دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره سی و هشتم، مهر و آبان ۱۴۰۱
شماره شاپا: ۵۸۸-۲۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

بهینگی غیرهموار برای مسائل بهینه‌سازی چندهدفه استوار

مریم سعادتی[۱]، مرتضی اویسی‌ها[۲]*

[۱و۲] گروه ریاضی محض، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بین‌المللی امام خمینی (ره)، قزوین، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۰۵/۱۹ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۲/۰۷

چکیده

این مقاله به بررسی مسائل بهینه‌سازی چندهدفه استوار غیرمحدب/غیرهموار با محدودیت‌های مساوی و نامساوی نامعین می‌پردازد. ابتدا با به‌کارگیری بعضی ابزارهای پیشرفته آنالیز تغییراتی از قبیل اصل تخمین اکسترمال و قاعده جمع فازی ضعیف برای زیردیفرانسیل فرشه، یک شرط بهینگی لازم فازی برای مسئله بهینه‌سازی چندهدفه غیرمحدب/غیرهموار را بدون هرگونه محدودیت به مفهوم زیردیفرانسیل فرشه بدست می‌آوریم. سپس با بهره‌گیری از شرط بهینگی لازم فازی بدست آمده، نسخه غیرهموار قاعده فرما و همچنین فرمول‌های زیردیفرانسیل حدی برای یک خانواده نامتناهی از توابع غیرهموار، یک شرط بهینگی لازم برحسب زیردیفرانسیل حدی برای جواب‌های کارای استوار ضعیف مسئله مورد نظر بدست می‌آوریم. بعلاوه، مثالی به‌منظور نشان دادن این شرط برای یک مسئله بهینه‌سازی چندهدفه نامعین شامل محدودیت‌های مساوی و نامساوی ارائه می‌گردد. در نهایت، شرایط کافی برای جواب‌های کارای استوار ضعیف و جواب‌های کارای استوار این مسائل، با ارائه مفاهیم جدید تحدب تعمیم‌یافته مورد بررسی قرار می‌گیرد.

واژه‌های کلیدی: بهینه‌سازی چندهدفه استوار غیرهموار، جواب‌های کارای استوار ضعیف، شرایط بهینگی، زیردیفرانسیل حدی، تحدب تعمیم‌یافته.

* عهده‌دار مکاتبات: Email: oveisiha@sci.ikiu.ac.ir

۱- مقدمه

بهینه‌سازی استوار به یکی از ساختارهای معین و قدرتمند برای مطالعه مسائل بهینه‌سازی تحت داده‌های با عدم قطعیت بدل شده است [۱-۴]. یک مسئله بهینه‌سازی نامعین را می‌توان با قرین استوار خود به‌گونه‌ای مرتبط ساخت که در مسئله بهینه‌سازی استوار اهداف و محدودیت‌های نامعین برای همه سناریوهای درون مجموعه نامعین صدق کنند. روش بهینه‌سازی استوار مواردی را مورد بررسی قرار می‌دهد که در آن‌ها هیچ اطلاعات احتمالاتی در مورد عدم قطعیت‌ها نداشته باشیم. به خصوص، اکثر مسائل بهینه‌سازی به‌دلیل وجود خطاهای اندازه‌گیری، توسعه‌های غیرقابل پیش‌بینی آینده و نوسانات یا اختلالات، اغلب با داده‌های نامعین سروکار دارند و به دلیل توابع تصمیم چندهدفه که معیارهای بهینه‌سازی مختلف دارند، به اهداف متناقض بستگی دارند. بنابراین، بهینه‌سازی چندهدفه استوار در تئوری بهینه‌سازی از محبوبیت فراوان و در کاربرد از اهمیت بالایی برخوردار است.

ایده اولیه بهینه‌سازی چندهدفه استوار توسط برانک [۵] مورد پرسش قرار گرفت و سپس توسط دب و گوتا [۶] مورد مطالعه قرار گرفت. در اینجا، مفهوم استوار به‌عنوان نوعی حساسیت در فضای هدف مقابل اختلالات در فضای تصمیم ارائه شد. مفاهیم مختلفی از استواری برای مسائل بهینه‌سازی چندهدفه نامعین را می‌توان در [۷-۱۲] دید.

اخیراً، چونگ [۱۳] مسائل بهینه‌سازی چندهدفه نامعین را با توابع غیرمحدب/غیرهموار مورد بررسی قرار داد و مفهوم (اکیداً) تحدب تعمیم‌یافته را برای ایجاد تئوری بهینگی و دوگانگی برحسب زیردیفرانسیل حدی برای جواب‌های پارتو استوار و جواب‌های پارتو استوار ضعیف معرفی نمود. چن [۱۴] شرایط لازم/کافی برحسب زیردیفرانسیل کلارک برای جواب‌های کارای استوار ضعیف و جواب‌های کارای استوار سره مسئله بهینه‌سازی چندهدفه غیرهموار با داده‌های نامعین را مورد مطالعه قرار داد و مسئله دوگان نوع موند-ویر و مسئله دوگان نوع ولف را فرمول‌بندی کرد و نتایج دوگانگی بین مسائل اولیه و دوگان آن‌ها را تحت فرضیات تحدب تعمیم‌یافته مورد بررسی قرار داد.

قدرت‌مندترین نتایج در این راستا، برای مسائل متناهی بعد با محدودیت‌های نامساوی برای انواع مختلف توابع محدب تعمیم‌یافته مورد بررسی قرار گرفته‌اند. هدف اصلی ما در این مقاله، بررسی مسئله بهینه‌سازی چندهدفه غیرمحدب/غیرهموار با محدودیت‌های نامساوی و مساوی در فضای آسپلاند اختیاری (به‌طور خلاصه (UP)) تحت فرضیات محدب‌نما می‌باشد. ابتدا، شرایط بهینگی لازم فازی را برای مسئله بهینه‌سازی چندهدفه غیرمحدب/غیرهموار بدون محدودیت بدست می‌آوریم، سپس قضیه بهینگی لازم برای جواب کارای استوار ضعیف مسئله (UP) را با به‌کارگیری شرایط فازی بدست آمده، ایجاد می‌کنیم. به‌طور دقیق‌تر، ابزارهای اصلی برای بدست آوردن این شرایط، اصل تخمین اکسترمال و قاعده جمع فازی ضعیف زیردیفرانسیل فرشه [۱۵] می‌باشند. در ادامه، شرایط کافی برای جواب‌های کارای استوار ضعیف و جواب‌های کارای استوار چنین مسئله‌ای را با به‌کارگیری مفاهیم جدیدی از توابع محدب‌نما نوع ۱ (نوع ۲) فراهم می‌نماییم.

۲- مفاهیم و تعاریف اولیه

در این مقاله از نمادگذاری‌های استاندارد در حوزه آنالیز تغییراتی استفاده می‌شود. در سرتاسر مقاله، همه فضاها آسپلاند هستند، مگر آن‌که فضای به‌کار رفته مشخصاً ذکر شود. نرم این فضاها را با $\|.\|$ و نگاشت دوگانگی بین فضای X و فضای دوگان X^* را با $\langle \cdot,\cdot \rangle$ نشان می‌دهیم. نرم فضای حاصلضرب $X\times Y$ به‌صورت $\|(x,y)\|:=\|x\|+\|y\|$

تعریف می‌شود که در آن $x \in X$ و $y \in Y$ است و فضای دوگان $X^* \times Y^*$ مجهز به نرم ماکسیمم $\|(x^*, y^*)\| := \max\{\|x^*\|, \|y^*\|\}$ برای هر $x^* \in X^*$ و $y^* \in Y^*$ است. نماد $B_X(x,r)$ نمایانگر کره بسته با مرکزیت $x \in X$ و شعاع $r > 0$ است. همچنین B_X و B_{X^*} به‌ترتیب کره واحد بسته در X و X^* را نشان می‌دهند. فرض کنید مجموعه ناتهی $\Omega \subset X$ موجود باشد. نمادهای $\mathrm{cl}\,\Omega$، $\mathrm{co}\,\Omega$ و $\mathrm{int}\,\Omega$ به‌ترتیب نشانگر غلاف محدب، بستار توپولوژیکی و درون توپولوژیکی Ω هستند. مخروط دوگان Ω، مجموعه

$$\Omega^+ := \left\{x^* \in X^* \mid \langle x^*, x\rangle \geq 0,\ \forall x \in \Omega\right\}$$

است. علاوه‌براین، $\mathbb{R}^n_+$ نشانگر اعضای نامنفی $\mathbb{R}^n$ برای $n \in \mathbb{N} := \{1, 2, \ldots\}$ می‌باشد.

نگاشت مجموعه‌مقدار $F : \Omega \subset X \to Y$ را در $\bar{x} \in \Omega$ بسته نامند، اگر برای هر دنباله $\{x_k\} \subset \Omega$ که $x_k \to \bar{x}$ و هر دنباله $\{y_k\} \subset Y$ که $y_k \in F(x_k)$ و $y_k \to \bar{y}$ داشته باشیم $\bar{y} \in F(\bar{x})$.

برای یک نگاشت مجموعه‌مقدار $F : X \to X^*$، حد بالایی/برونی پینلف-کوراتوفسکی دنباله‌ای F وقتی‌که $x \to \bar{x}$ برحسب توپولوژی نرم X و توپولوژی ضعیف ستاره X^* به‌صورت

$$\mathop{\mathrm{Lim\,sup}}_{x \to \bar{x}} F(x) := \Big\{x^* \in X^* \mid \exists x_k \to \bar{x} \text{ and } x_k^* \xrightarrow{w^*} x^* \text{ with } x_k^* \in F(x_k) \text{ for all } k \in \mathbb{N}\Big\}.$$

تعریف می‌شود.

فرض کنید $\Omega \subset X$ مجموعه موضعاً بسته در $\bar{x} \in \Omega$ باشد، بدین معنی که یک همسایگی U از $\bar{x}$ وجود داشته باشد چنان‌که $\Omega \cap \mathrm{cl}\,U$ بسته باشد. مخروط نرمال فرشه $\hat{N}(\bar{x};\Omega)$ و مخروط نرمال حدی/موردوخویچ $N(\bar{x};\Omega)$ به Ω در $\bar{x} \in \Omega$ بدین‌گونه تعریف می‌شوند که

$$\hat{N}(\bar{x};\Omega) := \left\{x^* \in X^* \mid \limsup_{x \xrightarrow{\Omega} \bar{x}} \frac{\langle x^*, x - \bar{x}\rangle}{\|x - \bar{x}\|} \leq 0\right\}, \tag{۱}$$

$$N(\bar{x};\Omega) := \mathop{\mathrm{Lim\,sup}}_{x \xrightarrow{\Omega} \bar{x}} \hat{N}(x;\Omega), \tag{۲}$$

که $x \xrightarrow{\Omega} \bar{x}$ جایگزین $x \to \bar{x}$ با $x \in \Omega$ است. اگر $\bar{x} \notin \Omega$، آن‌گاه قرار می‌دهیم $\hat{N}(\bar{x};\Omega) := N(\bar{x};\Omega) := \emptyset$.

یادآوری می‌کنیم $\bar{x} \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ یک نقطه اکسترمال موضعی مجموعه‌های Ω_1 و Ω_2 در فضای X است، اگر یک همسایگی U از $\bar{x}$ وجود داشته باشد به‌طوری‌که برای هر $\varepsilon > 0$ وجود داشته باشد $a \in \varepsilon B_X$ که $(\Omega_1 + a) \cap \Omega_2 \cap U = \emptyset$. با توجه به این‌که X فضایی آسپلاند است، اصل تقریب اکسترمال برقرار است ([۱۵، قضیه ۲۰.۲] را ببینید)، بدین معنی که اگر $\bar{x} \in \Omega_1 \cap \Omega_2$ یک نقطه اکسترمال موضعی مجموعه‌های Ω_1 و Ω_2 باشد، آن‌گاه برای هر $\varepsilon > 0$ وجود دارند $x^1 \in \Omega_1 \cap B_X(\bar{x}, \varepsilon)$، $x^2 \in \Omega_2 \cap B_X(\bar{x}, \varepsilon)$ و $x^* \in X^*$ با شرط $\|x^*\| = 1$ به‌قسمی‌که

$$x^* \in (\hat{N}(x^1;\Omega_1) + \varepsilon B_X) \cap (-\hat{N}(x^2;\Omega_2) + \varepsilon B_X). \tag{۳}$$

برای یک تابع حقیقی‌مقدار توسعه‌یافته $\varphi : X \to \overline{\mathbb{R}}$، تعاریف زیر دیفرانسیل حدی/ مورد خویچ و زیر دیفرانسیل فرشه φ در $\bar{x} \in \mathrm{dom}\,\varphi$ به‌صورت زیر می‌باشند:

$$\partial\varphi(\bar{x}) := \{x^* \in X^* \mid (x^*, -1) \in N((\bar{x}, \varphi(\bar{x})); \mathrm{epi}\,\varphi)\}$$

و

$$\hat{\partial}\varphi(\bar{x}) := \{x^* \in X^* \mid (x^*, -1) \in \hat{N}((\bar{x}, \varphi(\bar{x})); \mathrm{epi}\,\varphi)\}.$$

اگر $|\varphi(\bar{x})|=\infty$، آن‌گاه قرار می‌دهیم $\partial\varphi(\bar{x}):=\hat{\partial}\varphi(\bar{x}):=\emptyset$.

با استفاده ازرابطه (۲)، به رابطه بین زیردیفرانسیل‌ها به‌شکل زیر می‌رسیم:

$$\hat{\partial}\varphi(\bar{x})\subset\partial\varphi(\bar{x}),\ \ \forall\bar{x}\in X.$$

برای یک نگاشت تک‌مقدار $f:X\to Y$ و $y^*\in Y^*$ تعریف می‌کنیم

$$\langle y^*,f\rangle(x):=\langle y^*,f(x)\rangle,\ \ \forall x\in X$$

و می‌نویسیم

$$\operatorname{gph}f:=\{(x,y)\in X\times Y\mid y=f(x)\}.$$

اکنون نتایج مهمی از روابط زیردیفرانسیل توابع عددی‌ساز ارائه می‌کنیم.

لم ۱.۲. فرض کنید $y^*\in Y^*$ و $f:X\to Y$ یک تابع پیوسته لیپشیتس حول $\bar{x}\in X$ باشد. داریم:

(۱) **([۱۶، گزاره ۵.۳])**

$$x^*\in\hat{\partial}\langle y^*,f\rangle(\bar{x})\Leftrightarrow(x^*,-y^*)\in\hat{N}((\bar{x},f(\bar{x}));\operatorname{gph}f).$$

(۲) **([۱۵، قضیه ۹۰.۱])**

$$x^*\in\partial\langle y^*,f\rangle(\bar{x})\Leftrightarrow(x^*,-y^*)\in N((\bar{x},f(\bar{x}));\operatorname{gph}f).$$

نتیجه مهم بعدی، قاعده جمع برای زیردیفرانسیل حدی است.

لم ۲.۲. **([۱۵، قضیه ۳۶.۳])** فرض کنید $\varphi_i:X\to\overline{\mathbb{R}}$ $(i\in\{1,2,...,n\},\ n\geq 2)$ توابع نیم پیوسته پایینی حول $\bar{x}\in X$ باشند و همین‌طور فرض کنیم همه به‌جز یکی از توابع پیوسته لیپشیتس حول $\bar{x}\in X$ باشند. آن‌گاه داریم:

$$\partial(\varphi_1+\varphi_2+...+\varphi_n)(\bar{x})\subset\partial\varphi_1(\bar{x})+\partial\varphi_2(\bar{x})+...+\partial\varphi_n(\bar{x}).$$

نتیجه دیگر، قاعده جمع فازی ضعیف برای زیردیفرانسیل فرشه است.

لم ۳.۲. **([۱۷،لم ۲۷.۵])** فرض کنید $\varphi_i:X\to\overline{\mathbb{R}}$، $i=1,2$، توابع نیم‌پیوسته پایینی حول $\bar{x}\in\operatorname{dom}\varphi_1\bigcap\operatorname{dom}\varphi_2$ باشند. سپس برای هر $\varepsilon>0$ و $x^*\in\hat{\partial}(\varphi_1+\varphi_2)(\bar{x})$، وجود دارند $x_i\in\bar{x}+\varepsilon B_X$ و $x_i^*\in\hat{\partial}\varphi_i(x_i)$ به‌طوری‌که $|\varphi_i(x_i)-\varphi_i(\bar{x})|\leq\varepsilon$ برای $i=1,2$ و

$$x^*\in x_1^*+x_2^*+\varepsilon B_{X^*}.$$

لم‌های پیش‌رو فرمول‌های خاصی برای محاسبه زیردیفرانسیل حدی توابع ماکسیمم در فضاهای آسپلاند ارائه می‌کنند. نماد ∂_x عملگر زیردیفرانسیل حدی مربوط به مولفه x را نشان می‌دهد.

لم ۴.۲. **([۱۳])** فرض کنید V یک فضای توپولوژیکی به‌طور دنباله‌ای فشرده باشد. همچنین فرض کنید $g:X\times V\to\mathbb{R}$ یک تابع باشد به‌طوری‌که برای هر $w\in V$ ثابت، $g(.,w)$ روی X پیوسته لیپشیتس باشد و برای هر $x\in X$ ثابت، $g(x,.)$ روی V نیم‌پیوسته بالایی باشد. فرض کنید $\varphi(x):=\max_{w\in V}g(x,w)$. اگر نگاشت مجموعه‌مقدار

$$(x,w)\in X\times V\to\partial_x g(x,w)\subset X^*$$

در $(\bar{x},v)$ برای هر $v\in V(\bar{x})$ بسته باشد، آن‌گاه مجموعه $\operatorname{cl}\operatorname{co}\left(\bigcup\{\partial_x g(\bar{x},v)\mid v\in V(\bar{x})\}\right)$ ناتهی است و

$$\partial\varphi(\bar{x})\subset\operatorname{cl}\operatorname{co}\left(\bigcup\{\partial_x g(\bar{x},v)\mid v\in V(\bar{x})\}\right)$$

که

$$V(\bar{x})=\{v\in V\mid g(\bar{x},v)=\varphi(\bar{x})\}.$$

لم زیر، زیردیفرانسیل حدی را برای ماکسیمم خانواده متناهی از توابع در فضاهای آسپلاند محاسبه می‌کند.

لم ۵.۲. (**[۱۵]، قضیه ۴۶.۳**) فرض کنید $\varphi_i : X \to \mathbb{R}$ $(i \in \{1,2,...,n\},\ n \geq 2)$ توابع پیوسته لیپشیتس حول $\bar{x} \in X$ باشند. قرار می‌دهیم $\varphi(x) := \max_{i \in \{1,2,...,n\}} \varphi_i(x)$. آن‌گاه

$$\partial\varphi(\bar{x}) \subset \bigcup \Big\{ \partial\Big(\sum_{i \in I(\bar{x})} \mu_i \varphi_i \Big)(\bar{x}) \mid (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n) \in \Lambda(\bar{x}) \Big\}$$

که

$$I(\bar{x}) := \{ i \in \{1,2,...,n\} \mid \varphi_i(\bar{x}) = \varphi(\bar{x}) \}$$

و

$$\Lambda(\bar{x}) := \{ (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n) \mid \mu_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1,\ \mu_i(\varphi_i(\bar{x}) - \varphi(\bar{x})) = 0 \}.$$

سرانجام، فرض کنید $I := \{1,2,...,n\}$ و $J := \{1,2,...,m\}$ مجموعه‌های اندیس باشند. فرض کنید $f : X \to Y$ یک تابع برداری‌مقدار لیپشیتس و $K \subset Y$ یک مخروط محدب، بسته و راسی ($K \cap (-K) = \{0\}$) باشد. مسئله بهینه سازی چندهدفه زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\text{(P)} \quad \begin{aligned} & \min_K f(x) \\ & \text{s.t. } g_i(x) \leq 0, \quad i \in I, \\ & \qquad h_j(x) = 0, \quad j \in J, \end{aligned}$$

که $g_i : X \to \mathbb{R}$ و $h_j : X \to \mathbb{R}$ محدودیت‌ها را تعریف می‌کنند. این مسئله را در مواجهه با داده عدم قطعیت در محدودیت‌ها می‌توان توسط مسئله بهینه‌سازی چندهدفه نامعین زیر نوشت:

$$\text{(UP)} \quad \begin{aligned} & \min_K f(x) \\ & \text{s.t. } g_i(x,v) \leq 0, \quad i \in I, \\ & \qquad h_j(x,v) = 0, \quad j \in J, \end{aligned}$$

که $x \in X$ بردار متغیر تصمیم، $v \in V$ بردار پارامتر عدم قطعیت از فضای توپولوژیکی به‌طور دنباله‌ای فشرده V و $g_i : X \times V \to \mathbb{R}$ و $h_j : X \times V \to \mathbb{R}$ توابع مفروض می‌باشند.

یکی از ساختارهای قدرتمند برای مطالعه مسئله (UP) بهینه‌سازی استوار می‌باشد. این مسئله را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم:

$$\text{(RP)} \quad \begin{aligned} & \min_K f(x) \\ & \text{s.t. } g_i(x,v) \leq 0, \forall v \in V,\ i \in I, \\ & \qquad h_j(x,v) = 0, \forall v \in V,\ j \in J. \end{aligned}$$

بردار $x \in X$ را جواب شدنی استوار برای مسئله (UP) گویند، اگر یک جواب شدنی برای مسئله (RP) باشد. مجموعه جواب‌های شدنی استوار F برای مسئله (UP) به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$F := \{ x \in X \mid g_i(x,v) \leq 0,\ i \in I,\ h_j(x,v) = 0,\ j \in J,\ \forall v \in V \}.$$

تعریف ۱.۲. الف) بردار $\bar{x} \in F$ را یک جواب کارای استوار برای مسئله (UP) گویند و می‌نویسند $\bar{x} \in S(RP)$ اگر و تنها اگر

$$f(x) - f(\bar{x}) \notin -K \setminus \{0\}, \quad \forall x \in F.$$

ب) بردار $\bar{x} \in F$ را یک جواب کارای استوار ضعیف برای مسئله (UP) گویند و می‌نویسند $\bar{x} \in S^w(RP)$ اگر و تنها اگر

$$f(x) - f(\bar{x}) \notin -\operatorname{int} K, \quad \forall x \in F.$$

اکنون برای مهیاسازی شرایط بهینگی کافی برای جواب‌های کارای استوار و جواب‌های کارای استوار ضعیف مسئله (UP)، یک مفهوم جدید از تحدب تعمیم‌یافته برای توابع f، g و h به‌کار می‌بریم.

تعریف ۲.۲. الف) f در $\bar{x} \in X$ محدب‌نما است، اگر برای هر $x \in X$ و $y^* \in K^+$ داشته باشیم:

$$\langle y^*,f\rangle(x)<\langle y^*,f\rangle(\bar{x})\Rightarrow$$
$$(\langle z^*,x-\bar{x}\rangle<0,\ \forall z^*\in\partial\langle y^*,f\rangle(\bar{x})).$$

ب) f در $\bar{x}\in X$ اکیداً محدب‌نما است، اگر برای هر $x\in X\setminus\{\bar{x}\}$ و $y^*\in K^+\setminus\{0\}$ داشته باشیم:
$$\langle y^*,f\rangle(x)\le\langle y^*,f\rangle(\bar{x})\Rightarrow$$
$$(\langle z^*,x-\bar{x}\rangle<0,\ \forall z^*\in\partial\langle y^*,f\rangle(\bar{x})).$$

ج) g در $\bar{x}\in X$ شبه محدب تعمیم‌یافته است، اگر برای هر $x\in X$ و $v\in V$ داشته باشیم:
$$g_i(x,v)\le g_i(\bar{x},v)\Rightarrow(\langle v_i^*,x-\bar{x}\rangle\le 0,$$
$$\forall v_i^*\in\partial_x g_i(\bar{x},v)),\ i\in I.$$

د) h در $\bar{x}\in X$ آفین تعمیم‌یافته است، اگر برای هر $x\in X$ و $u\in V$ داشته باشیم:
$$h_j(x,u)=h_j(\bar{x},u)\Rightarrow(\langle u_j^*,x-\bar{x}\rangle=0,$$
$$\forall u_j^*\in\partial_x h_j(\bar{x},u)\cup\partial_x(-h_j)(\bar{x},u)),\ j\in J.$$

تعریف ۳.۲. الف) گوییم (f,g,h) در $\bar{x}\in X$ محدب‌نما نوع ۱ است، اگر f، g و h به‌ترتیب محدب‌نما، شبه محدب تعمیم‌یافته و آفین تعمیم‌یافته در $\bar{x}\in X$ باشند.

ب) گوییم (f,g,h) در $\bar{x}\in X$ محدب‌نما نوع ۲ است، اگر f، g و h به‌ترتیب اکیداً محدب‌نما، شبه محدب تعمیم‌یافته و آفین تعمیم‌یافته در $\bar{x}\in X$ باشند.

ملاحظه ۱.۲. از تعریف ۲.۲ و تعریف ۳.۲ چنین برمی‌آید که اگر (f,g,h) در $\bar{x}\in X$ محدب‌نما نوع ۲ باشد، آن‌گاه (f,g,h) در $\bar{x}\in X$ محدب‌نما نوع ۱ است اما عکس آن لزوماً برقرار نمی‌باشد.

در سرتاسر این مقاله، فرضیات زیر برقرارند:

(آ۱) برای بردار ثابت $\bar{x}\in X$، g (به‌همین ترتیب h) نسبت به مولفه اول موضعاً و نسبت به مولفه دوم به‌طور یکنواخت پیوسته لیپشیتس می‌باشد. یعنی، یک همسایگی باز U از $\bar{x}$ و یک ثابت مثبت ℓ وجود دارند به‌طوری‌که
$$\|g(y,w)-g(z,w)\|\le\ell\,\|y-z\|$$
برای همه $y,z\in U$ و $w\in V$ برقرار باشد.

(آ۲) برای هر $i\in I$ (به‌همین ترتیب $j\in J$)، تابع $w\in V\mapsto g_i(x,w)\in\mathbb{R}$ (به‌همین ترتیب $w\in V\mapsto h_j(x,w)\in\mathbb{R}$) نیم‌پیوسته بالایی برای هر $x\in U$ است.

(آ۳) برای هر $i\in I$ و $j\in J$، یک خانواده از توابع حقیقی‌مقدار $\phi_i,\phi:X\to\mathbb{R}$ و $\psi_j,\psi:X\to\mathbb{R}$ به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:
$$\begin{cases}\phi_i(x):=\max\limits_{w\in V}g_i(x,w),\\ \phi(x):=\max\limits_{i\in I}\phi_i(X)\end{cases}$$
و
$$\begin{cases}\psi_j(x):=\max\limits_{w\in V}|h_j(x,w)|,\\ \psi(x):=\max\limits_{j\in J}\psi_j(x).\end{cases}$$

ϕ_i (به‌همین ترتیب ψ_j) خوش تعریف است، زیرا g_i (به‌همین ترتیب h_j) نیم‌پیوسته بالایی و V به‌طور دنباله‌ای فشرده است. علاوه‌براین، ϕ_i و ϕ (به‌همین ترتیب ψ_j و ψ) توابع پیوسته لیپشیتس تحت فرض (آ۱) هستند ([۱۵، (H1)، صفحه ۱۳۱] و [۴، صفحه ۲۹۰] را ببینید).

(آ۴) برای هر $i\in I$، تابع مجموعه‌مقدار $(x,w)\in U\times V\mapsto\partial_x g_i(x,w)\subset X^*$ در $(\bar{x},v)$ برای هر $v\in V_i(\bar{x})$ بسته است که داریم $V_i(\bar{x})=\{v\in V\mid g_i(\bar{x},v)=\phi_i(\bar{x})\}$.

(آ۵) برای هر $j\in J$، تابع مجموعه‌مقدار $(x,w)\in U\times V\mapsto\partial_x h_j(x,w)\subset X^*$ در

برای هر $(\bar{x},u)$ $u \in U_j(\bar{x})$ بسته است که داریم
$.U_j(\bar{x}) = \{u \in V \mid |h_j(\bar{x},u)| = \psi_j(\bar{x})\}$

توجه داشته باشید که مجموعه جواب‌های شدنی استوار F را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$F = \{x \in X \mid g_i(x,v) \le 0, i \in I, \quad h_j(x,v) = 0, j \in J, \forall v \in V\} = \{x \in X \mid \phi(x) \le 0, \ \psi(x) = 0\}. \tag{۴}$$

در باقی این بخش، شرط مقید به مفهوم استوار بیان می‌شود که برای بدست آوردن شرط کاروش کان - تاکر به مفهوم استوار مورد نیاز است.

تعریف ۴.۲. فرض کنید $\bar{x} \in F$. گوییم شرط مقید (CQ) در نقطه $\bar{x}$ برقرار است اگر وجود نداشته باشد $\mu_i \ge 0$، $i \in I(\bar{x})$ ، و $\gamma_j \ge 0$، $j \in J$ ، که حداقل یکی از μ_iها و حداقل یکی از γ_jها صفر نباشند، به‌طوری‌که

$$0 \in \sum_{i \in I(\bar{x})} \mu_i \operatorname{cl} \operatorname{co}\left(\cup\{\partial_x g_i(\bar{x},v) | v \in V_i(\bar{x})\}\right) + \sum_{j \in J} \gamma_j \operatorname{cl} \operatorname{co}\left(\cup\{\partial_x h_j(\bar{x},u) \cup \partial_x(-h_j)(\bar{x},u) \mid u \in V\}\right).$$

تعریف ۵.۲. بردار $\bar{x} \in F$ را گویند در شرط (KKT) استوار صدق می‌کند، اگر بردارهای $y^* \in K^+ \setminus \{0\}$، $\mu := (\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n) \in \mathbb{R}_+^n$، $\gamma := (\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_m) \in \mathbb{R}_+^m$ و $\bar{v}_i \in V$، $i \in I$، وجود داشته باشند چنان‌که

$$\begin{cases} 0 \in \partial\langle y^*, f\rangle(\bar{x}) \\ \quad + \sum_{i \in I} \mu_i \operatorname{cl} \operatorname{co}\left(\cup\{\partial_x g_i(\bar{x},v) | v \in V_i(\bar{x})\}\right) \\ \quad + \sum_{j \in J} \gamma_j \operatorname{cl} \operatorname{co}\left(\cup\{\partial_x h_j(\bar{x},u) \cup \right. \\ \quad \left. \partial_x(-h_j)(\bar{x},u) \mid u \in V\}\right) \\ \mu_i \max_{w \in V} g_i(\bar{x},w) = \mu_i \, g_i(\bar{x},\bar{v}_i) = 0, \quad i \in I. \end{cases}$$

بنابراین، شرط (KKT) توسط شرط مقید (CQ) تضمین می‌شود.

۳- شرایط لازم و کافی استوار

در این قسمت، شرط لازم برای جواب‌های کارای استوار ضعیف مسئله (UP) را با بهره‌گیری از قاعده تخمین اکسترمال، قاعده جمع فازی برای زیردیفرانسیل فرشه، نوع غیرهموار قاعده فرما و قاعده جمع برای زیردیفرانسل‌های حدی مورد بررسی قرار می‌دهیم. همچنین شرط کافی را برای جواب‌های کارای استوار و جواب‌های کارای استوار ضعیف با در نظر گرفتن فرضیات تحدب‌نما مورد بحث قرار می‌دهیم.
اولین قضیه، یک شرط لازم برحسب زیردیفرانسل حدی برای جواب‌های کارای استوار ضعیف ایجاد می‌نماید. برای اثبات این قضیه، به شرط لازم فازی به مفهوم زیردیفرانسیل فرشه برای جواب‌های کارای استوار ضعیف مسئله (UP) نیازمندیم.

قضیه ۱.۳. فرض کنید $\bar{x} \in S^w(RP)$. آن‌گاه برای هر $k \in \mathbb{N}$ وجود دارند $x^{1k} \in B_X(\bar{x}, \frac{1}{k})$، $x^{2k} \in B_X(\bar{x}, \frac{1}{k})$، $x^{3k} \in B_X(\bar{x}, \frac{1}{k})$، $y_k^* \in K^+$ با $\|y_k^*\| = 1$ و $\alpha_k \in \mathbb{R}_+$ به‌طوری‌که

$$\begin{aligned}0&\in\hat{\partial}\langle y_k^*,f\rangle(x^{1k})+\alpha_k\hat{\partial}\phi(x^{2k})\\&\quad+\alpha_k\hat{\partial}\psi(x^{3k})+\frac{1}{k}B_{X^*},\\ &|\alpha_k\phi(x^{2k})+\alpha_k\psi(x^{3k})|<\frac{1}{k}.\end{aligned}$$

اثبات. از بعضی تکنیک‌های موجود در [۱۸] و [۱۹] بهره می‌بریم. قرار می‌دهیم $\bar{y}:=f(\bar{x})$ و فرض می‌کنیم f حول $\bar{x}$ با یک ثابت $\ell>0$ پیوسته لیپشیتس باشد. علاوه‌براین، یک تابع حقیقی مقدار χ روی X به‌صورت $\chi(x):=\phi(x)+\psi(x)$ تعریف می‌کنیم و قرار می‌دهیم $F_0:=\{x\in X|\chi(x)\le 0\}$. از رابطه (۴) به وضوح داریم $F\subset F_0$. ابتدا اثبات می‌کنیم که برای هر $k\in\mathbb{N}$ وجود دارند $x_1^k\in F_0\cap B_X(\bar{x},\frac{1}{3k})$، $x^{1k}\in B_X(\bar{x},\frac{1}{k})$، $y_k^*\in K^+$ با $\|y_k^*\|=1$ و $x_k^*\in\hat{N}(x_1{}^k;F_0)$ به‌طوری‌که

$$0\in\hat{\partial}\langle y_k^*,f\rangle(x^{1k})+x_k{}^*+\frac{1}{3k}B_{X^*}. \tag{۵}$$

با در نظر گرفتن مجموعه‌های

$$\begin{aligned}&\Omega_1:=F_0\times(\bar{y}-K),\\&\Omega_2:=\{(x,f(x))\,|\,x\in F\},\end{aligned}$$

مشاهده می‌کنیم ([۱۸، قضیه ۳.۳] را ببینید) $(\bar{x},\bar{y})$ یک نقطه اکسترمال موضعی مجموعه $\{\Omega_1,\Omega_2\}$ است.

با فرض $\varepsilon_k>0$ و

$$\varepsilon_k<\min\left\{\frac{1}{3k},\frac{1}{2(5+3\ell)},\frac{1}{6k(1+\ell)(4+3\ell)}\right\}$$

و با به‌کارگیری اصل تخمین اکسترمال برای فضای حاصلضرب $X\times Y$ و با استفاده از روشی مشابه به اثبات [۱۹، قضیه ۱.۳]، به رابطه (۵) می‌رسیم.

اکنون فرض می‌کنیم $\delta_k\in]0,\frac{1}{3k}[$. از تخمین فازی برای مخروط‌های نرمال ([۲۰، لم ۴۹.۸] را ببینید) متوجه می‌شویم که برای $x_k^*\in\hat{N}(x_1{}^k;F_0)$ و $\delta_k>0$ وجود دارند $x_2^k\in B_X(x_1^k,\delta_k)$ و $\alpha_k\in\mathbb{R}_+$ به‌طوری‌که

$$\begin{aligned}&x_k^*\in\alpha_k\hat{\partial}\chi(x_2^k)+\frac{1}{3k}B_{X^*},\\&|\alpha_k\chi(x_2^k)|\le\delta_k<\frac{1}{3k}.\end{aligned}\tag{۶}$$

با توجه به اینکه $\chi(x):=\phi(x)+\psi(x)$ و با توجه به قاعده جمع فازی ضعیف در لم ۳.۲ برای شمول $x_k^*\in\alpha_k\hat{\partial}(\phi+\psi)(x_2^k)+\frac{1}{3k}B_{X^*}$ و برای $\delta_k>0$، می‌توان $x^{2k}\in B_X(x_2^k,\delta_k)$ و $x^{3k}\in B_X(x_2^k,\delta_k)$ را چنان بدست آورد که

$$\begin{aligned}x_k{}^*&\in\alpha_k\hat{\partial}\phi(x^{2k})+\alpha_k\hat{\partial}\psi(x^{3k})\\&\quad+\frac{2}{3k}B_{X^*}\end{aligned}\tag{۷}$$

و

$$\begin{cases}|\alpha_k\phi(x^{2k})-\alpha_k\phi(x_2^k)|\le\delta_k<\dfrac{1}{3k},\\[2mm]|\alpha_k\psi(x^{3k})-\alpha_k\psi(x_2^k)|\le\delta_k<\dfrac{1}{3k}.\end{cases}\tag{۸}$$

با ترکیب روابط (۵) و (۷) به شمول موجود در قضیه می‌رسیم. همین‌طور توجه کنید که $x^{2k}\in B_X(\bar{x},\frac{1}{k})$، زیرا

$$\begin{aligned}\|x^{2k}-\bar{x}\|&\le\|x^{2k}-x_2^k\|+\|x_2^k-x_1^k\|\\&\quad+\|x_1^k-\bar{x}\|\end{aligned}$$

و $x_1^k \in B_X(\bar{x}, \frac{1}{3k})$. به‌طور مشابه داریم $x^{3k} \in B_X(\bar{x}, \frac{1}{k})$. برای تکمیل اثبات کافی است نامساوی (۶) را با نامساوی (۸) ترکیب کنید.

با به‌کارگیری نتیجه بدست آمده از قضیه قبلی، اکنون شرط لازم برحسب زیردیفرانسیل حدی را برای جواب‌های کارای استوار ضعیف مسئله (UP) فراهم می‌کنیم.

قضیه ۲.۳. فرض کنید g_i، $i \in I$ ، و h_j، $j \in J$ ، در شرایط (آ۱) تا (آ۵) صدق کنند. اگر $\bar{x} \in S^w(RP)$، آن‌گاه وجود دارند بردارهای $y^* \in K^+$، $\mu := (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n_+$، $\gamma := (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_m) \in \mathbb{R}^m_+$ با شرط تساوی $\|y^*\| + \|\mu\| + \|\gamma\| = 1$ و $\bar{v}_i \in V$، $i \in I$، به‌طوری‌که

$$\begin{cases} 0 \in \partial \langle y^*, f \rangle(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \mu_i \\ \quad \operatorname{cl co}\left(\bigcup \{ \partial_x g_i(\bar{x}, v) \mid v \in V_i(\bar{x}) \} \right) \\ \quad + \sum_{j \in J} \gamma_j \operatorname{cl co}\left(\bigcup \{ \partial_x h_j(\bar{x}, u) \cup \right. \\ \quad \left. \partial_x(-h_j)(\bar{x}, u) \mid u \in V \} \right), \\ \mu_i \max_{w \in V} g_i(\bar{x}, w) = \mu_i g_i(\bar{x}, \bar{v}_i) \\ \qquad = 0, \quad i \in I. \end{cases} \tag{۹}$$

علاوه‌براین، اگر شرط (CQ) در $\bar{x}$ صدق کند، آن‌گاه رابطه (۹) با $y^* \neq 0$ برقرار است.

اثبات. فرض کنید $\bar{x} \in S^w(RP)$. با به‌کارگیری قضیه ۱.۳، دنباله‌های $x^{1k} \to \bar{x}$، $x^{2k} \to \bar{x}$، $x^{3k} \to \bar{x}$، $y_k^* \in K^+$ با $\|y_k^*\| = 1$، $\alpha_k \in \mathbb{R}_+$، $x_{1k}^* \in \hat{\partial}\langle y_k^*, f \rangle(x^{1k})$، $x_{2k}^* \in \alpha_k \hat{\partial}\phi(x^{2k})$ و $x_{3k}^* \in \alpha_k \hat{\partial}\psi(x^{3k})$ وجود دارند به‌طوری‌که

$$\begin{aligned} & 0 \in x_{1k}^* + x_{2k}^* + x_{3k}^* + \frac{1}{k} B_{X^*}, \\ & \alpha_k \phi(x^{2k}) + \alpha_k \psi(x^{3k}) \to 0, \ k \to \infty. \end{aligned} \tag{۱۰}$$

اکنون می‌توانیم دو حالت را برای دنباله $\{\alpha_k\}$ در نظر بگیریم:

حالت اول. فرض کنید $\{\alpha_k\}$ کران‌دار است. بدون از دست دادن کلیت، فرض کنید $\alpha_k \to \alpha \in \mathbb{R}_+$ که $k \to \infty$. علاوه‌براین، چون $\{y_k^*\} \subset K^+$ کراندار است، با استفاده از خاصیت فشردگی دنباله‌ای ضعیف‌ستاره در زیرمجموعه‌های کران‌دار دوگان فضاهای آسپلاند، داریم $y_k^* \xrightarrow{w^*} \bar{y}^* \in K^+$ که $k \to \infty$ و $\|\bar{y}^*\| = 1$. با فرض $\ell > 0$، ثابت لیپشیتس f حول $\bar{x}$، به نامساوی $\|x_{1k}^*\| \le \ell \|y_k^*\| \le \ell$ برای هر $k \in \mathbb{N}$ می‌رسیم. علاوه بر این، با انتخاب یک زیردنباله خواهیم داشت $x_{1k}^* \xrightarrow{w^*} x_1^* \in X^*$ که $k \to \infty$. دنباله $\{x_{2k}^*\}$ نیز بنابر کرانداری $\{\alpha_k\}$ و پیوستگی لیپشیتس ϕ حول $\bar{x}$ کراندار است. بنابراین، می‌توانیم $x_2^* \in X^*$ را چنان بیابیم که $x_{2k}^* \xrightarrow{w^*} x_2^* \in X^*$ که $k \to \infty$. پس از (۱۰) داریم $x_{3k}^* \xrightarrow{w^*} x_3^* := -x_1^* - x_2^*$ که $k \to \infty$. با به‌کارگیری (۱) و لم ۱.۲ در شمول $x_{1k}^* \in \hat{\partial}\langle y_k^*, f \rangle(x^{1k})$، رابطه زیر را می‌توان بدست آورد:

$$(x_{1k}^*, -y_k^*) \in \hat{N}((x^{1k}, f(x^{1k})); \operatorname{gph} f), \quad k \in N.$$

اگر $k \to \infty$، با استفاده از تعریف مخروط‌های نرمال در (۱) و (۲) خواهیم داشت

$(x_1^*,-\bar{y}^*)\in N((\bar{x},f(\bar{x}));\text{gph } f)$ که با توجه به قسمت (۲) لم ۱.۲ معادل است با

$$x_1^*\in\partial\langle\bar{y}^*,f\rangle(\bar{x}). \tag{۱۱}$$

به‌طور مشابه خواهیم داشت $x_2^*\in\alpha\,\partial\phi(\bar{x})$ و $x_3^*\in\alpha\,\partial\psi(\bar{x})$. روابط شمول آخر به همراه رابطه (۱۱) و با این فرض که $x_3^*:=-x_1^*-x_2^*$ به ما می‌گوید که

$$0\in\partial\langle\bar{y}^*,f\rangle(\bar{x})+\alpha\,\partial\phi(\bar{x}) + \alpha\,\partial\psi(\bar{x}). \tag{۱۲}$$

اکنون با به‌کارگیری فرمول زیردیفرانسیل حدی توابع ماکسیمم در لم ۵.۲ خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\partial\phi(\bar{x})\subset\bigcup\{\partial(\sum\limits_{i\in I(\bar{x})}\mu_i\phi_i)(\bar{x})\mid (\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n)\in\Lambda(\bar{x})\},\\ \partial\psi(\bar{x})\subset\bigcup\{\partial(\sum\limits_{j\in J(\bar{x})}\gamma_i\psi_i)(\bar{x})\mid (\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n)\in\Gamma(\bar{x})\},\end{cases} \tag{۱۳}$$

که

$$\begin{aligned}I(\bar{x})&:=\{i\in I\mid \phi_i(\bar{x})=\phi(\bar{x})\},\\ J(\bar{x})&:=\{j\in J\mid \psi_j(\bar{x})=\psi(\bar{x})\}=J,\\ \Lambda(\bar{x})&=\{(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n)\mid \mu_i\ge 0,\\ &\qquad \sum_{i\in I}\mu_i=1,\mu_i(\phi_i(\bar{x})-\phi(\bar{x}))=0\},\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\Gamma(\bar{x})&=\{(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_m)\mid \gamma_j\ge 0,\sum_{j\in J}\gamma_j=1,\\ &\qquad \gamma_j(\psi_j(\bar{x})-\psi(\bar{x}))=0\}\\ &=\{(\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_m)\mid \gamma_j\ge 0,\sum_{j\in J}\gamma_j=1\}.\end{aligned}$$

همچنین با استفاده از لم ۴.۲ به رابطه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases}\partial\phi_i(\bar{x})\subset\operatorname{cl}\operatorname{co}\big(\bigcup\{\partial_x g_i(\bar{x},v)\mid v\in V_i(\bar{x})\}\big)\quad i\in I,\\ \partial\psi_j(\bar{x})\subset\operatorname{cl}\operatorname{co}\big(\bigcup\{\partial_x|h_j(\bar{x},u)|\mid u\in U_j(\bar{x})\}\big)\quad j\in J,\end{cases} \tag{۱۴}$$

که

$$\begin{aligned}V_i(\bar{x})&=\{v\in V\mid g_i(\bar{x},v)=\phi_i(\bar{x})\},\\ U_j(\bar{x})&=\{u\in V\mid |h_j(\bar{x},u)|=\psi_j(\bar{x})\}=V\end{aligned}$$

و مجموعه‌های

$$\operatorname{cl}\operatorname{co}\big(\bigcup\{\partial_x g_i(\bar{x},v)\mid v\in V_i(\bar{x})\}\big),\quad \operatorname{cl}\operatorname{co}\big(\bigcup\{\partial_x|h_j(\bar{x},u)|\mid u\in V\}\big)$$

ناتهی هستند. از قاعده جمع در لم ۲.۲ و روابط (۱۲)–(۱۴) چنین بر می‌آید که

$$\begin{aligned}0\in{}&\partial\langle\bar{y}^*,f\rangle(\bar{x})\\ &+\alpha\bigcup\{\sum_{i\in I(\bar{x})}\mu_i\operatorname{cl}\operatorname{co}\big(\bigcup\{\partial_x g_i(\bar{x},v)\mid v\in V_i(\bar{x})\}\big)\mid(\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n)\in\Lambda(\bar{x})\}\\ &+\alpha\bigcup\{\sum_{j\in J}\gamma_j\operatorname{cl}\operatorname{co}\big(\bigcup\{\partial_x|h_j(\bar{x},u)|\mid u\in V\}\big)\mid\gamma_j\ge 0,\sum_{j\in J}\gamma_j=1\}\end{aligned} \tag{۱۵}$$

علاوه‌براین، با توجه به قاعده زنجیره‌ای و با در نظر گرفتن رابطه زیر

$$\partial_x|h_j(\bar{x},u)|\subset\bigcup_{-1\le\tau\le 1}\partial_x(\tau h_j(\bar{x},u))$$

برای زیردیفرانسیل تابع ترکیب $|h_j(\bar{x},u)|$ ([۱۵، قضیه ۴۱.۳] را ببینید)، و همچنین با توجه به اینکه

$$\partial_x(\tau h_j(\bar{x},u))\subset|\tau|\,(\partial_x h_j(\bar{x},u)\cup\partial_x(-h_j)(\bar{x},u))$$

از رابطه (۱۵) داریم:

$$
\begin{aligned}
0 \in\ & \partial\langle \bar{y}^*, f\rangle(\bar{x}) \\
& + \alpha \bigcup \Big\{ \sum_{i\in I(\bar{x})} \mu_i \operatorname{cl}\operatorname{co}\big(\bigcup\{\partial_x g_i(\bar{x},v) \mid \\
& v \in V_i(\bar{x})\}\big) \ (\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n)\in\Lambda(\bar{x}) \ \Big\} \\
& + \alpha \bigcup \Big\{ \sum_{j\in J} \gamma_j \operatorname{cl}\operatorname{co}\Big(\bigcup\big\{\partial_x h_j(\bar{x},u) \cup \\
& \partial_x(-h_j)(\bar{x},u) \mid u\in V\big\}\Big) \mid \\
& \gamma_j \ge 0, \sum_{j\in J}\gamma_j = 1 \ \Big\}.
\end{aligned}
$$

بنابراین، وجود دارند بردارهای $\bar{\mu} := (\bar{\mu}_1,\bar{\mu}_2,\ldots,\bar{\mu}_n)\in\Lambda(\bar{x})$ با $\sum_{i\in I}\bar{\mu}_i = 1$ و $\bar{\mu}_i = 0$ برای همه $i\in I\setminus I(\bar{x})$ و $\bar{\gamma} := (\bar{\gamma}_1,\bar{\gamma}_2,\ldots,\bar{\gamma}_m)\in\mathbb{R}^m_+$ با شرط تساوی $\sum_{j\in J}\bar{\gamma}_j = 1$ به قسمی‌که

$$
\begin{aligned}
0 \in\ & \partial\langle \bar{y}^*, f\rangle(\bar{x}) \\
& + \alpha \sum_{i\in I} \bar{\mu}_i \operatorname{cl}\operatorname{co}\big(\bigcup\{\partial_x g_i(\bar{x},v) \\
& \mid v\in V_i(\bar{x})\}\big) + \alpha \sum_{j\in J}\bar{\gamma}_j \operatorname{cl}\operatorname{co}\Big(\bigcup\big\{\partial_x h_j(\bar{x},u) \cup \\
& \partial_x(-h_j)(\bar{x},u) \mid u\in V\big\}\Big).
\end{aligned}
$$

شمول بالا را بر $\beta := \|\bar{y}^*\| + \alpha\|\bar{\mu}\| + \alpha\|\bar{\gamma}\|$ تقسیم می‌کنیم، سپس قرار می‌دهیم $y^* := \dfrac{\bar{y}^*}{\beta}$، $\mu := \dfrac{\alpha}{\beta}\bar{\mu}$ و $\gamma := \dfrac{\alpha}{\beta}\bar{\gamma}$. بنابراین وجود دارند بردارهای $y^*\in K^+$، $\mu = (\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n)\in\mathbb{R}^n_+$ و $\gamma = (\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n)\in\mathbb{R}^m_+$ با شرط تساوی $\|y^*\| + \|\mu\| + \|\gamma\| = 1$ به‌قسمی‌که

$$
\begin{aligned}
0 \in\ & \partial\langle y^*, f\rangle(\bar{x}) \\
& + \sum_{i\in I} \mu_i \operatorname{cl}\operatorname{co}\big(\bigcup\{\partial_x g_i(\bar{x},v) \\
& \mid v\in V_i(\bar{x})\}\big) + \sum_{j\in J}\gamma_j \operatorname{cl}\operatorname{co}\Big(\bigcup\big\{\partial_x h_j(\bar{x},u) \cup \\
& \partial_x(-h_j)(\bar{x},u) \mid u\in V\big\}\Big).
\end{aligned}
\tag{۱۶}
$$

از طرف دیگر، با توجه به اینکه V به‌طوردنباله‌ای فشرده است و با توجه به این‌که تابع $w\in V \mapsto g_i(\bar{x},w)$ برای هر $i\in I$، نیم‌پیوسته بالایی است، می‌توانیم $\bar{v}_i\in V$ را چنان انتخاب کنیم که $g_i(\bar{x},\bar{v}_i) = \max_{w\in V} g_i(\bar{x},w) = \phi_i(\bar{x})$. علاوه بر این، $\alpha\phi(\bar{x})=0$ زیرا $\psi(\bar{x})=0$ و $\alpha_k\phi(x^{2k}) + \alpha_k\psi(x^{3k}) \to 0$ که $k\to\infty$. با توجه به $\phi_i(\bar{x}) = \phi(\bar{x})$ برای همه $i\in I(\bar{x})$ داریم:

$$
\begin{aligned}
\mu_i\, g_i(\bar{x},\bar{v}_i) &= \frac{\alpha}{\beta}\,\bar{\mu}_i\,\phi_i(\bar{x}) \\
&= \frac{\bar{\mu}_i}{\beta}\,[\alpha\,\phi(\bar{x})] = 0,
\end{aligned}
$$

یعنی برای همه $i\in I$ خواهیم داشت:

$$
\mu_i\, g_i(\bar{x},\bar{v}_i) = \mu_i \max_{w\in V} g_i(\bar{x},w) = 0.
$$

از رابطه اخیر و رابطه (۱۶) به رابطه (۹) می‌رسیم.

حالت دوم. اکنون فرض کنید $\{\alpha_k\}$ بی‌کران باشد. مشابه اثبات حالت اول، از شمول $x^*_{2k}\in\alpha_k\hat{\partial}\phi(x^{2k})$ در می‌یابیم که

$$
(x^*_{2k}, -\alpha_k)\in\hat{N}((x^{2k},\phi(x^{2k}));\ \operatorname{gph}\phi)
$$

برای هر $k\in\mathbb{N}$. بنابراین

$$
\Big(\frac{x^*_{2k}}{\alpha_k}, -1\Big)\in\hat{N}((x^{2k},\phi(x^{2k}));\ \operatorname{gph}\phi),\ k\in\mathbb{N}.
$$

اگر $k \to \infty$ و با توجه به رابطه (۲)، به شمول $(0,-1) \in N((\bar{x}, \phi(\bar{x}));\ \mathrm{gph}\,\phi)$ می‌رسیم که معادل است با $0 \in \partial\phi(\bar{x})$. به‌طور مشابه $0 \in \partial\psi(\bar{x})$. بنابراین

$$0 \in \partial\phi(\bar{x}) + \partial\psi(\bar{x}).$$

با فرآیندی همانند اثبات حالت اول، وجود دارند بردارهای $\mu := (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$ و $\gamma := (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_m) \in \mathbb{R}^m_+ \setminus \{0\}$ با $\|\mu\| + \|\gamma\| = 1$ به‌طوری‌که

$$0 \in \sum_{i \in I} \mu_i \,\mathrm{cl\,co}\Big(\bigcup\{\partial_x g_i(\bar{x}, v) \mid v \in V_i(\bar{x})\}\Big) + \sum_{j \in J} \gamma_j \,\mathrm{cl\,co}\Big(\bigcup\{\partial_x h_j(\bar{x}, u) \cup \partial_x(-h_j)(\bar{x}, u) \mid u \in V\}\Big).$$

همچنین می‌توانیم $\bar{v}_i \in V$ را چنان انتخاب کنیم که برای هر $i \in I$، داشته باشیم $\mu_i\, g_i(\bar{x}, \bar{v}_i) = \mu_i\, \phi_i(\bar{x}) = \mu_i\, \phi(\bar{x}) = 0$، زیرا دنباله $\{\alpha_k\}$ بی‌کران است و $\alpha_k\,(\phi(x^{2k}) + \psi(x^{3k})) \to 0$ که $k \to \infty$. بنابراین، رابطه (۹) با فرض $y^* := 0 \in K^+$ برقرار خواهد بود.

سرانجام، فرض کنیم $\bar{x}$ در شرط (CQ) در حالت اول صدق نماید. به‌طور مستقیم از (۹) متوجه می‌شویم $y^* \neq 0$، که آخرین عبارت موجود در قضیه را توجیه می‌نماید و اثبات را کامل می‌کند.

ملاحظه ۱.۳. قضیه ۲.۳ به [۱۳، قضیه ۳.۳] کاهش می‌یابد که در آن مسئله بهینه‌سازی با بعد متناهی و تحت قیدهای نامساوی می‌باشد. علاوه‌براین، روش ما که شامل اصل تخمین اکسترمال، قاعده جمع فازی ضعیف زیردیفرانسیل فرشه و همچنین فرمول شمول برای زیردیفرانسیل حدی توابع ماکسیمم در فضاهای آسپلاند می‌باشد، با روشی که در مقاله ذکر شده ارائه گردیده متفاوت است.

اکنون، مثالی در باب قضیه ۲.۳ برای مسئله بهینه‌سازی چندهدفه نامعین با محدودیت‌های نامساوی و مساوی مطرح می‌کنیم.

مثال ۱.۳. فرض کنید $X := \mathbb{R}^2$، $Y := \mathbb{R}^3$، $V := [-1,1]$ و $K := \mathbb{R}^3_+$ باشند. مسئله بهینه‌سازی نامعین زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(\mathrm{UP}) \quad \min_{\mathbb{R}^3_+} \{f(x) \mid g(x,v) \in -\mathbb{R}^2_+,\ h(x,v) = 0\},$$

که در آن $f : X \to Y$، $f := (f_1, f_2, f_3)$، به صورت

$$f_1(x) = -2x_1 + |x_2 - 1|,$$
$$f_2(x) = \frac{1}{|x_1| + 1} - 3x_2 + 2,$$
$$f_3(x) = \frac{1}{\sqrt{|x_1| + 1}} - |x_2 - 1| - 1$$

تعریف شده است و $g : X \times V \to \mathbb{R}^2$، $g := (g_1, g_2)$، به‌صورت

$$g_1(x,v) = v^2 |x_2| + \max\{x_1, 2x_1\} - 3|v|,$$
$$g_2(x,v) = -3|x_1| + v\,x_2 - 2$$

تعریف شده است.

همچنین فرض کنید $h : X \times V \to \mathbb{R}$ به‌صورت $h(x,v) = |v|(x_1 + x_2 - 1)$ تعریف شده باشد. می‌توانیم به راحتی بررسی کنیم که

$$\{v^2|x_2| + \max\{x_1, 2x_1\} - 3|v| \le 0 \quad \forall v \in V\} = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \le 0 \text{ and } |x_2| \le -x_1 + 3\}$$

و به دلیل اینکه $x_1 \le 0$، خواهیم داشت:

$$\left\{-3|x_1|+vx_2-2\le 0 \ \ \forall v\in V\right\}=$$
$$\left\{x\in \mathbb{R}^2 \mid x_1\le 0 \text{ and } |x_2|\le -3x_1+2\right\}.$$

علاوه‌براین، واضح است که محدودیت $h(x,v)=0$ برای همه $v\in V$، تساوی $x_2=-x_1+1$ را می‌دهد. آن‌گاه، مجموعه جواب‌های شدنی استوار برابر است با

$$F=\left\{x\in\mathbb{R}^2 \mid x_1\le 0 \text{ and } x_2=-x_1+1\right\}$$

که آن را می‌توان در شکل (۱) دید. فرض کنید $\overline{x}:=(0,1)\in F$. اگر در نظر داشته باشیم $x_2=-x_1+1$، آن‌گاه برای همه $x\in F$ داریم:

$$f(x)-f(\overline{x})=\begin{pmatrix}-3x_1\\ \dfrac{1}{|x_1|+1}+3x_1-1\\ \dfrac{1}{\sqrt{|x_1|+1}}+x_1-1\end{pmatrix}\notin -\operatorname{int}\mathbb{R}^3_+,$$

بدین معنی که $\overline{x}$ یک جواب کارای استوار ضعیف مسئله (UP) است. همچنین توجه داشته باشید که

$$\begin{aligned}\varphi_1(\overline{x})&=\max_{w\in V} g_1(\overline{x},w)\\ &=\max_{w\in V}(w^2-3|w|)=0,\\ \varphi_2(\overline{x})&=\max_{w\in V} g_2(\overline{x},w)\\ &=\max_{w\in V}(w-2)=-1.\end{aligned}$$

بنابراین داریم

$$\varphi(\overline{x})=\max\left\{\varphi_1(\overline{x}),\varphi_2(\overline{x})\right\}=0,$$
$$V_1(\overline{x})=\{0\},\ V_2(\overline{x})=\{1\}.$$

بعد از محاسبات، به

$$\begin{aligned}&\partial f_1(\overline{x})=\{-2\}\times[-1,1],\\ &\partial f_2(\overline{x})=[-1,1]\times\{-3\},\\ &\partial f_3(\overline{x})=[-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}]\times\{-1,1\}\end{aligned}$$

می‌رسیم. همچنین خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\operatorname{cl}\operatorname{co}\left(\partial_x g_1(\overline{x},v=0)\right)\\ \qquad =[1,2]\times\{0\},\\ \operatorname{cl}\operatorname{co}\left(\partial_x g_2(\overline{x},v=1)\right)\\ \qquad =[-3,3]\times\{1\}\end{cases} \tag{۱۷}$$

و

$$\operatorname{cl}\operatorname{co}\Big(\bigcup\left\{\partial_x h(\overline{x},v)\cup\partial_x(-h)(\overline{x},v)\ \middle|\ v\in V\right\}\Big)=\left\{(v,v) \mid v\in V\right\}. \tag{۱۸}$$

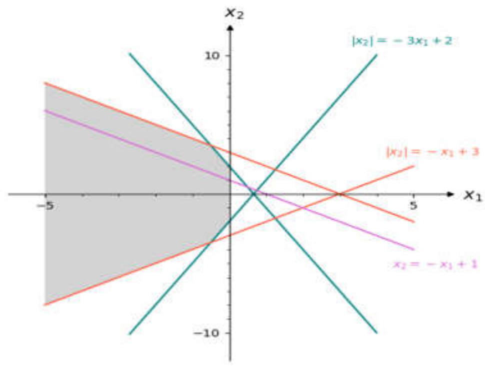
از طرف دیگر، از

$$I(\overline{x})=\left\{i\in\{1,2\} \mid \varphi_i(\overline{x})=\varphi(\overline{x})\right\}=\{1\}$$

و از روابط (۱۷) و (۱۸) می‌توان متوجه شد که شرط (CQ) در $\overline{x}$ صدق می‌کند. پس، وجود دارند $y^*=\left(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^T\in\mathbb{R}^3_+$، $\mu=\left(\frac{1}{4},0\right)^T\in\mathbb{R}^2_+$ و $\gamma=\frac{1}{4}\in\mathbb{R}_+$ با $\|y^*\|+\|\mu\|+\|\gamma\|=1$ به‌طوری‌که

$$\begin{aligned}0=&\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2 & 0 & 0\\ 2-\sqrt{2} & -3 & 1\end{pmatrix}\\ &+\begin{pmatrix}\frac{1}{4} & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\end{aligned}$$

و $\mu_i \max_{w\in V} g_i(\overline{x},w)=0$ برای $i=1,2$.



شکل (۱)

قضیه زیر شرایط کافی (KKT) برای جواب‌های کارای استوار و جواب‌های کارای استوار ضعیف از مسئله (UP) را مهیا می‌نماید.

قضیه ۳.۳. فرض کنید $\bar{x} \in F$ در شرط (KKT) استوار صدق نماید.

(۱) اگر (f,g,h) در نقطه $\bar{x}$ محدب‌نما نوع ۱ باشد، آن‌گاه $\bar{x} \in S^w(RP)$.

(۲) اگر (f,g,h) در نقطه $\bar{x}$ محدب‌نما نوع ۲ باشد، آن‌گاه $\bar{x} \in S(RP)$.

اثبات. فرض کنید $\bar{x} \in F$ در شرط (KKT) استوار صدق کند. بنابراین وجود دارند بردارهای $y^* \in K^+ \setminus \{0\}$، $z^* \in \partial\langle y^*, f\rangle(\bar{x})$، $\mu_i \geq 0$، $v_i^* \in \mathrm{cl\,co}\left(\bigcup\{\partial_x g_i(\bar{x},v) \mid v \in V_i(\bar{x})\}\right)$، $i \in I$، و $u_j^* \in \mathrm{cl\,co}\left(\bigcup\{\partial_x h_j(\bar{x},u) \cup \partial_x(-h_j)(\bar{x},u) \mid u \in V\}\right)$، $\gamma_j \geq 0$، $j \in J$، به‌قسمی‌که

$$0 = z^* + \sum_{i\in I} \mu_i v_i^* + \sum_{j\in J} \gamma_j u_j^*, \tag{۱۹}$$

$$\mu_i \max_{w\in V} g_i(\bar{x}, w) = 0, \quad i \in I. \tag{۲۰}$$

در ابتدا، برای اثبات قسمت (۱) از فرض خلف بهره می‌بریم. فرض کنید $\bar{x} \notin S^w(RP)$. پس $\hat{x} \in F$ وجود دارد که $f(\hat{x}) - f(\bar{x}) \in -\mathrm{int}\, K$. این بدین معنی است که $\langle y^*, f(\hat{x}) - f(\bar{x})\rangle < 0$ ([۲۱، لم ۲۱.۳] را ببینید). با توجه به این‌که (f,g,h) در $\bar{x}$ محدب‌نما نوع ۱ است، داریم:

$$\langle z^*, \hat{x} - \bar{x}\rangle < 0. \tag{۲۱}$$

از طرف دیگر، برای بردار $\hat{x}$ از رابطه (۱۹) داریم:

$$0 = \langle z^*, \hat{x} - \bar{x}\rangle + \sum_{i\in I} \mu_i \langle v_i^*, \hat{x} - \bar{x}\rangle + \sum_{j\in J} \gamma_j \langle u_j^*, \hat{x} - \bar{x}\rangle. \tag{۲۲}$$

از روابط (۲۱) و (۲۲) خواهیم داشت:

$$\sum_{i\in I} \mu_i \langle v_i^*, \hat{x} - \bar{x}\rangle + \sum_{j\in J} \gamma_j \langle u_j^*, \hat{x} - \bar{x}\rangle > 0.$$

در ادامه، دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

حالت اول. فرض می‌کنیم $i_0 \in I$ وجود دارد به‌طوری‌که $\mu_{i_0}\langle v_{i_0}^*, \hat{x} - \bar{x}\rangle > 0$. از آنجا که $v_{i_0}^* \in \mathrm{cl\,co}\left(\bigcup\{\partial_x g_{i_0}(\bar{x},v) \mid v \in V_{i_0}(\bar{x})\}\right)$ پس وجود دارد دنباله $\{v_{i_0k}^*\} \subset \mathrm{co}\left(\bigcup\{\partial_x g_{i0}(\bar{x},v) \mid v \in V_{i_0}(\bar{x})\}\right)$ که $v_{i_0}^* = \lim_{k\to\infty} v_{i_0k}^*$. بنابراین، با توجه به این‌که $\mu_{i_0} > 0$، $k_0 \in \mathbb{N}$ وجود دارد به‌طوری‌که

$$\langle v_{i_0k_0}^*, \hat{x} - \bar{x}\rangle > 0. \tag{۲۳}$$

از طرفی دیگر، از آنجا که شمول $\nu_{i_0k_0}^* \in \mathrm{co}\left(\bigcup\left\{\partial_x g_{i_0}(\bar{x},v) \mid v\in V_{i_0}(\bar{x})\right\}\right)$ برقرار است پس وجود دارند بردارهای $\nu_p^* \in \bigcup\left\{\partial_x g_{i_0}(\bar{x},v)\mid v\in \nu_{i_0}(\bar{x})\right\}$ و $\mu_p\ge 0$ با $\sum_{p=1}^{s} \mu_p=1$، $p=1,2,\dots s$، $s\in \mathbb{N}$، به‌طوری که $\nu_{i_0k_0}^*=\sum_{p=1}^{s}\mu_p\nu_p^*$. با ترکیب رابطه اخیر با رابطه (۲۳) خواهیم داشت $\sum_{p=1}^{s} \mu_p\langle \nu_p^*,\hat{x}-\bar{x}\rangle>0$. بنابراین، می‌توانیم $p_0\in\{1,2,\dots,s\}$ را چنان انتخاب کنیم که داشته باشیم

$$\langle \nu_{p_0}^*,\hat{x}-\bar{x}\rangle>0, \tag{۲۴}$$

و $v_{i_0}\in V_{i_0}(\bar{x})$ را چنان انتخاب کنیم که $v_{p_0}^*\in\partial_x g_{i_0}(\bar{x}, v_{i_0})$، به این دلیل که $\nu_{p_0}^*\in\bigcup\left\{\partial_x g_{i_0}(\bar{x},v)\mid v\in \nu_{i_0}(\bar{x})\right\}$. حال، با اعمال تعریف محدب‌نما نوع ۱ (f,g,h)، از (۲۴) داریم:

$$g_{i_0}(\hat{x},v_{i_0})>g_{i_0}(\bar{x},v_{i_0}). \tag{۲۵}$$

از آنجا که $v_{i_0}\in V_{i_0}(\bar{x})$ خواهیم داشت $g_{i_0}(\bar{x},v_{i_0})=\max_{w\in V} g_{i_0}(\bar{x},w)$ که به‌همراه (۲۰) نتیجه می‌دهد $\mu_{i_0}g_{i_0}(\bar{x},v_{i_0})=0$. از رابطه اخیر و رابطه (۲۵) چنین برمی‌آید که $\mu_{i_0}g_{i_0}(\hat{x},v_{i_0})>0$، بنابراین $g_{i_0}(\hat{x},v_{i_0})>0$ که با $\hat{x}\in F$ در تناقض است.

حالت دوم. فرض می‌کنیم $j_0\in J$ وجود دارد که $\gamma_{j_0}\langle u_{j_0}^*,\hat{x}-\bar{x}\rangle>0$. مشابه حالت اول می‌توانیم

$$u_{j_0l_0}^*\in\mathrm{co}\Big(\bigcup\left\{\partial_x h_{j_0}(\bar{x},u)\cup \partial_x(-h_{j_0})(\bar{x},u)\mid u\in V\right\}\Big),\quad l_0\in\mathbb{N},$$

$$u_q^*\in\bigcup\left\{\partial_x h_{j_0}(\bar{x},u)\cup\partial_x(-h_{j_0})(\bar{x},u)\mid u\in V\right\}$$

و $\gamma_q\ge0$، $q=1,2,\dots,t$، $t\in\mathbb{N}$، را چنان انتخاب کنیم به‌طوری‌که

$$\langle u_{j_0l_0}^*,\hat{x}-\bar{x}\rangle>0,$$
$$u_{j_0l_0}^*=\sum_{q=1}^{t}\gamma_q u_q^*,$$

که نامساوی $\sum_{q=1}^{t} \gamma_q\langle u_q^*,\hat{x}-\bar{x}\rangle>0$ را بدست دهد. در نتیجه، وجود دارند برداهای $u_{q_0}^*\in\bigcup\left\{\partial_x h_{j_0}(\bar{x},u)\cup\partial_x(-h_{j_0})(\bar{x},u)\mid u\in V\right\}$، که $q_0\in\{1,2,\dots,t\}$ و همچنین $u_{j_0}\in V$، $j_0\in\mathbb{N}$، به‌قسمی‌که

$$\langle u_{q_0}^*,\hat{x}-\bar{x}\rangle>0, \tag{۲۶}$$
$$u_{q_0}^*\in\partial_x h_{j_0}(\bar{x},u_{j_0})\cup\partial_x(-h_{j_0})(\bar{x},u_{j_0}).$$

علاوه بر این، چون $\bar{x}\in F$ داریم $h_{j_0}(\bar{x},u_{j_0})=0$. اکنون با به‌کارگیری تعریف محدب‌نما نوع ۱ (f,g,h) در $\bar{x}$، از رابطه (۲۶) در می‌یابیم $h_{j_0}(\hat{x},u_{j_0})\ne h_{j_0}(\bar{x},u_{j_0})=0$ که با این حقیقت که $\hat{x}\in F$ در تناقض می‌باشد و بدین‌گونه اثبات قسمت (۱) کامل می‌شود.

قسمت (۲) را نیز مشابه قسمت (۱) می‌توان اثبات نمود. اگر $\bar{x}\notin S(RP)$، آن‌گاه $\hat{x}\in F$ وجود دارد که $f(\hat{x})-f(\bar{x})\in -K\setminus\{0\}$. بنابراین داریم $\hat{x}\ne\bar{x}$ و $\langle y^*, f(\hat{x})-f(\bar{x})\rangle\le 0$. اکنون، با استفاده از تعریف محدب‌نما نوع ۲ (f,g,h) در $\bar{x}$، به نتیجه می‌رسیم.

از قضیه ۳.۳ و ملاحظه ۱.۲، فوراً شرایط کافی زیر بدست می‌آید.

قضیه ۴.۳. فرض کنید $\bar{x}\in F$ در شرط (KKT) استوار صدق نماید و (f,g,h) در $\bar{x}$ محدب‌نما

نوع ۱ باشد، آن‌گاه $\bar{x} \in S(RP)$.

ملاحظه ۲.۳. قضیه ۳.۳ قضایای ([۴، قضیه ۲.۳]) و ([۱۹، قضیه ۱۱.۳]) را بهبود می‌بخشد که در آن‌ها توابع به‌ترتیب به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر و محدب تعمیم‌یافته و مسئله بهینه‌سازی با بعد متناهی و تحت محدودیت‌های نامساوی می‌باشد. ما شرایط کافی (KKT) را برای مسئله (UP) به مفهوم محدب‌نما و برای مسئله بهینه‌سازی نامتناهی بعد و تحت محدودیت‌های نامساوی و مساوی ایجاد نمودیم.

فهرست منابع

[1] A. Ben-Tal, L. E. Ghaoui, A. cNemirovski. Robust Optimization. Princeton series in applied mathematics. Princeton University Press, Princeton (2009)

[2] V. Jeyakumar, G. Li. Strong duality in robust convex programming: complete characterizations. SIAM J. Optim. 20:3384-3407 (2010)

[3] V. Jeyakumar, G. Li, G. M. Lee. Robust duality for generalized convex programming problems under data uncertainty. Nonlinear Anal. 75:1362-1373 (2012)

[4] G. M. Lee, P. T. Son. On nonsmooth optimality theorems for robust optimization problems. Bull. Korean Math. Soc. 51:287-301 (2014)

[5] J. Branke. Creating robust solutions by means of evolutionary algorithms. In: E. Eiben, T. Back, M. Schenauer, H .P. Schwefel (eds.). Parallel Problem Solving from Nature|PPSNV 1498 119-128. Lecture Notes in Computer Science Springer, Berlin (1998)

[6] K. Deb, H. Gupta. Introducing robustness in multiobjective optimization. Evol. Comput. 1: 463-494 (2006)

[7] D. Kuroiwa, G. M. Lee. On robust multiobjective optimization. Vietnam J. Math. 40:305-317 (2012)

[8] H. Yu, H. Liu. Robust multiple objective game theory. J. Optim. Theory Appl. 159(1):272-280 (2013)

[9] M. Ehrgott, J. Ide, A. Schobel. Minmax robustness for multi-objective optimization problems. Eur. J. Oper. Res. 239:17-31 (2014)

[10] J. Ide, E. Kobis. Concepts of efficiency for uncertain multiobjective problems based on set order relations. Math. Meth. Oper. Res. 80:99-127 (2014)

[11] J. H. Lee, G. M. Lee. On optimality conditions and duality theorems for robust semi-infinite multiobjective optimization problems. Ann. Oper. Res. 269:419-438 (2018)

[12] R. Bokrantz, A. Fredriksson. Necessary and sufficient conditions for Pareto efficiency in robust multiobjective optimization. Eur. J. Oper. Res. 262:682-692 (2017)

[13] T. D. Chuong. Optimality and duality for robust multiobjective optimization problems. Nonlinear Anal. 134:127-143 (2016)

[14] J. Chen, E. Kobis, J. C. Yao. Optimality conditions and duality for robust nonsmooth multiobjective optimization problems with constraints. J. Optim. Theory Appl. 181:411-436 (2019)

[15] B. S. Mordukhovich. Variational Analysis and Generalized Differentiation I: Basic Theory. Springer, Berlin (2006)

[16] B. S. Mordukhovich, N. M. Nam, N. D. Yen. Fréchet subdifferential calculus and optimality conditions in non-differentiable programming. Optimization 55:685-708 (2006)

[17] B. S. Mordukhovich. Variational Analysis and Generalized Differentiation II: Applications. Springer, Berlin (2006)

[18] T. D. Chuong, D. S. Kim. Optimality conditions and duality in nonsmooth multiobjective optimization problems. Ann. Oper. Res. 217:117-136 (2014)

[19] T. D Chuong .Optimality and duality in nonsmooth conic vector optimization. J. Optim. Theory Appl. 183:471-489 (2019)

[20] B. S. Mordukhovich. Variational Analysis and Applications. Springer, Cham (2018)

[21] J. Jahn. Vector Optimization Theory, Applications, and Extensions. Springer, Berlin (2004)