کنترویچ و همکاران[۸] طرح‌مسئله را یکی از ابعاد حل‌مسئله می‌دانند. امّا در هر صورت اکثر محقّقان بر وجود ارتباط بین این دو تاکید دارند.

به عقیده مکینتاش و جرت، به ندرت از دانش‌آموزان خواسته می‌شود تا برای یک مسئله، فرآیندی را ابداع کنند یا مسئله خودشان را بر پایه ارزیابی از یک موقعیت یا داده، طرح نمایند. در نتیجه دانش‌آموزان تا حد زیادی از ظرفیت موجود در فرآیندهای مرتبط با حل‌مسئله و طرح‌مسئله برای تقویت خلاقیت و مهارت‌های تفکّر بی‌بهره خواهند ماند[۹].

افزون بر این کیلدیر و سیزن براین باورند که طرح مسئله می‌تواند بدفهمی‌ها، پیش‌داوری‌ها و کاستی‌های مربوط به محتوا را در زمان کوتاه‌تر و با شیوه‌های بهتر، تجزیه و تحلیل کند. NCTM[۱۰] طرح‌مسئله را به عنوان طرح سوالات جدید در قالب یک مسئله زمینه‌دار معرفی می‌نماید و بیان می‌دارد که معلّمان باید مهارت طرح‌مسئله را پرورش و توسعه دهند.

تعریف طرح مسئله

طی چند دههٔ اخیر، فرآیند طرح‌مسئله ریاضی توسط برخی محققان و آموزشگران ریاضی مثل انگلیش، کای ، کای و هوانگ مورد مطالعه قرار گرفته و تعاریفی برای آن ارائه شده است. استویانوا و الرتون[۱۱] طرح‌مسئله را صورت-بندی دسته‌ای از مسئله‌های ریاضی بر مبنای یک موقعیت مفروض می‌داند در حالی که سیلور معتقد است طرح-مسئله هم به تولید یک مسئله جدید و هم به صورت‌بندی مجدد یک مسئله مفروض دلالت دارد و بنابراین می-تواند قبل از حل یک مسئله، طی حل آن و بعد از حل مسئله انجام شود. در این راستا استویانوا و الرتون طرح-مسئله را به عنوان فرآیندی تعریف می‌کنند که در آن دانش‌آموزان بر اساس تجارب ریاضی خود، تعبیرها و تفسیرهایی را از موقعیت‌های واقعی می‌سازند و آن‌ها را به صورت مسئله‌های ریاضی معنادار صورت‌بندی می‌کنند.

چارچوب‌ها و موقعیت‌های متفاوت طرح‌مسئله در ریاضی

بر اساس نتایج برخی از پژوهش‌های انجام شده حول طرح‌مسئله ریاضی، چارچوب‌ها و موقعیت‌های مختلفی برای مطالعهٔ این فرآیند ارائه شده است که در این بخش به اختصار برخی از مهم‌ترین آن‌ها مورد بررسی قرار می‌گیرد.

۱- چارچوب و موقعیت طرح‌مسئله سیلور

سیلور معتقد است که طرح‌مسئله جدید می‌تواند قبل، طی و بعد از حل یک مسئله اتفاق بیافتد.

۲- چارچوب استویانوا و الرتون برای موقعیت طرح‌مسئله در ریاضی

استویانوا و الرتون موقعیت‌های طرح‌مسئله را در سه دسته آزاد، نیمه‌ساختاریافته و ساختاریافته تقسیم کرده‌اند.

موقعیت طرح‌مسئله آزاد، موقعیتی است که در آن، از دانش‌آموزان خواسته می‌شود برای یک وضعیت واقعی یا زمینه‌دار، با توجّه به یک موقعیت خاص و معین، بدون محدودیت مسئله‌های خود را طرح کنند. استویانوا و الرتون به منظور تشویق دانش‌آموزان برای بازتاب تجارب قبلی خاص خود، این نوع از تکالیف را مورد استفاده قرار داده‌اند. نمونه هایی از موقعیت‌های طرح‌مسئله آزاد به صورت زیر است:

- یک مسئله برای المپیاد ریاضی مدرسه خود طرح کنید؛
- یک مسئله که آن را دوست دارید، طرح کنید؛
- یک مسئله برای دوستتان طرح کنید تا آن را حل کند؛

موقعیت طرح‌مسئله نیمه‌ساختاریافته وقتی اتفاق می‌افتد که در آن به دانش‌آموزان یک موقعیت باز داده شده و از آن‌ها خواسته می‌شود تا ساختار موقعیت را بررسی کرده و با به‌کارگیری دانش، مهارت‌ها، مفاهیم و روابط حاصل از تجربه‌های ریاضی گذشتهٔ خود، آن‌ها را تکمیل کنند. در مطالعه استویانوا و الرتون موقعیت طرح‌مسئله نیمه-ساختاریافته به منظور تولید تعدادی مسئله مرتبط بر مبنای موقعیت‌هایی که دارای ساختارهای ناتمام هستند، مورد استفاده قرار می‌گیرد. نمونه‌هایی از این نوع تکلیف در زیر آمده است:

- یک تصویر به دانش‌آموز ارائه شده و از او بخواهیم بر مبنای آن مسئله تولید کند؛
- یک معادله یا محاسبه به دانش‌آموز ارائه داده و از او خواسته شود که بر مبنای آن مسئله طرح کند؛

موقعیت طرح‌مسئله ساختاریافته هنگامی اتفاق می‌افتد که فعالیت‌های طرح‌مسئله بر مبنای یک مسئله معین باشد. دانش‌آموزان با فرمول‌بندی مجدد مسئله‌های حل شدهٔ قبلی یا با تغییر شرایط یا خواسته های مسئلهٔ داده شده به تولید مسئلهٔ جدید بپردازند. این موقعیت نسبت به دو موقعیت قبل گستردگی کمتری دارد. هدف از چنین موقعیتی، کمک به دانش‌آموزان جهت درک مسئله‌های خاص، ساختارهای حل و بررسی احتمال ارتباط بین صورت‌مسئله و ایده‌های حل است. به عنوان مثال، می‌توان مسئله «مجموع زاویه‌های داخلی یک مثلث ۱۸۰ درجه است.» را به دانش‌آموز داد و از او خواست هر تعداد مسئلهٔ جدید که می‌تواند، براساس آن طرح کند.

۳- موقعیت طرح‌مسئله بر اساس چارچوب انگلیش

انگلیش[۱۲]در راستای ارتقای توانایی‌های طرح‌مسئله دانش‌آموزان پایهٔ پنجم مدارس استرالیا، یک برنامه یک ساله طرح‌مسئله را طراحی و اجرا نمود. به این منظور چارچوبی شامل سه مؤلفهٔ درک دانش‌آموزان از یک مسئله، شناسایی مسئله‌هایی که دانش‌آموزان ترجیح می‌دهند و توانایی دانش‌آموزان در درک موقعیت‌های ریاضی به طرق مختلف، که معتقد است در فرآیند طرح‌مسئله نقش مهمی دارند، در نظر گرفت.

۴- موقعیت طرح‌مسئله بر اساس مدل کریستو و همکاران

کریستو و همکاران[۱۳] به ساخت، توصیف و آزمایش یک مدل نظری طرح‌مسئله پرداختند و به‌منظور تولید این مدل، فرآیندهایی را که به دفعات زیاد در ادبیات پژوهشی طرح‌مسئله استفاده شده بود را عملیاتی کردند. در این مدل، این فرآیندها ویرایش اطلاعات‌کمّی، انتخاب اطلاعات‌کمّی، درک و سازماندهی اطلاعات‌کمّی و ترجمهٔ اطلاعات‌کمّی نام‌گذاری شدند.

۵- استراتژی براون و والتر برای موقعیت طرح‌مسئله ریاضی

براون و والتر[۱۴] در کتاب هنر طرح‌مسئله یک طرحواره برای طرح‌مسئله جدید با استفاده از یک مسئلهٔ داده‌شده

معرفی کردند که دارای پنج سطح است. سطح دوم این طرحواره به عنوان یک استراتژی طرح‌مسئله در تحقیقات زیادی(از جمله لاوی و برشادسکی[۱۵]؛ کانتررس[۱۶]؛ سانگ و همکاران[۱۷] مورد استفاده قرارگرفته است و به عنوان استراتژی «اگر نباشد، چه می‌شود؟» معروف است. سطوح این طرحواره به صورت خلاصه در جدول۱ ارائه شده است:

جدول۱. سطوح موقعیت طرح‌مسئله براون و والتر(۲۰۰۵) براساس استراتژی«اگر نباشد، چه می‌شود؟»

سطح	فعالیت	مثال
صفر	انتخاب یک نقطه شروع	آیا میانه‌های وارد بر ساق‌های مثلث متساوی‌الساقین برابرند؟
اول	فهرست کردن متغیرهای مسئله داده‌شده	میانه، مثلث و متساوی‌الساقین
دوم	پرسیدن سوال اگر نباشد، چه می‌شود؟	اگر میانه نباشد، چه می‌شود؟
سوم	طرح‌مسئله یا پرسیدن سوال جدید	آیا ارتفاع‌های وارد بر ساق مثلث متساوی‌الساقین برابرند؟
چهارم	تحلیل و بررسی مسئله	این مسئله با مسئلهٔ اولیه متفاوت و کاملاً صحیح است. برای حل این مسئله باید از روش جدیدی استفاده شود و...

براون و والتر متذکر شده‌اند که این طرحواره خطی نیست یعنی برای رفتن به هر سطح لزوماً به گذشتن از سطوح قبلی نیاز نیست و تقریباً هر سطح می‌تواند بر سطح‌های دیگر اثر داشته باشد. این استراتژی یک روش کارآمد برای طرح‌مسئله جدید بر مبنای یک مسئله مشخص می‌باشد به طوری که کانتررس چارچوب خود را بر اساس این استراتژی طراحی کرده است.

۶- موقعیت طرح‌مسئله بر اساس چارچوب کانتررس

کانتررس بر اساس استراتژی «اگر نباشد، چه می‌شود؟ » که توسط براون و والتر معرفی شده، یک چارچوب برای طرح‌مسئله‌های جدید از روی یک مسئلهٔ مبنا ارائه داده است.

۷- موقعیت طرح‌مسئله بر اساس استراتژی و مدل ویسترو–یو

ویسترو–یو [۱۸] ایده گرفتن از یک روش در ادبیات به نام نوآوری در یک داستان، روشی برای نوآوری در طرح-مسئله معرفی کرده است. هردو روش نوآوری در داستان و نوآوری در مسئله در جدول۲ معرفی و مقایسه شده‌اند.

جدول۲. مقایسهٔ روش نوآوری در داستان و استراتژی ویسترو-یو برای طرح‌مسئله

نوآوری در داستان‌ها	نوآوری در مسئله‌های ریاضی	ویژگی مسئله
جانشانی: بازگویی همان داستان امّا با ایجاد چند تغییر ساده مانند نام‌ها، اشیا و مکان‌ها	جایگزینی: طرح‌مسئله مشابه به وسیله تغییر کمیت‌ها، مقادیر، واحدها، شکل‌ها و غیره	حل این مسئله یک تمرین خواهد بود چرا که با این نوع تغییر ساختار روش حل‌مسئله عوض نخواهد شد.
افزایش: بازگویی همان داستان امّا با اضافه کردن توصیف‌ها، گفتگوها و یا حوادث بیشتر	افزایش: طرح‌مسئله مشابه از طریق اضافه کردن داده‌ها یا محدودیتی جدید و یا افزودن یک شرط یا مانع	مسئله توسعه می‌یابد و می‌تواند پیچیدگی بیشتری داشته باشد.
تغییر: انجام تغییراتی که دارای بازتاب	جرح و تعدیل: استفاده از همان داده‌ها امّا	مسئله می‌تواند کاملاً جدید باشد امّا

هستند. به عنوان مثال، تغییرات در شخصیت پردازی، نو کردن فضای داستان و یا تغییردادن پایان داستان	با اصلاح مسئله	ممکن است برای حل نیاز باشد از مسئلهٔ اصلی به عنوان نقطه آغاز استفاده کرد.
انتقال: بازگویی داستان در یک ژانر (نوع) متفاوت	زمینه‌دار کردن مسئله: برای این‌که مسئله را بیشتر به دانش‌آموزان مرتبط سازد.	مسئله مرتبط‌تر می‌شود امّا اساساً مشابه همان مسئلهٔ اصلی است.
تغییر دیدگاه: بازگویی داستان از دید یک شخصیت متفاوت	برگرداندن یا معکوس کردن مسئله: طرح-مسئلهٔ اصلی ولی با در نظر گرفتن هدف نهایی به عنوان داده و داده به عنوان هدف نهایی.	مسئله جالب‌تر، چالش برانگیزتر و کاملاً متفاوت می‌شود.
بازسازی طرح اصلی: استفاده مجدد تنها از الگوی زیرساختی مسئلهٔ اصلی	صورت‌بندی مجدد: طرح‌مسئله اصلی در یک نوع متفاوت(به عنوان مثال، بیان یک مسئله اثبات کردنی به صورت یک مسئله موقعیتی)	مسئله جدید متفاوت با مسئلهٔ اصلی است امّا برای فهم و حل آن به دانش، مفهوم یا مهارتی که در مسئلهٔ اصلی لازم بود، نیاز است.

به‌عنوان نمونه، اگر مسئلهٔ« قیمت یک بلوز پشمی ۱۹۰۰۰۰ تومان است و شما فقط اسکناس ۲۰۰۰۰ تومانی دارید و فروشنده فقط اسکناس ۵۰۰۰۰ تومانی دارد، آیا با داشتن چنین پول‌هایی می‌توانید با فروشنده تسویه کنید؟»را به عنوان مسئلهٔ اصلی در نظر گرفته شود، با استفاده از شش راهبرد و استراتژی بیان شده در جدول۲ می‌توان اقدام به طرح‌مسئله جدید نمود. این مسئله‌ها در جدول۳ ارائه شده‌اند.

جدول۳. طرح‌مسئلهٔ جدید با استفاده از شش ایده نوآوری ویسترو–یو

روش	مسئله جدید
جایگزینی	قیمت یک بلوز پشمی ۲۳۰۰۰۰ تومان است و شما فقط اسکناس ۲۰۰۰۰ تومانی دارید و فروشنده فقط اسکناس ۵۰۰۰۰ تومانی دارد، آیا با داشتن چنین پول‌هایی می‌توانید با فروشنده تسویه کنید؟
افزایش	قیمت یک بلوز پشمی ۱۸۵۰۰۰ تومان و قیمت یک شلوار جین ۲۲۵۰۰۰ است و شما فقط اسکناس ۲۰۰۰۰ تومانی دارید و فروشنده فقط اسکناس ۵۰۰۰۰ تومانی دارد، آیا با داشتن چنین پول‌هایی می‌توانید با فروشنده تسویه کنید؟
جرح و تعدیل	قیمت یک بلوز پشمی ۱۹۰۰۰۰ تومان است و فروشنده ۲۰۰۰۰تومان تخفیف بابت این خرید به شما داده است. شما فقط اسکناس ۲۰۰۰۰ تومانی دارید و فروشنده فقط اسکناس ۵۰۰۰۰ تومانی دارد، آیا با داشتن چنین پول‌هایی می‌توانید با فروشنده تسویه کنید؟
زمینه‌دار کردن	علی برای خرید لباس‌های زمستانی، همراه پدر و مادرش به بازار رفت. در یک مغازه از یک بلوز پشمی سبز رنگ به قیمت ۱۹۰۰۰۰تومان خوشش آمد و از والدینش خواست که آن را خریداری کنند. هنگام تسویه حساب با فروشنده، والدینش متوجّه شدند که فقط اسکناس ۲۰۰۰۰ تومانی برایش باقی مانده است و فروشنده نیز فقط اسکناس ۵۰۰۰۰ تومانی دارد. آیا علی می‌تواند این بلوز را بخرد؟
معکوس کردن	اگر علی ۱۲ اسکناس ۲۰۰۰۰ تومانی داشته باشد و فروشنده فقط یک اسکناس ۵۰۰۰۰ تومانی داشته باشد، علی بلوز پشمی با چه قیمتی را می‌تواند خرید کند؟
صورت‌بندی مجدد	قیمت یک بلوز پشمی m تومان است و شما فقط اسکناس n تومانی دارید و فروشنده فقط اسکناس $2n+1$ تومانی دارد، آیا با داشتن چنین پول‌هایی می‌توانید با فروشنده تسویه کنید؟

هر پژوهشگر با توجّه به دغدغه‌ها و شرایط خود به کشف استراتژی‌های طرح‌مسئله از دیدگاه خود پرداخته است و ملاحظه می‌شود که این استراتژی‌ها از یک خط سیر واحد برخوردار نیستند و برای آموزش تک‌تک آن‌ها به زمان زیادی نیاز است. نگارنده با توجّه به این‌که دانش‌آموزان دورهٔ اول متوسطه درک نسبتاً کمی از مفاهیم ریاضی دارند

و دلایل زیر، سه استراتژی استویانوا و الرتون، براون و والتر و ویسترو-یو را برای آموزش به عنوان متغیر مستقل انتخاب کرد:

الف- در بیشتر پژوهش‌های اخیر حوزهٔ طرح‌مسئله از استراتژی استویانوا و الرتون استفاده شده است.

ب- بیشترین استفاده از استراتژی براون و والتر درمسئله‌های اثباتی است و آموزش آن به دانش‌آموزان برای سال-های آتی مفید است.

ج- ارتباط نزدیک استراتژی ویسترو-یو به ادبیات و داستان پردازی سبب درک و فهم بهتر دانش‌آموزان از این استراتژی می‌شود.

با توجّه به موارد فوق، شاخص‌های این سه استراتژی در جدول۴ آمده است:

جدول۴. شاخص‌های استراتژی‌های استویانوا و الرتون، براون و والتر و ویسترو-یو

استراتژی	موقعیت	شاخص
استویانوا و الرتون	آزاد	دانش‌آموز بتواند در یک موقعیت خاص و معین بدون هیچ‌گونه محدودیتی مسئله‌های خود را طرح کند.
	نیمه ساختاریافته	دانش‌آموز ساختار یک موقعیت باز را کشف کرده و با استفاده از دانش، مفاهیم و روابط ریاضی موجود در ذهن خود، مسئله‌های خود را طرح کند.
	ساختاریافته	دانش‌آموز با فرمول‌بندی مجدد مسئله‌های قبلی داده شده یا با تغییر شرایط و یا خواسته‌های مسئله‌های داده شده به طرح‌مسئله جدید بپردازد.
براون و والتر	اگر نباشد، چه می-شود؟	دانش‌آموز متغیرهای اصلی مسئلهٔ داده‌شده را تشخیص دهد و با تغییر این متغیرها به عبارت‌های دیگر ریاضی مسئلهٔ خود را طرح کند.
ویسترو-یو	جایگزینی	دانش‌آموز بتواند مانند جانشانی در داستان مسئله‌ای مشابه به وسیله تغییر کمیت‌ها، مقادیر، واحدها، شکل‌ها و غیره طرح کند.
	افزایش	دانش‌آموز بتواند مانند افزایش در داستان، مسئله‌ای مشابه از طریق اضافه کردن داده‌ها یا محدودیتی جدید و یا افزودن یک شرط یا مانع طرح کند.
	جرح و تعدیل	دانش‌آموز بتواند با استفاده از همان داده‌ها امّا با اصلاح مسئله، مسئلهٔ جدیدی طرح کند.
	زمینه‌دار کردن	دانش‌آموز بتواند با بیشتر مرتبط کردن مسئله به زندگی خود، مسئلهٔ جدیدی طرح کند.
	معکوس کردن	دانش‌آموز بتواند مشابه مسئلهٔ اصلی را با جابه‌جا کردن داده‌ها و هدف نهایی، به طرح‌مسئلهٔ جدیدی بپردازد.
	صورت‌بندی مجدد	دانش‌آموز بتواند با توجه به مسئلهٔ اصلی، مسئلهٔ جدیدی در یک نوع متفاوت طرح کند.

یکی از اهداف اصلی آموزش ریاضی، ارزیابی و بهبود سطح درک دانش‌آموزان در حوزه‌ها و مهارت‌های مختلف ریاضی است. با توجّه به این‌که نظریهٔAPOS یک نظریهٔ ساختارگرایی است و بر مدل‌هایی از آن‌چه هنگام یادگیری مفهوم ریاضی ممکن است در ذهن یک فرد اتفاق بیفتد، متمرکز است که از این مدل‌ها برای طراحی مواد آموزشی و یا ارزیابی موفقیت‌ها و شکست‌های دانش‌آموزان در برخورد با موقعیت‌های مسئله ریاضی استفاده می‌شود و در بسیاری از مطالعات به عنوان یک دیدگاه کاملاً توسعه‌ای (به عنوان مثال، بریدنباخ و همکاران)، به عنوان یک ابزار ارزیابی کاملاً تحلیلی (به عنوان مثال، دابینسکی و همکاران)، یا هر دو دیدگاه (به عنوان مثال، ولر و همکاران) با موفقیت مورد استفاده قرار گرفته است[۵] می‌تواند ابزاری مناسب برای ارزیابی سطح درک دانش-آموزان باشد.

نظریهAPOS

نظریهAPOS به چگونگی مفهوم ریاضی و ساخته شدن آن در ذهن یادگیرنده توجّه دارد. در واقع این نظریه چرخه‌ای از ساخت و ساز مفاهیم را بیان می‌کند که به هنگام یادگیری یک مفهوم ریاضی در ذهن یادگیرنده رخ می‌دهد. نظریهAPOS توسط دابینسکی در سال 1991 براساس یکی از نظریات پیاژه و جهت بازسازی آن در فضای ریاضیات دانشگاهی، مطرح شده است[۱۹]. این نظریه بر این فرض استوار است که فرد مفاهیم ریاضی را به طور مستقیم نمی‌آموزد، بلکه او برای معنا بخشیدن به یک مفهوم ریاضی از ساختارهای ریاضی استفاده می‌کند. اگر فرد برای یک مفهوم، ساختارهای ذهنی مناسب ریاضی داشته باشد یادگیری برای او آسان است ولی اگر ساختارهای ذهنی مناسبی موجود نباشد یادگیری مفهوم تقریباً غیرممکن است. ساختارهایی که در نظریهAPOS به آن پرداخته می‌شود عبارت‌اند از عمل، فرآیند، شی و طرحواره. به عبارت دیگر نظریهAPOS با عمل‌ها شروع شده، از میان فرآیندها حرکت کرده و بعد از تبدیل آن‌ها به اشیاء، به طرحواره می‌رسد[۲۰].

۱- عمل

عمل، تغییر دادن اشیاء از پیش شناخته شده توسط فرد است، در صورتی که راه این تغییر به یادگیرنده نشان داده شود. در این مرحله او نیاز صریح به حافظه‌اش دارد تا بتواند برای انجام تکالیف و مسائل به صورت گام به گام از آن استفاده کند[۲۱].

در تعریف ساختار ذهنی عمل که توسط آسیالا و همکاران ارائه شده است آمده که درک یک مفهوم ریاضی با دستکاری اشیا ذهنی یا فیزیکی که قبلاً ساخته شده است، شروع می‌شود که باعث شکل‌گیری عمل‌ها می‌شود[۵]. طبق نظر آرنون و همکاران[۵]، بر اساس نظریهٔ پیاژه که بوسیلهٔ نظریهAPOS بروز شده است، یک مفهوم ابتدا به عنوان یک عمل درک می‌شود(به عنوان یک تحول هدایت شده بیرونی از شی یا اشیایی که قبلاً درک شده است). آرنون و همکاران[۵] بیان می‌کنند که یک عمل خارجی[۴۲]است یعنی که هر مرحله از تحول باید صریحاً انجام شود و بوسیلهٔ دستورالعمل‌های بیرونی هدایت گردد. و مضافاً هر مرحله، مرحله بعدی را برمی‌انگیزد و بنابراین فرد تصوری از مراحل عمل ندارد و هم‌چنین نمی‌تواند آن مراحل را کنار بگذارد و از آن‌ها صرف‌نظر نماید. فردی که در سطح عمل محدود شده است به راهنمایی‌های خارجی وابسته است.

۲- فرآیند

زمانی که عملی تکرار می‌شود و شخص بر آن بازتاب می‌کند آن عمل به صورت فرآیند، درونی می‌شود. در این زمان یادگیرنده برای انجام عملی، دارای ساختار درونی می‌شود. یعنی درونی سازی به شخص این امکان را می‌دهد که از یک عمل آگاه شود و آن را با اعمال دیگر ترکیب کند و یا دو یا چند فرآیند را برای ساختن فرآیند جدید هماهنگ کند. فرآیندها همان درونی شدهٔ ساختار عمل هستند، امّا بدون احتیاج به هدایت توسط محرک خارجی. شخصی که درک فرآیندی از تغییر را دارد می‌تواند بر عمل بازتاب کند، عمل را توصیف کند و حتّی گام‌های تغییر را معکوس کند، البته بدون این که این گام‌ها را واقعاً انجام دهد. در مقایسه با عمل، فرآیند دیگرتوسط راهنما و محرک بیرونی هدایت نمی‌شود بلکه کنترل در دست یادگیرنده است[۲۲]. فرآیندها با استفادهٔ یکی از مکانیسم-های ذهنی درونی‌سازی یا هماهنگی ساخته می‌شود. با تکرار و تأمل روی عمل‌ها، فرد از وابستگی به نشانه‌های بیرونی به کنترل کردن درونی آن‌ها می‌رسد. این ویژگی با قابلیت تصوّر انجام مراحل بدون لزوم انجام صریح تک-

تک مرحله‌ها و حتی نادیده‌گرفتن(صرف نظر کردن) یک یا چند مرحله و هم چنین معکوس‌کردن آن‌ها مشخص می‌شود و درونی‌سازی مکانیسمی است که این تغییر ذهنی را ممکن می‌سازد[۵].

دابینسکی بیان می‌کند که یک عمل باید درونی شود، این گفته بدان معناست که برخی درونی‌سازی‌ها در رابطه با عمل ساخته می‌شود. یک فرآیند، درونی‌سازی شده یک عمل است. درونی‌سازی به فرد اجازه می‌دهد تا نسبت به عمل آگاهی داشته باشد، در آن تأمل کند و آن را با سایر عمل‌ها ترکیب نماید[۵].

هم‌چنین آرنون و همکاران[۵] توصیف زیر را از فرآیند ارائه می‌دهند:

وقتی فردی روی عملی تکرار و تأمل می‌کند، ممکن است آن عمل در یک فرآیند ذهنی درونی شود. فرآیند، ساختاری ذهنی است و همان عملیاتی را انجام می‌دهد که یک عمل درونی‌شده انجام می‌دهد امّا کاملاً در ذهن فرد. بنابراین او تصور می‌کند که قابلیت انجام تحول را بدون این که لازم باشد تمامی مراحل را به طور صریح اجرا کند، دارد.

گرچه در ارتباط با یک محتوا ممکن است شباهت‌هایی بین عمل و فرآیند باشد امّا در این مورد متفاوت هستند که برای یک عمل، شخص باید واقعاً تحولات را شکل دهد(از نظر فیزیکی یا ذهنی) امّا در فرآیند، شخص بدون نیاز به تمامی مراحل می‌تواند تحولات را انجام دهد[۵].

۳- شی

زمانی که شخص از فرآیند همانند یک کلیت آگاه می‌شود و پی می‌برد که می‌تواند عمل‌ها را تغییر دهد و حقیقتاً قادر به ساختن چنین تغییراتی باشد، تفکّر او از سطح فرآیند به سطح شی رسیده است یا اصطلاحاً فرآیند در شی کپسوله شده است. در طول انجام تبدیل عمل یا فرآیند بر یک شی اغلب لازم است که شی را به فرآیندهایی که از آن به دست آمده است، گسترده کرد. گرچه تشکیل شی یا شی‌انگاری وجه اشتراک تمام نظریه‌ها در یادگیری ریاضیات می‌باشد ولی اغلب تصور می‌شود که خلاصه کردن فرآیند به شی مشکل است و راهبردهای آموزشی لازم برای کمک به دانش‌آموزان جهت برخورد با چنین موقعیّت‌هایی وجود ندارد که مهم‌ترین دلیل آن فقدان تجربه-های لازم برای متناظر کردن عمل‌ها به آن‌چه به‌عنوان فرآیند تعبیر می‌شوند، می‌باشد. البته در سال‌های اخیر توجّه زیادی به خلاصه کردن فرآیند به شیء به عنوان روشی اساسی برای رشد شناختی در تفکّر ریاضی شده است[۲۳].

آرنون و همکاران[۵] بیان می‌کنند که برای تبدیل شدن فرآیند به شی و شی به فرآیند به سه نوع مکانیسم ذهنی کپسوله‌سازی، کپسوله‌زدایی و هماهنگی در ذهن دانش‌آموز نیاز است.

کپسوله‌سازی زمانی اتفاق می‌افتد که فردی یک عمل را برای یک فرآیند به کار برد. یعنی یک ساختار پویا(فرآیند) را به عنوان یک ساختار ثابت ببیند تا عمل بتواند روی آن به کار گرفته شود. دابینسکی و همکاران توضیح می‌دهند که اگر کسی از فرآیند به عنوان یک کلّیت آگاه شود، متوجّه می‌شود که تحوّل می‌تواند بر اساس آن کلّیت فعّال شود و در واقع آن فرآیند می‌تواند چنین تحوّلاتی را ایجاد کند (به صراحت یا در تصور شخص) و بنابراین گفته می‌شود که شخص فرآیند را در یک شی شناختی کپسوله کرده است[۵]. مطالعه پژوهش‌های گوناگون حول نظریهAPOS نشان می‌دهد که مکانیسم کپسوله‌سازی بسیار دشوار است و در بیشتر این مطالعات تعداد کمی از دانش‌آموزان به این مرحله دست یافته اند[۵].

آرنون و همکاران[۵] بیان می‌کنند که دست‌یابی به توانایی دیدن چیزی آشنا به روش کاملاً جدید هرگز آسان نیست. دشواری‌های ناشی از تبدیل فرآیند به شی به تعبیری مانند مشکلاتی است که هنگام انتقال از یک الگوی علمی به نمونه دیگر آن بروز می‌کند.

هنگامی که فرآیندی در یک شی ذهنی کپسوله می‌شود، در صورت نیاز می‌توان آن کپسوله‌سازی را برعکس نمود و به فرآیند قبلی بازگشت که به آن کپسوله‌زدایی می‌گویند. به عبارت دیگر با استفاده از مکانسیم کپسوله‌زدایی، فرد می‌تواند به فرآیندی که باعث به وجود آمدن آن شی شده است، دست یابد[۵].

برای ساخت برخی شی‌ها مکانیسم هماهنگی ضروری است. دو شی را می‌توان کپسوله‌زدایی کرد تا به فرآیند هرکدام رسید. سپس این دو فرآیند را هماهنگ نموده و کپسوله کرد تا یک شی جدید تشکیل شود[۵].

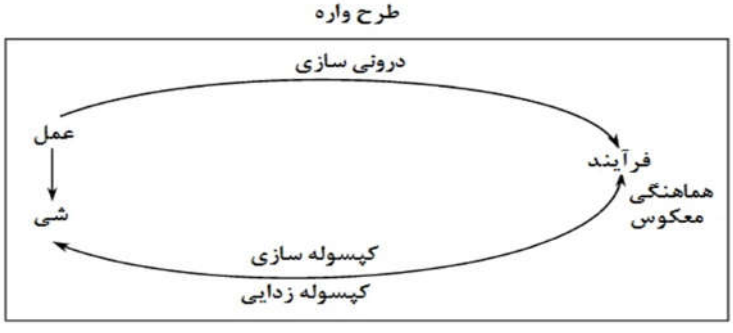
ماتنگا برنارد[۲۴] می‌گوید دانش‌آموزی که یک شی شناختی ساخته است، می‌تواند آن را به عنوان عمل جدیدی به کار گیرد و یا آن را در زمینه‌های دیگری به کار بندد، ویژگی‌های آن را پیدا کند و یا آن را با سایر اشیا ساخته شده مرتبط سازد.

۴- طرح‌واره

عمل‌ها و فرآیندها و شی‌ها پس از این که ساخته می‌شوند، می‌توانند به روش‌های گوناگون در هم تنیده شوند. مثلاً دو یا چند فرآیند ممکن است توسط اتصال به یکدیگر از طریق ترکیب یا شیوه‌های دیگر به هم مربوط شوند. به عبارت دیگر مجموعه‌ای از فرآیندها و شی‌ها در نوع ساخت و ساز یافته‌ای به صورت یک طرح‌واره سازماندهی می‌شوند. از طرفی شخص می‌تواند بر طرح‌واره‌ها بازتاب کرده و روی آن‌ها عمل کند و منجر به تبدیل شدن طرح واره به شی جدیدی شود. بنابراین شی‌ها به دو صورت ساخته می‌شوند، هم از فرآیندها و هم از طرح‌واره‌ها[۲۳].

طبق نظر دابینسکی، یک طرح‌واره با پویایی و باز سازی مداوم و پیوسته خودش شکل می‌گیرد و توسط فعالیت ریاضی موضوع در موقعیّت‌های خاص ریاضی تعیین می‌گردد. انسجام یک طرح‌واره با توانایی این که آیا فرد می‌تواند با یک موقعیت خاص ریاضی مواجهه شود، تعیین می‌گردد. هنگامی که یک طرح‌واره به عنوان مجموعه‌ای منسجم از ساختارها(عمل‌ها، فرآیندها، شی‌ها و سایر طرح‌واره‌ها) و ارتباطات ایجاد شده بین آن‌ها ساخته می‌شود، می‌تواند به یک ساختار ثابت(شی) تبدیل گردد و یا به عنوان یک ساختار پویا باعث جذب سایر اشیا یا طرح واره‌های مرتبط گردد. از این رو طرح‌واره‌ها ساختارهایی هستند شامل توصیفات، سازماندهی و مثالی از ساختارهای ذهنی که یک فرد می‌تواند در موضوع یک محتوای ریاضی داشته باشد[۵].

در شکل۱ آرنون و همکاران[۵] نحوۀ عمل‌کرد سطوح APOS و ارتباط آن‌ها با یکدیگر ارائه کرده‌اند.



شکل۱. چرخۀ APOS بر اساس طرح آرنون و همکاران

با توجّه به این‌که پژوهش حاضر به بررسی مفهوم حجم و مساحت اجسام هندسی می‌پردازد و عبارت‌های جبری و مقدارعددی عبارت‌جبری به‌عنوان پیش‌نیاز مفهوم حجم و مساحت اجسام هندسی است، ویژگی‌ها و شاخص‌های هرسطح نظریهAPOS و مصادیق آن برای هر دو مفهوم، در زیر بیان شده است:

ویژگی‌ها و شاخص‌های سطح عمل

- ارائه فرمول یا عبارت ریاضی در طول یا پایان مسئله توسط معلم و توانایی بکارگیری فرمول توسط دانش‌آموز
- ارائه مثال یا مدلی توسط معلم که در آن رویه‌های طی شده برای حل مسئله ذکر شده باشدو با توجّه به آن دانش‌آموز بتواند مسئلهٔ جدید را حل کند.
- راهنمایی‌های کامل برای حل مسئله توسط معلم ارائه و توانایی استفاده از راهنمایی‌ها توسط دانش‌آموز در حل مسئله.

مصادیق جبر و اعداد برای سطح عمل

- دانش‌آموز بتواند مسئله‌هایی که در آن عبارت جبری و عددی که قرار است عبارت‌جبری به‌ازای آن محاسبه شود، به طور صریح ذکر شده باشد را حل کند.
- دانش‌آموز بتواند پس از ارائه و حل مثال یا مدلی توسط معلم که در آن نحوهٔ به‌دست‌آوردن مقدار عددی عبارت-جبری مرحله به مرحله ذکر شده باشد، مسئلهٔ جدیدی مشابه مثال یا مدل حل شده را حل کند.
- دانش‌آموز بتواند از راهنمایی‌های معلم برای حل مسئلهٔ مربوط به عبارت‌های جبری استفاده کرده و مسئله را حل کند.

مصادیق هندسه و اندازه گیری برای سطح عمل

-دانش‌آموز بتواند مسئله‌هایی که نوع جسم هندسی در صورت آن ذکر شده‌است را حل کند.
- دانش‌آموز بتواند مسئله‌هایی که فرمول رسمی برای محاسبه حجم و مساحت اجسام هندسی در آن‌ها ذکر شده است را حل کند.
- دانش‌آموز بتواند پس از ارائه و حل مثال یا مدلی توسط معلم که در آن نحوه محاسبهٔ حجم و مساحت اجسام هندسی مرحله به مرحله ذکر شده باشد، مسئلهٔ جدیدی مشابه مثال یا مدل حل شده را حل کند.
-دانش‌آموز بتواند از راهنمایی‌های معلم برای حل مسئلهٔ مربوط به محاسبهٔ حجم و مساحت اجسام هندسی استفاده کرده و مسئله را حل کند.

ویژگی‌ها و شاخص‌های سطح فرآیند

-دانش‌آموز بتواند مسئله‌هایی که فرمول رسمی، مثال یا راهنمایی در صورت مسئله ذکر نشده باشد را حل کند.
-دانش‌آموز بتواند در حل مسئله مرحله یا مراحلی از حل مسئله را از روی فهم و آگاهی نادیده گرفته، ذهنی آن را حل کرده و به ادامه حل مسئله بپردازد.
-دانش‌آموز نمی‌تواند مسئله‌هایی که حاصل از تلفیق دو یا چند مسئله است را حل کند.

مصادیق جبر و اعداد برای سطح فرآیند

- دانش‌آموز بتواند مسئله‌هایی که در صورت آن‌ها عبارت‌جبری و عددی که قرار است عبارت جبری به‌ازای آن محاسبه شود، به طور صریح ذکر نشده باشد را بدون کمک و راهنمایی معلم یا شخص دیگری حل کند.
- دانش‌آموز بتواند در حل مسئلهٔ مربوط به عبارت‌های جبری، مرحله یا مراحلی از حل‌مسئله را از روی فهم و آگاهی نادیده گرفته، ذهنی آن را حل کرده و به ادامه حل مسئله بپردازد.
- دانش‌آموز نمی‌تواند مسئله‌هایی که حاصل از تلفیق دو یا چند مسئلهٔ دیگر که حداقل یکی از این مسئله‌ها مربوط به عبارت‌های جبری است را حل کند.

مصادیق هندسه و اندازه گیری برای سطح فرآیند

- دانش‌آموز بتواند بدون کمک و راهنمایی معلم و یا شخص دیگر، نوع جسم هندسی نهفته در صورت مسئله را تشخیص دهد.
- دانش‌آموز بتواند با توجه به صورت مسئله، نوع جسم هندسی و فرمول حجم یا مساحت آن را به‌خاطر آورده و به محاسبهٔ حجم و مساحت آن بپردازد.
- دانش‌آموز بتواند در حل مسئلهٔ مربوط به محاسبهٔ حجم و مساحت اجسام هندسی، مرحله یا مراحلی از حل-مسئله را از روی فهم و آگاهی نادیده گرفته، ذهنی آن را حل کرده و به ادامه حل مسئله بپردازد.
- دانش‌آموز نمی‌تواند مسئله‌هایی که حاصل از تلفیق دو یا چند مسئلهٔ دیگر که حداقل یکی از این مسئله‌ها مربوط به محاسبهٔ حجم و مساحت اجسام هندسی است را حل کند.

ویژگی‌ها و شاخص‌های سطح شی

-دانش آموز بتواند مسئله‌های تلفیقی را حل کند.
-دانش آموز توانایی رسم شکل یا نمودار را در مسئله داشته باشد.

مصادیق جبر و اعداد برای سطح شی

- دانش‌آموز بتواند مسئله‌هایی که دو یا چند زیر مسئله دارند(ممکن است هر دو زیر مسئله مربوط به مقدار عددی عبارت‌های جبری باشد یا این که یکی از زیرمسئله‌ها از مقدار عددی عبارت‌های جبری و بقیه از سایر مباحث ریاضی باشد)را حل کند.
- دانش‌آموز بتواند در حل مسئله‌های تلفیقی از مفهوم مقدار عددی به عنوان سطح عمل برای حل مسئله استفاده کند.
- دانش‌آموز بتواند مقدار عبارت جبری را به ازای سایر عبارت‌های ریاضی به‌دست آورد.

مصادیق هندسه و اندازه گیری برای سطح شی

- دانش‌آموز بتواند مسائل تلفیقی مفهوم حجم و مساحت اجسام هندسی را حل کند.
- دانش‌آموز بتواند جسم هندسی را رسم کند.
- دانش‌آموز بتواند شکل گستردهٔ جسم هندسی را به صورت سطح مقطعی رسم کند.
- دانش‌آموز بتواند شکل جسم هندسی را از زوایای مختلف تشخیص داده و رسم کند.

ویژگی‌ها و شاخص‌های سطح طرح‌واره

- دانش‌آموز بتواند مسئله‌های کلی که تمامی مباحث و ساختار های ذهنی را در خود جای داده است را حل کند.

مصادیق جبر و اعداد برای سطح طرح‌واره

- دانش‌آموز بتواند مسئله‌های کلی که تمامی مباحث و ساختارهای ذهنی مفهوم عبارت‌های جبری را در خود جای داده است را حل کند.

مصادیق هندسه و اندازه گیری برای سطح طرح‌واره

- دانش‌آموز بتواند مسئله‌های کلی که تمامی مباحث و ساختارهای ذهنی مفهوم حجم و مساحت اجسام هندسی را در خود جای داده است را حل کند.

در این پژوهش، ابتدا سطح درک دانش‌آموزان از مفاهیم مقدار عددی عبارت جبری و شناخت اجسام هندسی (هر دو مفهوم، پیش‌نیاز مفهوم اصلی مورد مطالعه دراین پژوهش یعنی محاسبه حجم و مساحت اجسام هندسی می‌باشد) براساس نظریهAPOS سنجیده شده و سپس مبانی اصلی طرح‌مسئله به دانش‌آموزان گروه‌آزمایش آموزش داده می‌شود و در پایان سطح درک دانش‌آموزان هر دو گروه‌آزمایش و گواه براساس نظریهAPOS از مفهوم حجم و مساحت اجسام هندسی سنجیده می‌شود.

روش پژوهش

طرح پژوهش حاضر از نوع نیمه‌تجربی با در نظر گرفتن گروه‌آزمایش و گروه‌گواه (کنترل) و استفاده از پیش‌آزمون و پس‌آزمون در هر دو گروه می‌باشد. در این طرح دانش‌آموزان دو کلاس از یک مدرسه که در آغاز سال تحصیلی به طور تقریبی همگن تقسیم‌بندی شده بودند به صورت تصادفی به عنوان گروه‌آزمایش و گروه‌گواه انتخاب شدند و به منظور بررسی همسانی واریانس‌های دو گروه، از پیش‌آزمون محقق ساخته استفاده شد. سپس در شش جلسه، مهارت‌های طرح‌مسئله برای گروه‌آزمایش آموزش داده شد و از هر دو گروه، پس‌آزمون محقق ساخته به‌عمل آمد. جامعهٔ آماری این پژوهش شامل کلیهٔ دانش‌آموزان پسر سال نهم در شهرستان سلماس استان آذربایجان‌غربی در سال تحصیلی ۱۴۰۰-۱۳۹۹ می‌باشد که تعداد آن‌ها ۱۲۵۰ نفر است. در این پژوهش از دو کلاس ۲۰ نفری پایهٔ نهم یکی از مدارس شهرستان سلماس استان آذربایجان‌غربی به عنوان نمونه در دسترس استفاده شد.

نمونه: دو کلاس پایهٔ نهم شامل ۲۰ نفر و جمعاً شامل ۴۰ نفر به‌عنوان نمونهٔ دردسترس برای گروه‌آزمایش و گواه انتخاب شد.

روایی: برای تعیین روایی سوالات پیش‌آزمون و پس‌آزمون در این پژوهش از روایی مجتوایی(CVR) استفاده شد. روایی محتوایی به این معناست که سوالات این آزمون‌ها تا چه حد نماینده و معرف موضوع مورد نظر در پژوهش هستند. در این پژوهش روایی آزمون‌ها توسط ۲۰ نفر از دبیران ریاضی مورد بررسی قرار گرفت. هم تعداد سوالات پیش‌آزمون و هم پس‌آزمون ۳۰ سوال بود که از بین آن‌ها برای هرکدام از آزمون‌ها۸ سوال که بیشترین مقدار روایی محتوایی را داشتند، انتخاب شد.

پایایی: برای تعیین پایایی پیش‌آزمون و پس‌آزمون،۱۶ سوال انتخابی در مرحلهٔ قبل را در دو نوبت در اختیار۲۰ دانش‌آموز پایهٔ نهم از مدرسه دیگر غیر از نمونه قرار گرفت. ضریب آلفای کرونباخ برای سوالات پیش‌آزمون۰/۷۹۴ و برای پس‌آزمون مقدار۰/۸۰۹ به‌دست آمد که وضعیت مناسبی برای پایایی آزمون‌ها را نشان می‌دهد.

روش اجرا: پس از مشخص شدن گروه‌آزمایش و گواه، پیش‌آزمون شامل۸ سوال محقق ساخته از مفاهیم مقدار عددی عبارت‌های جبری و شناخت اجسام هندسی به‌عمل آمد. با توجّه به این‌که هدف این پژوهش تعیین سطح درک دانش‌آموزان در مفهوم حجم و مساحت اجسام هندسی است و مفاهیم مقدار عددی عبارت‌جبری و شناخت اجسام هندسی، پیش‌نیاز مفهوم حجم و مساحت اجسام هندسی هستند، از سوالات این دو مفهوم برای پیش‌آزمون استفاده شد.

پس از پیش‌آزمون و تعیین سطح درک هر یک از دانش‌آموزان دو گروه براساس نظریهٔAPOS، شش جلسهٔ فوق-برنامه برای گروه‌آزمایش طبق جدول۴ برگزار شد.

هدف از این جلسات ایجاد و بالابردن توانایی طرح‌مسئلهٔ دانش‌آموزان گروه‌آزمایش بود و دراین جلسات اشاره‌ای به مفهوم حجم و مساحت اجسام هندسی نشد و از سایر مفاهیم ریاضی برای آموزش طرح‌مسئله استفاده شد و جلسهٔ فوق‌برنامه‌ای برای گروه‌گواه برگزار نشد.

پس از اتمام جلسات فوق‌برنامه، فصل هشتم کتاب ریاضی پایهٔ نهم که موضوع آن محاسبه حجم و مساحت اجسام هندسی است، برای هر دو گروه‌آزمایش و گواه تدریس شد. پس از آن، پس‌آزمون شامل ۸سوال محقق ساخته از مفهوم حجم و مساحت اجسام هندسی از هر دو گروه به‌عمل آمد.

تحقیقات خارجی و داخلی در رابطه با طرح‌مسئله یا نظریهٔAPOS

کمال اوزگن و همکاران[۲۵] براساس موقعیت‌های طرح‌مسئله استویانوا و الرتون که شامل موقعیت‌آزاد، نیمه-ساختاریافته و ساختاریافته است، پژوهشی را تحت عنوان مهارت‌هایی در طرح‌مسئله برای دانش‌آموزان پایهٔهشتم انجام دادند. براساس یافته‌های این تحقیق، دانش‌آموزان به طور معمول موفقیت کمی در موقعیت‌های متفاوت طرح‌مسئله دارند. طبق این تحقیق، بیشتر موفقیت دانش‌آموزان در موقعیت نیمه‌ساختاریافته بوده و موقعیت آزاد و ساختاریافته به ترتیب در رتبه بعدی قرار داشتند.

ماریا کاناداس و همکاران[۲۶] در پژوهشی تحت عنوان معانی داده‌شده به نمادهای جبری در طرح‌مسئله به بررسی خطاهای دانش‌آموزان در ترجمه از عبارت‌بیانی به عبارت‌جبری و برعکس پرداخته و سپس با مداخله طرح‌مسئله سعی در کاهش خطاها داشتند. طبق یافته‌های آن در بیشتر موارد، دانش‌آموزان، مسئله‌هایی را با ساختار زبانی متفاوت از خواسته اصلی سوال مطرح کردند. این مسئله‌ها متغیر یا رابطه بین متغیرها را دربر نگرفته بود. براساس این تحقیق، دانش‌آموزان مسئله‌های جمعی را خوب طرح کرده‌اند امّا در سایر موارد با مشکل مواجه هستند.

محمد خوشنود[۲۳] در پژوهشی به بررسی تأثیر کنترل از دیدگاه شونفیلد بر میزان افزایش سطح درک دانش-آموزان از موضوع حد براساس نظریهٔAPOS پرداخته است. نتایج حاصل از این تحقیق نشان می‌دهد که عامل کنترل در افزایش سطح درک دانش‌آموزان از موضوع حد بر مبنای نظریهٔAPOS مؤثر بوده و بر این مبنا عامل کنترل شونفیلد بیشترین تأثیر را به ترتیب بر سطوح طرح‌واره و شی داشته و تأثیر کمی بر سطوح دیگر یعنی عمل و فرآیند دارد.

وحید برجی[۲۷] در پژوهشی به بررسی تأثیر کاربرد نظریهAPOS-ACE در رشد درک نموداری دانشجویان از مفهوم مشتق پرداخته است. نتایج نشان داد که دانشجویان گروه‌آزمایش درک بهتری از مشتق در مقایسه با دانشجویان گروه‌کنترل داشتند. بنابراین، استفاده از چرخهٔ تدریسACE می‌تواند برای تدریس حساب دیفرانسیل وانتگرال، به خصوص مشتق، در توسعهٔ درک مفهومی فراگیران کمک کند.

فرضیهٔ پژوهش

– توانایی طرح‌مسئله بر سطح درک دانش‌آموزان در مفهوم حجم و مساحت اجسام هندسی براساس نظریهAPOS تأثیر دارد.

تحلیل و بررسی سوالات ارائه شده برای گروه آزمایش درطول جلسه‌های فوق برنامه

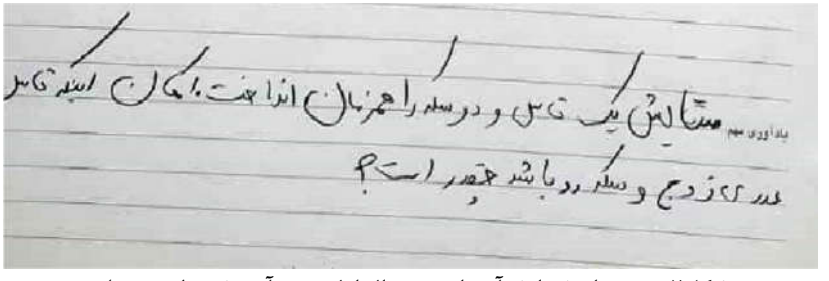
پس از پیش‌آزمون و تعیین سطح درک دانش‌آموزان دو گروه‌آزمایش و گواه بر اساس نظریهAPOS، دانش‌آموزان گروه‌آزمایش در شش جلسه، آموزش‌های مربوط به طرح‌مسئله را فرا گرفتند. در طول این جلسه‌ها، پنج آزمون هرکدام شامل یک سوال، برای تعیین و ارزشیابی توانایی و حدّتسلط دانش‌آموزان گروه‌آزمایش گرفته شد که نتایج آن به اختصار در ادامه آمده است.

تحلیل و بررسی سوال اول

صورت سوال اول به این شرح است:

– برای مبحث احتمال، یک مسئله بنویسید.

سوال فوق مربوط به موقعیت آزاد طبق چارچوب استویانوا و الرتون می‌باشد. از تعداد۲۰ نفر دانش‌آموز گروه-آزمایش، ۱۳نفر توانستند این سوال را صحیح پاسخ دهند که معادل۶۵ درصد از دانش‌آموزان گروه‌آزمایش می‌باشد. دلیل این نتیجه نیز شروع آموزش، تازگی مبحث برای دانش‌آموزان و ویژگی این موقعیت طرح‌مسئله است که باعث عدم تمرکز دانش‌آموزان می‌شود. نمونه‌ای از جواب دانش‌آموزان در شکل۲ آمده است:



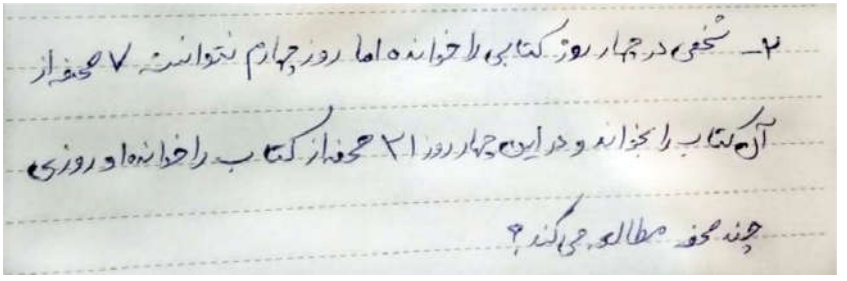
شکل۲. نمونه پاسخ دانش‌آموزان به سوال اول دوره آموزشی طرح‌مسئله

تحلیل و بررسی سوال دوم

صورت سوال دوم به این شرح است:

مسئله‌ای بنویسید که در حل آن از معادلهٔ $4x \quad 7 = 21$ استفاده شود و مربوط به مطالعه کتاب باشد.

سوال فوق مربوط به موقعیت نیمه‌ساختاریافته طبق چارچوب استویانوا و الرتون می‌باشد. از تعداد۲۰ نفر دانش‌آموز گروه‌آزمایش، ۱۶نفر توانستند این سوال را صحیح پاسخ دهند که معادل۸۰ درصد از دانش‌آموزان گروه‌آزمایش می باشد. نمونه‌ای از جواب دانش‌آموزان در شکل۳ آمده است:



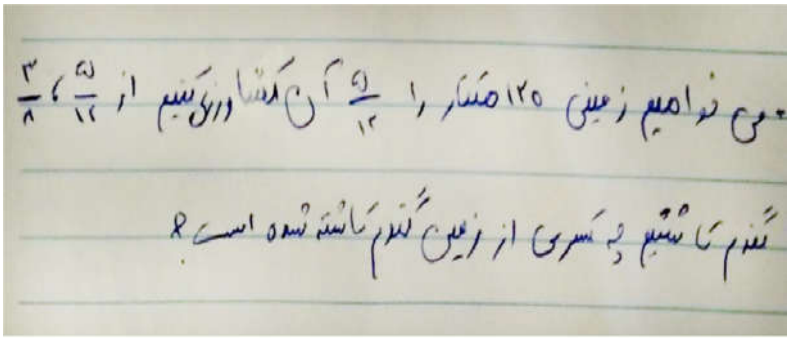
شکل۳. نمونه پاسخ دانش‌آموزان به سوال دوم دوره آموزش طرح‌مسئله

تحلیل و بررسی سوال سوم

صورت سوال سوم به شرح زیر است:

– مسئله‌ای بنویسید که در آن از مبحث ضرب کسرها و دو عدد $\frac{3}{8}$ و $\frac{5}{12}$ استفاده شود و درباره تقسیم یک زمین کشاورزی۱۲۰ هکتاری برای کاشت گندم باشد.

سوال فوق مربوط به موقعیت ساختاریافته طبق چارچوب استویانوا و الرتون می‌باشد. از تعداد۲۰ نفر دانش‌آموز گروه‌آزمایش، ۱۷نفر توانستند این سوال را صحیح پاسخ دهند که معادل۸۵ درصد از دانش‌آموزان گروه‌آزمایش می‌باشد و نشان دهندهٔ این است که بیشتر دانش‌آموزان توانسته‌اند موقعیت طرح‌مسئله در چارچوب استویانوا و الرتون به خوبی یاد بگیرند. نمونه‌ای از جواب دانش‌آموزان در شکل۴ آمده است:



شکل۴. نمونهٔ پاسخ دانش‌آموزان به سوال سوم دوره آموزش طرح‌مسئله

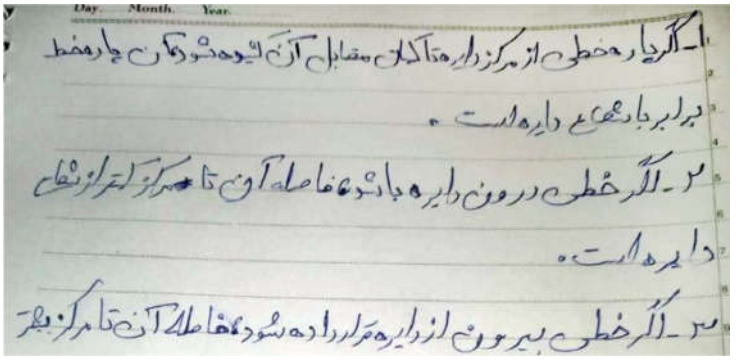
تحلیل و بررسی سوال چهارم

صورت سوال چهارم به شرح زیر است:

– به مسئله زیر دقت کنید و با توجه به آن و روش توضیح داده شده در جلسهٔ قبل، سه مسئله دیگر بنویسید:

«اگر نقطه‌ای روی دایره واقع باشد، فاصلهٔ آن تا مرکز دایره برابر شعاع است.»

این سوال بر اساس استراتژی «اگر نباشد، چه می‌شود؟» که توسط براون و والتر معرفی شده، طراحی شده است. تعداد۱۷ نفر از ۲۰نفر دانش‌آموز گروه‌آزمایش توانستند این سوال را صحیح پاسخ دهند که معادل۷۰ درصد از دانش‌آموزان گروه‌آزمایش می‌باشد و نشان دهندهٔ این است که بیشتر دانش‌آموزان توانسته‌اند این استراتژی را به خوبی یاد بگیرند. نمونه‌ای از جواب دانش‌آموزان در شکل۵ آمده است:



شکل۵. نمونهٔ پاسخ دانش‌آموزان به سوال چهارم دوره آموزش طرح‌مسئله

تحلیل و بررسی سوال پنجم

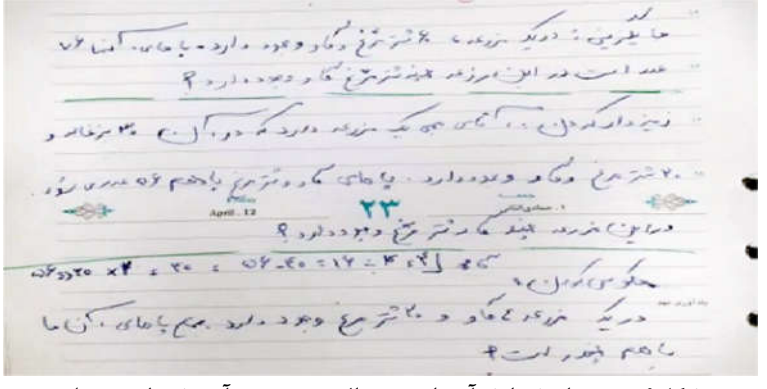
صورت سوال پنجم به این شرح است:

- به مسئله زیر توجه کنید و با استفاده از آن و روش‌های جایگزینی، زمینه‌دار کردن و معکوس‌کردن، سه مسئله جدید بسازید:

«در یک مزرعه، ۲۰شترمرغ و گاو وجود دارد. پاهای آن‌ها ۵۶عدد است. در این مزرعه چند شترمرغ و چند گاو وجود دارد؟»

این سوال بر اساس استراتژی ویسترو–یو برای طرح‌مسئله توسط دانش‌آموزان طراحی شده است.

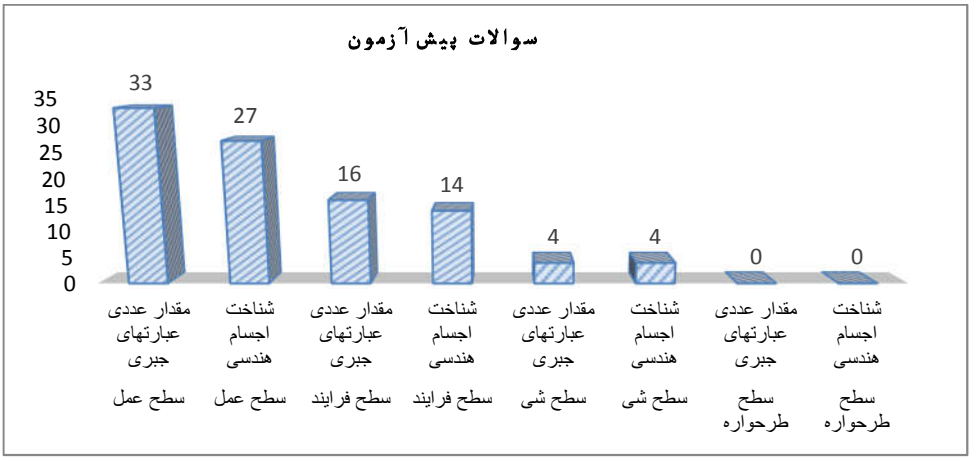
تعداد۱۵ نفر از دانش‌آموزان توانستند قسمت اول سوال را صحیح پاسخ دهند، این تعداد برای قسمت دوم سوال به عدد۱۲رسید امّا فقط ۹نفر از دانش‌آموزان توانستند قسمت سوم سوال (معکوس کردن) را صحیح پاسخ دهند و نشان دهندهٔ آن است که دانش‌آموزان نتوانسته‌اند درک صحیحی از این موقعیت طرح‌مسئله داشته باشند. نمونه‌ای از جواب دانش‌آموزان به این سوال در شکل۶ آمده است:



شکل۶. نمونه پاسخ دانش‌آموزان به سوال پنجم دوره آموزش طرح‌مسئله

یافته‌های تحقیق

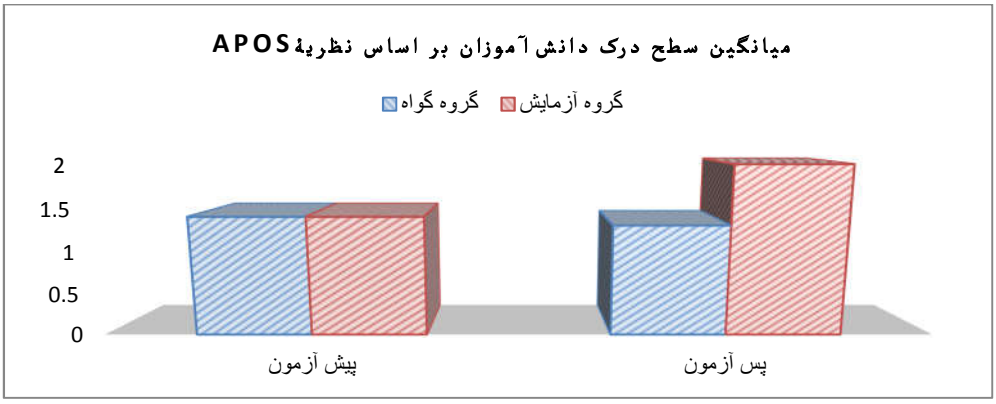
نتیجهٔ اجرای پیش‌آزمون محقق ساخته شامل۸ سوال از مفاهیم مقدار عددی عبارت‌های جبری و شناخت اجسام هندسی در نمودار۱ آمده است:



نمودار۱. تعداد دانش‌آموزانی که به سوالات پیش‌آزمون به تفکیک هر سوال پاسخ صحیح داده‌اند

همان‌طور که از نمودار۱ مشخص است، ۳۳نفر معادل۸۲.۵ درصد از دانش‌آموزان، سوال سطح عمل مقدارعددی عبارت‌های جبری را صحیح پاسخ داده‌اند. این مقدار برای سوال سطح عمل شناخت اجسام هندسی، ۲۷نفر معادل۶۷.۵ درصد است. طبق این نمودار،۱۶نفر معادل۴۰ درصد از دانش‌آموزان سوال سطح فرآیند مقدار عددی عبارت‌های جبری را صحیح پاسخ داده‌اند امّا این مقدار برای سطح فرآیند شناخت اجسام هندسی۱۴ نفر معادل۳۵ درصد از دانش‌آموزان است. درسطح شی، تعداد دانش‌آموزان با پاسخ صحیح برای هر دو مفهوم،۴ نفر معادل۱۰ درصد است و هیچ دانش‌آموزی به سطح طرحواره در هر دو مفهوم نرسیده است. این نتایج نشان می‌دهد که دانش‌آموزان از مفهوم مقدار عددی عبارت‌های جبری درک بهتری نسبت به مفهوم شناخت اجسام هندسی براساس نظریهٔAPOS دارند.

تعیین سطح دانش‌آموزان بر اساس نظریهٔAPOS به این صورت انجام گرفت که هر دانش‌آموز که سوال‌های۱ یا۲ که در سطح عمل هستند را صحیح پاسخ دهد، در سطح عمل قرار گرفته و نمرهٔ او۱ است. دانش‌آموزی که علاوه بر سوال‌های۱ یا۲، سوال‌های۳ یا۴ که از سطح فرآیند هستند را صحیح پاسخ دهد، در سطح فرآیند قرار گرفته و نمرهٔ او۲ است و به همین ترتیب نمرهٔ۳ برای سطح شی و نمرهٔ۴ برای سطح طرحواره در نظر گرفته شد و دانش-آموزی که نتواند هیچ یک از سوالات آزمون‌ها را صحیح پاسخ دهد، در سطح صفر قرار گرفته و نمرهٔ او۰ محاسبه می‌شود. براساس این نمره‌گزاری، میانگین نمرات دانش‌آموزان گروه‌گواه و آزمایش در پیش‌آزمون و پس‌آزمون در نمودار۲ آمده است:



نمودار۲. مقایسهٔ میانگین سطح درک دانش‌آموزان گروه آزمایش و گواه در پیش‌آزمون و پس‌آزمون براساس نظریهAPOS

براساس این نمودار، میانگین سطح درک دانش‌آموزان براساس نظریهAPOS در پیش‌آزمون برای هر دو گروه-آزمایش و گواه ۱/۴ و در پس‌آزمون، میانگین گروه‌آزمایش برابر۲ و گروه‌گواه برابر۱/۳ است.

بررسی استنباطی داده‌ها

از نمودار۲ مشخص است که میانگین دو گروه‌آزمایش و گواه در پیش‌آزمون برابر۱/۴ است اما برای همسانی واریانس‌های دوگروه در پیش‌آزمون از «آزمون لوین» استفاده شد. نتیجه این آزمون به این صورت بود که فرضیهٔ آزمون، برابری واریانس‌های دو گروه‌آزمایش و گواه در پیش‌آزمون مورد بررسی قرار گرفت. سطح معناداری در آزمون لوین عدد۰/۵۰۹ به‌دست آمد و این عدد از مقدار۰/۰۵ بیشتر است، بنابراین فرضیهٔ‌آزمون که همان برابری واریانس‌های دو گروه‌آزمایش و گواه است ، تایید می‌شود.

برای یافتن آزمون فرض مناسب و بررسی معنادار بودن اختلاف گروه‌آزمایش و گروه‌گواه باید نرمال بودن داده‌ها مورد بررسی قرار گیرد تا از این طریق پارامتریک بودن یا ناپارمتریک بودن داده‌ها مشخص شود.

با توجّه به این که متغیر اصلی این پژوهش(سطح درک دانش آموزان بر اساس نظریهAPOS) مقیاسی رتبه‌ای است، می‌توان نتیجه گرفت که داده‌ها ناپارامتریک هستند امّا برای اطمینان بیشتر از آزمون کولموگروف-اسمیرنوف برای بررسی نرمال بودن داده‌ها استفاده شد. در این آزمون، فرضیهٔ آزمون، نرمال بودن داده‌های پیش-آزمون و پس‌آزمون برای گروه‌گواه و گروه‌آزمایش بود. سطح معناداری این آزمون برای پیش‌آزمون و پس‌آزمون گروه‌های آزمایش و گواه کمتر از مقدار۰/۰۵ شد، لذا فرضیهٔ آزمون رد شده، داده‌ها نرمال نیستند و از آزمون‌های ناپارامتریک استفاده شد.

بررسی فرضیهٔ پژوهش

– توانایی طرح‌مسئله بر سطح درک دانش‌آموزان در مفهوم حجم و مساحت اجسام هندسی براساس نظریهAPOS تأثیر دارد.

با توجّه به مقیاس رتبه‌ای بودن متغیر اصلی این پژوهش(سطح درک دانش‌آموزان بر اساس نظریهAPOS)، مستقل بودن گروه‌گواه و گروه‌آزمایش نسبت به هم و ناپارامتریک بودن داده‌ها از آزمون U مان–ویتنی برای بررسی معنادار بودن اختلاف داده‌های گروه‌گواه و گروه‌آزمایش در پس‌آزمون استفاده شد. در آزمون U مان_ویتنی، فرضیهٔ‌آزمون، نبودن اختلاف معنادار بین داده‌های گروه‌گواه و گروه‌آزمایش در پس‌آزمون است. امّا

مقدار سطح معناداری این آزمون برابر۰/۰۳۹ شد و این مقدار از عدد۰/۰۵ کمتر است، پس فرضیۀآزمون باطل بوده و اختلاف معناداری بین داده‌های گروه‌گواه و گروه‌آزمایش در پس‌آزمون وجود داشت.

با توجّه به این‌که داده‌های پیش‌آزمون و پس‌آزمون گروه‌آزمایش مستقل نیستند، از آزمون ویلکاسون برای بررسی معنادار بودن اختلاف این داده‌ها استفاده شد. در آزمون‌ویلکاسون، فرضیۀآزمون، نبودن اختلاف معنادار بین سطح درک دانش‌آموزان گروه‌آزمایش در پیش‌آزمون و پس‌آزمون است. مقدار سطح معناداری عدد۰/۰۰۱ است که از عدد۰/۰۵ کمتر شد لذا، فرضیۀآزمون باطل بوده و تفاوت معناداری بین سطح درک دانش‌آموزان گروه‌آزمایش در پیش‌آزمون و پس‌آزمون وجود داشت.

بحث و نتیجه‌گیری

نظریۀAPOS یک نظریۀ ساختارگرایی است که ساختار ذهنی فرد حین انجام فعالیت‌های ریاضی را مورد بررسی قرار می‌دهد و سطوح مختلفی برای ارزیابی دارد که شامل عمل، فرآیند، شی و طرح‌واره است و یکی از اهداف اصلی آن، بررسی و ارزیابی سطح درک ریاضی دانش‌آموزان هنگام فعالیت ریاضی است.

هدف هر طرح آموزشی و یا پژوهشی حوزۀ آموزش ریاضی، بهبود سطح درک ریاضی دانش‌آموزان در مفاهیم گوناگون ریاضی است. از سال ۱۹۷۰، زمانی که پائولو فریر اصطلاح آموزش طرح‌مسئله را در کتاب خود تحت عنوان«پداگوژی مستضعفان[۵۰]» به‌عنوان استعاره‌ای برای تأکید بر تفکر انتقادی معرفی کرد، روش طرح‌مسئله به حوزه‌های مختلف دانش راه یافت[۶]. در این روش به دانش‌آموزان فرصت مناسبی داده می‌شود تا مسئله‌های خود را به شیوه‌های مختلفی بسازند. طرح‌مسئله می‌تواند روش مناسبی برای گذار از کلاس‌های معلم محور به کلاس-های دانش‌آموز محور باشد و سبب بهبود سطح درک ریاضی دانش‌آموزان در مفاهیم گوناگون ریاضی شود.

براساس نتایج حاصل از این پژوهش، توانایی طرح‌مسئله سبب اختلاف معنادار بین سطح درک ریاضی دانش‌آموزان گروه‌آزمایش و گروه‌گواه براساس نظریۀAPOS به سود گروه‌آزمایش شد. این امر نشان می‌دهد که دانش‌آموزی که توانایی طرح‌مسئله داشته باشد، درک بهتری از مفهوم حجم و مساحت اجسام هندسی نسبت به دانش‌آموزی که فاقد این توانایی است، دارد. هم‌چنین طرح‌مسئله سبب بهبود سطح درک ریاضی دانش‌آموز براساس نظریۀAPOS می‌شود. نتایج تحقیق حاضر به دانش‌آموزان پایۀ نهم یکی از مدارس شهرستان سلماس استان آذربایجان‌غربی مربوط است. لذا تعمیم این نتایج به سایر دانش‌آموزان کشور و سایر پایه‌ها با محدودیت مواجه است. هم‌چنین همۀ دانش‌آموزان شرکت کننده در این پژوهش پسر بودند و نمی‌توان نتایج آن را به دانش‌آموزان دختر تعمیم داد.

معلّمان علاوه بر نمره‌گزاری معمولی، می‌توانند طبق نظریۀAPOS سطح درک ریاضی دانش‌آموزان را ارزیابی کنند که مدلی علمی و کارآمد است.

طرح‌مسئله روش نوین آموزشی است که سبب پرورش گفتمان ریاضی در کلاس درس می‌شود. طرح‌مسئله توسط دانش‌آموز طی کلاس یا در آزمون تشخیصی می‌تواند بینش او را نسبت به بحث و موضوع کلاس مشخص کند و براساس آن معلّم پی می‌برد که دانش‌آموز در کدام مرحلۀ درک قرار گرفته است.

فهرست منابع

[1] National Research Council.(2001). Adding it up: Helping children learn mathematics. J. Kilpatrick, J. Swafford, and B. Findell (Eds.). Mathematics Learning Study Committee, Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education. Washington, DC: National Academy Press.

[2] سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی (۱۳۹۶). هندسه۱، پایهٔ دهم دوره دوم متوسطه، شرکت چاپ و نشر کتابهای درسی ایران.

[3] Silver, E. A.(1994): On mathematical problem posing . For the Learning of Mathematics, 14(1), 19–28.

[4] Erdik, C.(2019). Investigation of Mathematics Teachers' Opinions about Problem Posing. Journal on Mathematics Education, 10(1), 1-20

[5] Arnon et al.(2014), APOS Theory: A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education, Springer Science+Business Media New York2014

[6] Cai et al.(2015), Mathematical Problem Posing : From Research to Effective Practice, Springer Science+Business Media New York 2015

[7] Cildir, s & sezen, n(2011). A study on the evaluation of problem posing skills in terms of academic success. Procedia Social and Behavioral Sciences15, 2494–2499.

[8] Kontorovich,I. et al(2012): An exploratory framework for handling the complexity of mathematical problem posing in small groups. Journal of Mathematical Behavior 31(1), 149– 161.

[9] ریحانی، ابراهیم و اسکندری، مجتبی.(۱۳۹۳). بررسی فرآیند طرح‌مسئله در آموزش ریاضی. دو فصل نامه نظریه و عمل در برنامه درسی، سال دوم، شماره۳، بهار و تابستان۱۱۷،۱۳۹۳-۱۴۰

[10] NCTM.(2000): Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics, Inc.

[11] Stoyanova, E. & Ellerton, N. F.(1996). A framework for research into students' problem posing. P. Clarkson(Ed.), Technology in Mathematics Education,(pp.518–525). Melbourne: Mathematics Education Research Group of Australasia.

[12] English, Lyn D.(1997). The Development of Fifth-Grade Children's Problem-Posing Abilities. Educational Studies in Mathematics, 34(3): 183-217.

[13] Christou, C et al. (2005). An Empirical Taxonomy of Problem Posing Processes. International Reviews on Mathematical Education, 37(3), 1-10.

[14] Brown, S. I. & Walter, M. I.(2005). The art of problem posing. London, Lawrence Erlbaum Associates, Ink

[15] Lavy, I. & Bershadsky, I.(2003). Problem Posing via "What if not?" strategy in Solid Geometry - A Case Study. The Journal of Mathematical Behavior, 22(4), 369-387.

[16] Contreras, José(2007). Unraveling the Mystery of the Origin of Mathematical Problems: Using a Problem-Posing Framework With Prospective Mathematics Teachers. The Mathematics Educator, 17(2), 15–23.

[17] Song, S. H. et al(2007). Posing problems with use the ‘what if not?’ strategy in nim game. In Woo, J. H. Lew, H. C. Park, K. S. & Seo, D. Y. (Eds). Proceedings of the 31st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education(pp. 193-200). Seoul: PME.

[18] Vistro-Yu, C.(2009). Using Innovation Techniques to Generate New Problems. In: In B. Kaur, Y. B. Har, M. Kapur (Eds.), Mathematical Problem Solving (pp.185-207). Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

[19] Asiala, M. et al(1996).A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education.In Research in Collegiate mathematics education II. CBMS issues in mathematics education(Vol. 6, pp. 1–32). Providence, RI: American Mathematical Society.

[20] Tall, D. (1999). What is the object of the encapsulation of process? Proc. Of MERGA (pp.132-139). New Zealand: Rotarua.

[21] Weyer, S.(2010). APOS Theory as a Conceptualization for Understanding Mathematical Learning. Summation: Mathematics and Computer Science Scholarship at Ripon, 3, 9-15.

[22] نظری،کامل(۱۳۹۰). بررسی تاثیر تدریس بر میزان درک دانش‌آموزان دختر سال سوم ریاضی از مفهوم حد و رشد توانایی فضایی آن‌ها با تاکید بر فعالیت‌های مبتنی بر تجسم، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، تهران، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی.

[23] خوشنود خناچاه، محمد(۱۳۹۷)، تأثیر کنترل از دیدگاه شونفیلد بر میزان افزایش سطح درک دانش‌آموزان از موضوع حد براساس نظریهAPOS، پایان‌نامه کارشناسی ارشد، تهران، پردیس شهید چمران، مرکز آموزش عالی شهید بهشتی.

[24]Matenga Bernard (2016). Exploring Students’ Understanding Of Ordinary Differential Equations At A High School In Bikita District: A Case Of An Apos Theory , requirements For A Degree Of Master Of Science Education In Mathematics, Zimbabwe , Bindura , University Of Science Education.

[25] Kemal Ozgen et al ,(2019), An Investigation of Eighth Grade Students’ Skills in Problem-Posing , International Journal For Mathematics Teaching And Learning 2019, Vol. 20.1, 106-130

[26] María C. Cañadas et al ,(2018), Meanings given to algebraic symbolism in problem-posing , Springer Science+Business Media B.V., part of Springer Nature2018

[27] برجی، وحید(۱۳۹۷)، بررسی تأثیر کاربرد نظریهAPOS-ACE در رشد درک نموداری دانشجویان از مفهوم مشتق، پایان‌نامه دکتری، مشهد، دانشگاه فردوسی، دانشکده علوم ریاضی.