دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هفتم، شماره سی و یکم، مرداد و شهریور ۱۴۰۰
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

عدد تحمیلی صفر چه گراف‌هایی با ساختار مایسیلیسکی با ماکسیمم پوچی آن‌ها برابر است؟

زهرا رامه[۱]، ابراهیم وطن‌دوست[۲]*، فاطمه رمضانی[۳]

[(۱و۲)] گروه ریاضی محض، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بین المللی امام خمینی (ره)، قزوین، ایران.
[(۳)] گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، دانشگاه یزد، یزد، ایران.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۷/۱۱/۰۹ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۴/۲۷

چکیده

فرض کنید S نشان دهنده مجموعه رئوس با رنگ سیاه (اولیه) گراف G باشد. قانون تغییر رنگ، رنگ یک رأس سفید را به سیاه تبدیل می کند اگر رأس سفید u تنها همسایه سفید رأس سیاه v باشد. مجموعه S یک مجموعه تحمیلی صفر G است هرگاه بعد از تعداد متناهی اعمال قانون تغییر رنگ، رنگ تمامی رئوس به سیاه تغییر کنند. تعداد اعضای یک مجموعه‌ی تحمیلی صفر با کمترین عضو را عدد تحمیلی صفر گراف می‌نامند. در این مقاله عدد تحمیلی صفر و ماکسیمم پوچی برخی گراف‌ها با ساختار مایسیلیسکی را بررسی می‌کنیم. به ویژه به ازای برخی گراف‌ها با این ساختار نشان می‌دهیم عدد تحمیلی صفر گراف با ماکسیمم پوچی آن برابر است. همچنین عدد تحمیلی صفر و ماکسیمم پوچی گراف‌های مایسیلیسکی $\mu(K_n)$، $\mu(C_n)$ و گراف‌های همبند با حداقل ۴ رأس را محاسبه کرده‌ایم.

واژه‌های کلیدی: عدد تحمیلی صفر، ماکسیمم پوچی، مینیمم رتبه، گراف مایسیلیسکی.

*. عهده‌دار مکاتبات
Email: vatandoost@sci.ikiu.ac.ir

۱- مقدمه

فرض کنید $G = (V, E)$ گرافی ساده با حداقل ۲ رأس باشد. برای هر رأس $v \in V$ همسایگی باز این رأس را با $N_G(v)$ نشان داده و تعریف می‌کنیم:
$N_G(v) = \{u | \{u, v\} \in E\}$.

همچنین همسایگی بسته یک رأس، $N_G[v]$، به صورت $N_G[v] = \{v\} \cup N_G(v)$ تعریف می‌شود. نماد $\Delta(G)$ برای ماکسیمم درجه‌ی گراف G و δ (G) برای مینیمم درجه‌ی آن به کار می‌رود. گراف‌های کامل، دور و مسیر از مرتبه n را به ترتیب با نماد K_n ، C_n و P_n نشان می‌دهیم. یک گراف دو بخشی کامل، $K_{n,m}$، گرافی با $n + m$ رأس است که $V(K_{n,m}) = V_1 \cup V_2$ و دو رأس v و u با هم مجاورند اگر و تنها اگر $i \neq j$ و $u \in V_i$ و $v \in V_j$ به طوری که $i, j \in \{1,2\}$. گراف ساده F_n نشان دهنده گرافی با $2n + 1$ رأس و $3n$ یال است که از اتصال n مثلث در یک رأس بدست می‌آید. اگر $S \subseteq V$ آنگاه، زیر گراف القایی روی S، $< S >$، گرافی است با مجموعه رئوس S و یال‌های $\{\{u, v\} | u, v \in S, \{u, v\} \in E\}$. گراف G را یک گراف دو مسیر موازی گوییم هرگاه از دو مسیر القایی مستقل تشکیل شده باشد به طوری که این دو مسیر همه‌ی رئوس G را پوشش دهند و یال‌های بین دو مسیر (یال‌ها خط راست باشند نه منحنی) متقاطع نباشند.

اجتماع h گراف $G_i = (V_i, E_i)$، $i = 1, \dots, h$، را به صورت $\bigcup_{i=1}^{h} G_i = \left(\bigcup_{i=1}^{h} V_i, \bigcup_{i=1}^{h} E_i\right)$ تعریف می‌کنیم. فرض کنید $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ مجموعه رئوس گراف $G = (V, E)$ باشد. ساختار مایسیلیسکی گراف G، $\mu(G)$، گرافی است با مجموعه رئوس $V \cup V' \cup \{w\}$ که مجموعه‌ی $V' = \{v'_1, v'_2, \dots, v'_n\}$ را یک کپی از مجموعه‌ی V می‌نامیم و برای هر $1 \leq i \leq n$، راس v'_i را رأس متناظر با v_i در نظر می‌گیریم. همچنین مجموعه‌ی یال‌های این گراف عبارتند از:

$$E(\mu(G)) = E(G) \cup \left\{\{v'_i, v_j\} \middle| \begin{matrix} \{v_i, v_j\} \in E(G),\ 1 \leq i \leq n \\ ,\ i \neq j \end{matrix} \right\} \cup \left\{\{v'_i, w\} \middle| v'_i \in V', 1 \leq i \leq n\right\}.$$

مجموعه‌ی همه‌ی ماتریس‌های متقارن $n \times n$ را با نماد $S_n(\mathbb{R})$ نشان می‌دهیم. برای $A \in S_n(\mathbb{R})$ گراف متناظر با ماتریس A را که با نماد $\mathcal{G}(A)$ نشان می‌دهیم گرافی است با رئوس $\{1,2, \dots, n\}$ و یال‌های $\left\{\{i, j\} \mid a_{ij} \neq 0 , 1 \leq i, j \leq n\right\}$. مجموعه‌ی همه‌ی ماتریس‌های متقارن $n \times n$ را که گراف آن‌ها برابر G می‌شود را با نماد $S(A)$ نشان می‌دهیم.

$$S(G) = \{A \in S_n(G) | \mathcal{G}(A) = G\}.$$

ماکسیمم پوچی و مینیمم رتبه گراف G را به ترتیب با نماد $M(G)$ و $mr(G)$ نشان داده و به صورت

$$M(G) = max\{null(A) | A \in S(A)\}$$
$$mr(G) = min\{rank(A) | A \in S(A)\}$$

تعریف می‌کنیم. فرض کنید برای هر رأس در یک گراف بتوان دو رنگ سیاه و سفید در نظر گرفت. قانون تغییر رنگ بیان می‌کند که اگر u تنها رأس سفید مجاور با راس سیاه v باشد، آنگاه این رأس رنگ u را سیاه می‌کند. در این صورت اصطلاحاً می‌گوئیم v رأس u را تحمیل می‌کند. فرض کنید $S = \{v_1, \dots, v_k\}$ مجموعه‌ای از رئوس سیاه گراف G باشد. اگر با اعمال قانون تغییر رنگ تمام رئوس گراف G سیاه شود، آنگاه S را یک مجموعه‌ی تحمیلی صفر گراف G می‌نامیم. تعداد اعضای یک مجموعه‌ی تحمیلی صفر با کمترین عضو را عدد تحمیلی صفر گراف نامیده و با نماد $Z(G)$ نشان می‌دهیم.

عدد تحمیلی صفر اولین بار در سال ۲۰۰۸ توسط گروه AIM مطرح شد که در آن از پارامتر عدد تحمیلی استفاده کرده و کرانی برای ماکسیمم پوچی گراف‌ها بدست آوردند[5]. همچنین در این مقاله خانواده‌ای از گراف‌ها ارائه شد که در آن‌ها عدد تحمیلی صفر و ماکسیمم پوچی برابرند و این سوال مطرح شد که در کدام خانواده از گراف‌ها دو پارامتر عدد تحمیلی صفر و ماکسیمم پوچی با هم برابرند؟ در طول این سال‌ها برخی از محققین خانواده زیادی از گراف‌ها با این ویژگی را معرفی کردند [14]، [11]، [8]، [13]، [6]، [15]، [16] و [۱۷].

به دنبال این مطالب در این مقاله عدد تحمیلی صفر و ماکسیمم پوچی برخی گراف‌ها باساختار مایسیلیسکی را مورد بررسی قرار داده‌ایم. در واقع نشان داده‌ایم که ماکسیمم پوچی گراف‌های F_n , $G_{\ell,r,k}$, $\mu(P_n)$, $\mu(K_{1,n-1})$ و $\mu(G_{\ell,r,k})$

و عدد تحمیلی آن‌ها با هم برابرند.

۲- قضایای مقدماتی

قضیه ۲-۱. [7] فرض کنید G گرافی با حداقل ۲ رأس باشد، در این صورت $\delta(G) \leq Z(G)$.

قضیه ۲-۲. [9] فرض کنید G گرافی همبند از مرتبه $n \geq ۲$ باشد در این صورت:

(a) $Z(G)=1$ اگر و تنها اگر $G \cong P_n$.

(b) $Z(G)=n-1$ اگر و تنها اگر $G \cong K_n$.

قضیه ۲-۳. [13] فرض کنید G یک گراف ساده باشد. در این صورت $Z(G)=2$ اگر و تنها اگر G یک گراف دو مسیر موازی باشد.

قضیه ۲-۴. [13] فرض کنید G یک گراف و v رأسی از آن باشد در این صورت:

$$-۱ \leq Z(G) - Z(G \setminus \{v\}) \leq 1$$

قضیه ۲-۵. [13] فرض کنید v یک راس برشی گراف G و $V_1, \dots, V_k$ مجموعه رئوس مؤلفه‌های همبندی گراف $G \setminus \{v\}$ باشند. اگر $G_i = < V_i \cup \{v\}$، آنگاه:

$$Z(G) \geq 1-k+\sum_{i=1}^{k} Z(G_i)$$

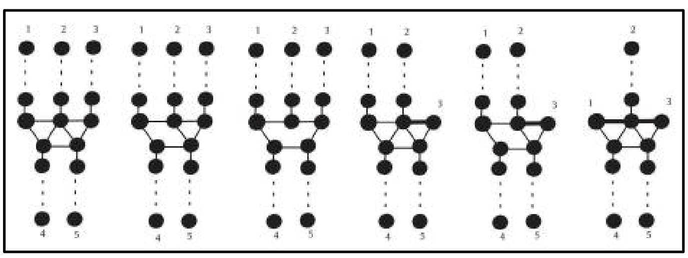
قضیه ۲-۶. [10] اگر $G=\bigcup_{i=1}^{h} G_i$، آنگاه:

$$mr(G) \leq \sum_{i=1}^{h} mr(G_i)$$

قضیه ۲-۷. [5] برای هر گراف G داریم:

$$M(G) \leq Z(G).$$

قضیه ۲-۸. [9] فرض کنید G یک گراف ساده باشد. $M(G)=2$ اگر و تنها اگر G یک گراف دو مسیر موازی یا G یکی از گراف‌های شکل (۱) باشد.



شکل ۱: خط پر نشان دهنده یک مسیر به طول حداقل ۲ و نقطه چین نشان دهنده یک مسیر به طول دلخواه که ممکن است وجود نداشته باشد.

لم ۲-۹. فرض کنید a رأسی از گراف G و مجموعه‌ی $Y=\{y_1,\dots,y_t\}$ تمام رئوس درجه یک مجاور با a باشد. اگر $t\geq 2$ و X یک مجموعه تحمیلی صفر G باشد، آنگاه $X\cap Y$ زیر مجموعه‌ی $t-1$ عضوی دارد. بویژه اگر Z یک مجموعه‌ی تحمیلی صفر با کمترین عضو برای گراف G باشد آنگاه $a\notin Z$.

اثبات: فرض کنید دو رأس y_j و y_i از Y متعلق به X نباشند. چون y_i و y_j از درجه ۱ هستند، لذا تنها رأسی که می‌تواند آن‌ها را تحمیل کند رأس aاست که این امکان ندارد. در نتیجه تمام اعضای Yبه جز یک رأس در X قرار دارند. حال فرض کنید Z یک مجموعه تحمیلی صفر مینیمم گراف Gباشد. دراین صورت رأس a می‌تواند توسط هر رأس از $X\cap Y$ تحمیل شود.
چون Z مجموعه‌ی تحمیلی صفر با کمترین عضو است، پس $a\notin Z$. به این ترتیب حکم ثابت می‌شود.

۳- احکام اصلی

بخش اول: گراف‌هایی با ویژگی $Z(G)=M(G)$.

قضیه ۳-۱-۱. اگر $n\geq 1$، آنگاه

$$Z(F_n)=M(F_n)=n+1.$$

اثبات: فرض کنید رأس a با تمام رئوس F_n مجاور باشد و رأس‌های i- امین مثلث آن v_{i1}, v_{i2}و a باشند. ملاحظه می‌شود که $G=\cup_1^n K_3$. بنابر قضیه ۲-۶ داریم:

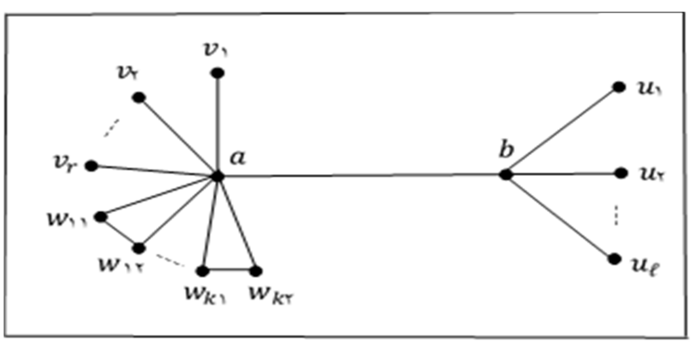
$$mr(F_n)\leq n\,mr(K_3)=n \qquad (۱)$$

بنابراین

$$M(F_n)\geq 2n+1-n=n+1.$$

حال فرض کنید رئوس $\{v_{i2}|1\leq i\leq n\}$ سفید و بقیه‌ی رئوس سیاه باشند. در این صورت به ازای هر $1\leq i\leq n$، راس v_{i1} راس v_{i2} را تحمیل می‌کند. بنابراین $X=\{v_{i1}|1\leq i\leq n\}\cup\{a\}$ یک مجموعه‌ی تحمیلی صفر گراف F_n است و در نتیجه $Z(F_n)\leq|X|=n+1.$

از قضیه ۲-۷، و رابطه (۱) حکم ثابت است.
گراف $G_{\ell,r,k}$ را گرافی از مرتبه n تعریف می‌کنیم که در آن $k\geq 0$، $\ell,r\geq 2$، $n=\ell+r+2k+2$ و $V(G_{\ell,r,k})=V\cup U\cup W\cup\{a,b\}$ به طوری که $<W\cup\{a\}>\cong F_k$، $<U\cup\{b\}>\cong K_{1,\ell}$ و $<V\cup\{a,b\}>\cong K_{1,r+1}$ (شکل ۲ را ببینید).



شکل ۲

قضیه ۳-۱-۲. اگر $k \geq 0$ ، $\ell, r \geq 2$ و $n = \ell + r + 2k + 2$، آنگاه

$$Z(G_{\ell,r,k}) = M(G_{\ell,r,k}) = n - k - 4.$$

اثبات. برای سادگی در روند اثبات گراف $G_{\ell,r,k}$ را G می‌نامیم. بنابراین

$$G = K_{1,\ell+1} \cup K_{1,r} \cup k\, K_3.$$

به راحتی می‌توان دید $mr(K_{1,r}) = 2$. بنابر قضیه ۲-۶، داریم:

$$mr(G) \leq mr(K_{1,\ell+1}) + mr(K_{1,r}) + mr(k\, K_3) = 4 + k$$

بنابراین $M(G) \geq n - (k+4)$. فرض کنید مجموعه‌ی $C = \{v_r, u_\ell, a, b\} \cup \{w_{i2} | 1 \leq i \leq k\}$ رئوس سفید و بقیه‌ی رئوس گراف سیاه باشند. در این صورت رأس a توسط رأس v_1، رأس b توسط رأس u_1 و به دنبال آن رئوس v_r و u_ℓ به ترتیب توسط a و b تحمیل می‌شوند. همچنین به ازای هر $1 \leq i \leq k$، w_{i1} رأس w_{i2} را تحمیل می‌کند. بنابراین $V \setminus C$ یک مجموعه‌ی تحمیلی صفر برای گراف G است. در نتیجه

$$Z(G) \leq n - k - 4\,.$$

قضیه ۲-۷، برهان را تکمیل می‌کند.

در ادامه، عدد تحمیلی صفر و ماکسیمم پوچی ساختار مایسیلیسکی چند گراف را مورد بررسی قرار می‌دهیم و نشان می‌دهیم برای برخی از آنها تساوی $Z(G) = M(G)$ برقرار است.

در قضیه‌ی بعدی عدد تحمیلی صفر و ماکسیمم پوچی ساختار مایسیلیسکی P_n را محاسبه می‌کنیم. اگر n=2، آنگاه $\mu(P_2) \cong C_5$ و در نتیجه $\mathrm{Z}(\mu(\mathrm{P}_2)) = \mathrm{Z}(\mathrm{C}_5) = 2$ و $M(C_n) = M(\mu(P_n)) = 2$. در قضیه‌ی بعد نشان می‌دهیم به ازای $n \geq 3$ عدد تحمیلی صفر و ماکسیمم پوچی ساختار مایسیلیسکی P_n با هم برابرند.

قضیه ۳-۱-۳. اگر n ≥3، آنگاه

$$M(\mu(P_n)) = Z(\mu(P_n)) = 3$$

اثبات. فرض کنید Z یک مجموعه‌ی تحمیلی صفر گراف $\mu(P_n)$ با کمترین عضو باشد. چون $\delta(\mu(P_n)) = 2$ پس $2 \leq Z(\mu(P_n))$.
فرض کنید $Z(\mu(P_n)) = 2$ دو حالت زیر را داریم:

حالت اول: $w \in Z$. در این صورت $Z = \{v'_1, w\}$ یا $Z = \{v'_n, w\}$ بدون کاستن از کلیت فرض کنید $Z = \{v'_1, w\}$ در این صورت v'_1 تنها رأس سفید مجاور خود یعنی v_2 را تحمیل می‌کند. چون n≥3، رئوس w و v_2 بیش از یک رأس سفید مجاور با خود دارند. لذا عمل تحمیل متوقف می‌شود که تناقض است.

حالت دوم: $w \notin Z$. در این صورت $Z \subseteq V$، $Z \subseteq V'$ یا $Z \subseteq V \cap V'$. اگر $Z \subseteq V \cap V'$، آنگاه در بهترین حالت $Z = \{v'_1، v_2\}$. در این صورت v'_1 رأس w را تحمیل می‌کند. چون w و v_2 هر یک حداقل دو رأس سفید مجاور با خود دارند لذا عمل تحمیل کامل نمی‌شود. اگر $Z \subseteq V$ (به طور مشابه $Z \subseteq V'$) آنگاه در بهترین حالت تنها یک رأس تحمیل شده و عملیات متوقف می‌شود. بنابراین Z مجموعه‌ِی تحمیلی صفر برای این گراف نیست و در نتیجه $Z(\mu(P_n)) > 2$. حال فرض کنید رئوس $X = \{v_1, v'_1, w\}$ سیاه و بقیه‌ی رئوس گراف سفید باشند. در این صورت v'_1 تنها رأس سفید مجاور خود یعنی v_2 را تحمیل می‌کند. v_1 تنها رأس سفید مجاور خود یعنی v'_2 را تحمیل می‌کند. بنابر قانون تغییر رنگ ابتدا v'_2 رأس v_3 و سپس v_2 رأس v'_3 را تحمیل می‌کند و به همین ترتیب همه‌ی رئوس گراف سیاه می‌شوند. از این رو X یک مجموعه‌ی تحمیلی صفر برای $\mu(P_n)$ است. بنابراین $Z(\mu(P_n)) \leq 3$ و در نتیجه $Z(\mu(P_n)) = 3$. از طرفی بنابر قضیه ۲-۷،

$M(\mu(P_n)) \leq 3$ بنابر قضیه‌ی ۲-۳، $\mu(\mathrm{P_n})$ یک گراف دو مسیر موازی نیست. و از این رو طبق قضیه‌ی ۲-۸، $M(\mu(P_n)) \geq 3$ و در نتیجه $M(\mu(P_n)) = 3$. بنابراین $M(\mu(P_n)) = Z(\mu(P_n)) = 3$.

قضیه ۳-۱-۴. اگر $n \geq 3$ آنگاه

$$Z\left(\mu(K_{1,n-1})\right) = \mathrm{M}\left(\mu(\mathrm{K}_{1,n-1})\right) = 2n - 3.$$

اثبات. فرض کنید a رأس جامع و a' رأس متناظر آن باشد. همچنین فرض کنید B ماتریسی باشد که از ماتریس مجاورت گراف $\mu(\mathrm{K}_{1,n-1})$ با تغییر درایه‌ی قطر اصلی متناظر با a' به ۱، درایه‌ی قطر اصلی متناظر با w به ۱ و درایه‌ی واقع در سطر متناظر با a' و ستون متناظر با w و ترانهاده‌ی آن به عدد -1 بدست آمده باشد. در این صورت $\mathrm{B} \in \mathrm{S}(\mu(\mathrm{K}_{1,n-1}))$. چون برای هر $i = 1, \dots, n-1$ داریم: $N(v_1) = N(v_i)$ و $N(u_1) = N(u_i)$ لذا $null\,(B) \geq 2n - 4$. از طرفی داریم $R_{a'} + R_w = R_a$. بنابراین $null\,(B) \geq 2n - 3$ و در نتیجه $M(\mu(K_{1,n-1})) \geq 2n - 3$.

حال فرض کنید

$$X = \{v_i', v_i | 1 \leq i \leq n-2\} \cup \{w\}$$

رئوس سیاه $\mu(\mathrm{K}_{1,n-1})$ و بقیه‌ی رئوس سفید باشند. چون a تنها رأس سفید مجاور با v_1' است، لذا v_1' رأس a را تحمیل می‌کند. از طرف دیگر v_1 دتنها رأس سفید مجاور خود یعنی a' را تحمیل می‌کند. ملاحظه می‌شود که a' توسط v_{n-1} و v_{n-1}' توسط a تحمیل می‌شوند. بنابراین X یک مجموعه‌ی تحمیلی صفر برای گراف $\mu(K_{1,n-1})$ است. در نتیجه

$$Z\left(\mu(\mathrm{K}_{1,n-1})\right) \leq |X| = 2\mathrm{n} - 3\,.$$

با توجه به قضیه ۲-۷، داریم:

$$2n - 3 \leq M\left(\left(\mathrm{K}_{1,n-1}\right)\right) \leq \mathrm{Z}(\mu(K_{1,n-1})) = 2\mathrm{n} - 3\,.$$

به این ترتیب اثبات کامل می‌شود.

قضیه ۳-۱-۵. اگر $\ell, r \geq 2$ و $k \geq 0$، آنگاه داریم:

$$Z\left(\mu(G_{\ell,r,k})\right) = M\left(\mu(G_{\ell,r,k})\right) = 2\ell + 2r + k - 3$$

اثبات. برای راحتی در روند اثبات G را $G_{\ell,r,k}$ در نظر می‌گیریم. فرض کنید

$$A = \{v_i, v_i' | 1 \leq i \leq r-1\}$$
$$B = \{u_i, u_i' | 1 \leq i \leq \ell-1\}$$
$$E = \{w_{i1}' | 1 \leq i \leq k\}$$

به طوری که $X = A \cup B \cup E \cup \{w\}$ رئوس سیاه گراف $\mu(\mathrm{G})$ و بقیه‌ی رئوس سفید باشند. در این صورت u_1' تنها رأس سفید مجاور خود رأس b را تحمیل می‌کند. به همین ترتیب بنابر قانون تغییر رنگ، u_1 رأس b'، v_1' رأس a، b' رأس u_ℓ، a' رأس v_1 و b رأس u_ℓ' را تحمیل می‌کند. همچنین برای هر $1 \leq i \leq k$ ، w_{i1}' رأس w_{i2}، w_{i2} رأس w_{i1} و رأس w_{i1} رأس w_{i2}' را تحمیل می‌کند. در نهایت رئوس v_r' و v_r به ترتیب توسط رئوس a و a' تحمیل می‌شوند. لذا X یک مجموعه‌ی تحمیلی صفر $\mu(\mathrm{G})$ است و لذا

$$Z(\mu(G)) \leq 2\ell + 2r + k - 3\,.$$

بنا به قضیه ۲-۷، داریم: $\mathrm{M}(\mu(\mathrm{G})) \leq 2\ell + 2r + k - 3$. حال فرض کنید B ماتریسی باشد که از تغییر درایه‌های قطر اصلی ماتریس مجاورت $\mu(G)$ متناظر با w_{qt}' به -1 برای هر $t = 1, \dots, k$ و $q = 1,2$ و درایه‌ی قطر اصلی ماتریس مجاورت $\mu(G)$ متناظر با w به

-2 بدست آمده باشد. در این صورت $R_{a'} + R_{b'} + R_w = R_a + R_b$ است. همچنین به ازای هر $i = 2, \dots, r$ و $j = 2, \dots, \ell$ داریم:

$N_{\mu(G)}(v_1') = N_{\mu(G)}(v_i')$ ،

$N_{\mu(G)}(v_1) = N_{\mu(G)}(v_i)$ ،

$N_{\mu(G)}(u_1) = N_{\mu(G)}(u_j)$ و

$N_{\mu(G)}(u_1') = N_{\mu(G)}(u_j')$.

به راحتی می‌توان دید به ازای هر $1 \le i \le k$،

$-R_{w_{i1}} + R_{w_{i2}} = -R_{w'_{i1}} + R_{w'_{i2}}$.

بنابراین

$null(B) \ge 2\ell + 2r + k - 3$.

از آنجا که

$B \in S(\mu(G))$

$2\ell + 2r + k - 3 \le M(\mu(G))$

بنابر قضیه ۲-۷، داریم:

$2\ell + 2r + k - 3 \le M(\mu(G)) \le Z(\mu(G)) \le 2\ell + 2r + k - 3$

و بدین ترتیب برهان کامل است.

بخش دوم: محاسبه $Z(G)$ و $M(G)$ در برخی از گراف‌ها با ساختار مایسیلیسکی

قضیه۱،۲،۳. اگر $G \cong F_n$، آنگاه $Z(\mu(G)) = n + 3$ و $n + 1 \le M(\mu(G)) \le n + 3$.

اثبات: فرض کنید $\{a, v_{i1}, v_{i2}\}$ رئوس $i-$ امین مثلث F_n و به ترتیب v_{i1}', v_{i2}' دو کپی متناظر با v_{i1}, v_{i2} در گراف $\mu(F_n)$ باشند. مجموعه $X = \{v_{i1}' | 1 \le i \le n\} \cup \{a, w, v_{12}'\}$ را سیاه و بقیه‌ی رئوس گراف $\mu(F_n)$ را سفید در نظر بگیرید. برای هر $1 \le i \le n$ رأس v_{i2} تنها رأس سفید مجاور با v_{i1}' است. لذا رأس v_{i1}' رأس v_{i2} را تحمیل می‌کند. رأس v_{11} تنها رأس سفید مجاور با v_{12}' است پس v_{12}' رأس v_{11} را تحمیل می‌کند. همچنین a' تنها رأس سفید مجاور با v_{11} است. بنابراین v_{11} رأس a' را تحمیل می‌کند. حال ملاحظه می‌شود که برای هر $2 \le i \le n$، v_{i1} توسط رأس سیاه v_{i2} و v_{i2}' توسط v_{i1} تحمیل می‌شوند. در نتیجه X یک مجموعه‌ی تحمیلی صفر برای $\mu(F_n)$ است. از این رو $Z(\mu(F_n)) \le |X| = n + 3$.

حال فرض کنید Z یک مجموعه‌ی تحمیلی صفر با کمترین عضو برای $\mu(F_n)$ باشد. نشان می‌دهیم که اگر $|Z| = n + 2$، آنگاه به تناقض می‌رسیم. به ازای $1 \le i \le n$، مجموعه A_i را به صورت $A_i = \{v_{i1}, v_{i2}, v_{i1}', v_{i2}'\}$ تعریف می‌کنیم. اگر برای هر i داشته باشیم $Z \cap A_i = \emptyset$، آنگاه هیچ رأسی در $\mu(F_n)$ نمی‌تواند رئوس A_i را تحمیل کند. بنابراین برای هر $1 \le i \le n$، $|Z \cap A_i| \ge 1$. از این رو $|Z| \ge n$. اگر $\{a, w\} \cap Z = \emptyset$ ، آنگاه هر رأس $\mu(F_n)$ حداقل با دو رأس سفید، مجاور است که با مجموعه‌ی تحمیلی بودن Z تناقض دارد. پس $|\{Z \cap \{a, w\}\}| \ge 1$. سه حالت زیر را بررسی می‌کنیم:

حالت اول) فرض کنید $\{a, w\} \subset Z$. در این صورت چون $|Z| = n + 2$، پس $a' \notin Z$ و $|Z \cap A_i| = 1$. واضح است که a' فقط می‌تواند توسط یکی از رئوس V تحمیل شود. اما هر رأس V حداقل با دو رأس سفید مجاور است. بنابراین a' توسط هیچ رأسی تحمیل نمی‌شود که تناقض است.

حالت دوم) فرض کنید $a \in Z$ و $w \notin Z$ و $a' \notin Z$ یا $a \notin Z$ و $w \in Z$ و $a' \notin Z$. چون $|Z| = n + 2$، دقیقاً یک $1 \le i \le n$ وجود دارد به گونه‌ای که $|Z \cap A_i| = 2$. از آنجا که فقط رئوس U می‌توانند شروع کننده‌ی عمل تحمیل باشند، خواهیم داشت:

$Z \cap A_i = \{v'_{i1}, v_{i2}\}$ یا $\{v'_{i2}, v_{i1}\}$

بدون کاستن از کلیت فرض کنید $Z \cap A_i = \{v'_{i1}, v_{i2}\}$. در این صورت w یا a تنها رأس سفید مجاور با v'_{i1} است که توسط آن تحمیل می‌شود. حال چون w و a هر دو سیاه هستند مشابه حالت (۱) a' توسط هیچ رأسی تحمیل نمی‌شود که تناقض است.

حالت سوم) $a \in Z$ و $w \notin Z$ و $a' \in Z$ یا $a \notin Z$ و $w \in Z$ و $a' \in Z$. در این صورت برای هر $1 \leq i \leq n$، داریم $|Z \cap A_i| = 1$. در نتیجه هر رأس Z با حداقل دو رأس سفید مجاور است که عمل تحمیل صورت نمی‌گیرد و این تناقض است. بنابراین $Z(\mu(F_n)) \geq n+3$ و در نتیجه $Z(\mu(F_n)) = n+3$.

بنابر قضیه ۲-۷، داریم: $M(\mu(G)) \leq n+3$.

فرض کنید B ماتریسی باشد که از تغییر درایه‌های قطر اصلی مربوط به v'_{i1} و v'_{i2} ها و a' و w به -1 در ماتریس مجاورت بدست آمده باشد. در این صورت $B \in S(\mu(F_n))$. اگر R_x نشان دهنده سطر متناظر با رأس x در ماتریس B باشد، آنگاه $R_{a'} + R_w = R_a$ و برای هر $1 \leq i \leq n$، داریم:

$$-R_{v'_i} + R_{v'_{i+1}} = -R_{v_i} + R_{v_{i+1}} .$$

در نتیجه $null(B) \geq n+1$. از این رو $M(\mu(G)) \geq n+1$. بنا بر قضیه ۲-۷ داریم:

$$n+1 \leq M(\mu(F_n)) \leq Z(\mu(F_n)) \leq n+3.$$

قضیه ۳-۲-۲. فرض کنید G یک گراف همبند از مرتبه‌ی $n \geq 4$ باشد. در این صورت $Z(\mu(G)) \leq 2n-3$.

اثبات. ابتدا فرض کنید $\{a,b,x,y\} \subseteq V(G)$ به طوری که $\{a,b\}$ و $\{x,y\}$ یال‌هایی از G باشند. همچنین فرض کنید رئوس $\{a,b,x',y'\}$ در $\mu(G)$ سفید و بقیه‌ی رئوس سیاه باشند. در این صورت چون b تنها رأس سفید مجاور با a' و a تنها رأس سفید مجاور با b' است پس توسط این رئوس تحمیل می‌شوند. ملاحظه می‌کنید که x تنها رأس سفید مجاور خود یعنی y' را تحمیل می‌کند. در نهایت x' توسط w تحمیل می‌شود. از این رو مجموعه‌ی تعریف شده یک مجموعه‌ی تحمیلی صفر گراف $\mu(G)$ است. در نتیجه $Z(\mu(G)) \leq 2n-3$.

حال فرض کنید b و a دو رأس مجاور با هم باشند به طوری که زیر گراف القایی روی $V(G) \setminus \{a,b\}$ یالی نداشته باشد. در این صورت

$$V(G) = N_G(a) \cup N_G(b) .$$

اگر $\deg a = 1$ یا $\deg b = 1$، آنگاه $G \cong K_{1,n-1}$. بنابر قضیه ۳-۱-۴، $Z(\mu(G)) = 2n-3$. پس فرض کنید $\deg a \geq 2$ و $\deg b \geq 2$. چون $n \geq 4$، پس رئوسی مانند d و c در G وجود دارند به طوری که c با a و d با b مجاور است. فرض کنید رئوس $\{b,d,a',c'\}$ سفید و بقیه‌ی رئوس گراف $\mu(G)$ سیاه باشند. چون d تنها رأس سفید مجاور با b'، b تنها رأس سفید مجاور با d' و c' تنها رأس سفید مجاور با a است، پس این رئوس توسط $\{a,b',d'\}$ تحمیل می‌شوند و در نهایت a' توسط w تحمیل می‌شود. از این رو مجموعه‌ی فوق یک مجموعه‌ی تحمیلی صفر گراف $\mu(G)$ است و لذا $Z(\mu(G)) \leq 2n-3$.

قضیه ۳-۲-۳. اگر $n\geq 4$ آنگاه

$$Z(\mu(K_n)) = 2n-3$$

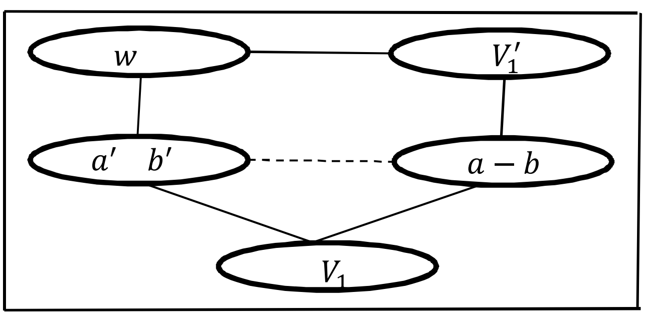
اثبات. فرض کنید Z یک مجموعه‌ی تحمیلی صفر گراف $\mu(K_n)$ با کمترین عضو باشد. تنها رئوسی که می‌توانند رئوس V را تحمیل کنند عبارتند از رئوس V و V'. حال اگر سه رأس از V سفید باشند، آنگاه هر رأس V حداقل با دو سه رأس سفید و هر رأس V' حداقل با دو رأس سفید مجاور است. در

نتیجه عمل تحمیل متوقف می‌شود. پس V حداکثر دو رأس سفید دارد. از این رو زیرمجموعه‌ی n−2 عضوی مانند A از V وجود دارد به طوری که $A \subseteq Z$ رأس w و رئوس V تنها رئوسی هستند که می‌توانند رئوس V' را تحمیل کنند. حال اگر سه رأس از V' سفید باشند، آنگاه w حداقل با سه رآس سفید و هر رأس V حداقل با دو رأس سفید مجاور است. در نتیجه عمل تحمیل نمی‌تواند ادامه یابد. بنابراین V' حداکثر دو رأس سفید دارد. از این رو یک زیرمجموعه‌ی n−2 عضوی مانند B از V' موجود است به‌طوری که B⊆Z. در نتیجه $|Z| \geq 2n-4$. اگر $Z = A \cup B$، آنگاه w توسط هیچ رأسی تحمیل نمی‌شود. بنابراین $|Z| \geq |A \cup B| + 1 = 2n-3$.

بنابر ۳-۲-۲، داریم $|Z| \leq 2n - 3$. از این رو $Z(\mu(K_n)) = 2n-3$.

قضیه ۳-۲-۴. فرض کنید b, a دو رأس از گراف n رأسی و همبند G باشند به‌طوری که $n \geq 4$ و $G = N_G[a] = N_G[b]$ و زیر گراف القایی روی $V(G) \setminus \{a,b\}$ یالی نداشته باشد. در این صورت $Z(\mu(G)) = 2n-3$ و $2n-4 \leq M(\mu(G)) \leq 2n-3$.

اثبات. بنابر قضیه ۳-۲-۲، داریم $Z(\mu(G)) \leq 2n-3$. حال فرض کنید $Z(\mu(G)) \leq 2n-4$ و X یک مجموعه‌ی تحمیلی صفر از $\mu(G)$ با کمترین عضو باشد. در این صورت $\mu(G)$ حداقل ۵ رأس سفید دارد. همچنین فرض کنید $V \setminus \{a,b\} = V_1$ و $V' \setminus \{a',b'\} = V_1'$ (شکل ۳ را ببینید). در این صورت تنها رئوسی که می‌توانند رئوس V_1 را تحمیل کنند، رئوس b, a یا b' a', هستند. از این رو اگر V_1 شامل دو رأس سفید باشد، آنگاه عمل تحمیل صورت نمی‌گیرد که تناقض است. پس V_1 حداکثر یک رأس سفید دارد. به‌طور مشابه V_1' نیز حداکثر یک رأس سفید دارد. فرض کنید V_1 دقیقاً یک رأس سفید داشته باشد. اگر b, a هر دو سفید باشند، آنگاه توسط هیچ رأسی تحمیل نمی‌شوند. به طور مشابه اگر a' و b' نیز سفید باشند، آنگاه هیچ رأسی آنها را تحمیل نمی‌کند. چون $\mu(G)$ حداقل ۵ رأس سفید دارد، پس w نیز سفید است. به آسانی می‌توان دید هیچ رأسی از X نمی‌تواند عمل تحمیل را شروع کند که تناقض است. حال فرض کنید تمام رئوس V_1 سیاه باشند. در این صورت a, b می‌توانند هر دو سفید باشند و در نتیجه $|\{a',b'\} \cap X| \geq 1$. چون $\mu(G)$ حداقل ۵ رأس سفید دارد، پس $w \notin X$. حال مشاهده می‌کنید که هر رأس سیاه حداقل با دو رأس سفید مجاور است. از این رو عمل تحمیل صورت نمی‌گیرد که تناقض است. بنابراین $Z(\mu(G)) = 2n-3$.



شکل ۳: خط چین به این معنی است که هر رأس از یک مجموعه با یک رأس از مجموعه ی دیگر مجاور است. خط پر به این معنی است که هر رأس از یک مجموعه با همه‌ی رئوس از مجموعه‌ی دیگر مجاور است.

برای اثبات قسمت دوم فرض کنید B ماتریسی باشد که از تغییر درایه‌های قطر اصلی متناظر با رئوس w, a', b' در ماتریس مجاورت $\mu(G)$ به -1 حاصل شده است. چون

$N_{\mu(G)}(v_1) = N_{\mu(G)}(v_i)$ و
$N_{\mu(G)}(u_1) = N_{\mu(G)}(u_i)$
$(2 \leq i \leq n-2)$

پس

$$null(B) \geq 2n-6 .$$

ملاحظه می‌شود که $-R_a + R_b = -R_{a'} + R_{b'}$ و $R_a = R_{a'} + R_w$. از این رو $null(B) \geq 2n-4$. بنابراین

$$2n-4 \leq null(B) \leq M(\mu(G)) .$$

بنا بر قضیه ۲-۷، $2n-4 \leq M(\mu(G)) \leq Z(\mu(G)) = 2n-3$. این حکم را ثابت می‌کند.

قضیه۵,۲,۳. اگر $n \geq 4$ آنگاه $Z(\mu(C_n)) = 5$ و همچنین $3 \leq M(\mu(C_n)) \leq 5$.

اثبات. توجه داشته باشید که در روند اثبات این قضیه تمامی جمع‌ها به پیمانه‌ی n صورت می‌گیرد. فرض کنید $X = \{v_1, v_2, v'_1, v'_2, w\}$ رئوس سیاه $\mu(C_n)$ و بقیه‌ی رئوس سفید باشند. تنها رأس سفید مجاور با v'_1 رأس v_n است. پس v_n توسط v'_1 تحمیل می‌شود. v'_2 تنها رأس سفید مجاور خود یعنی v_3 را تحمیل می‌کند. تنها رأس سفید مجاور با v_2، رأس v'_3 است. بنابراین v_2 رأس v'_3 را تحمیل می‌کند. v'_3 تنها رأس سفید مجاور خود، v_4 را تحمیل می‌کند. به‌طور مشابه برای $2 \leq t \leq n-1$، ابتدا v'_t تنها رأس سفید مجاور خود یعنی رأس v_{t+1} و سپس v_{t+1} تنها رأس سفید مجاور خود یعنی v'_{t+2} و همچنین v_t نیز v'_{t+1} را تحمیل می‌کند. بدین ترتیب تمام رئوس تحمیل می‌شوند. لذا X یک مجموعه‌ی تحمیلی صفر $\mu(C_n)$ است و در نتیجه: $Z(\mu(C_n)) \leq 5$. حال فرض کنید Z یک مجموعه‌ی تحمیلی صفر گراف $\mu(C_n)$ با ۴ عضو باشد. می‌دانیم برای هر $n \leq i \leq 1$ ، $deg^{v_i}_{\mu(G)} = 4$ و v_i دقیقاً با دو رأس v'_{i+1} و v'_{i-1} از V' مجاور است بنابراین $|Z \cap V| \leq 3$. از این رو با بررسی دو حالت زیر به تناقض می‌رسیم:

حالت اول: فرض کنید $w \notin Z$ در این صورت $|Z \cap V| \in \{2,3\}$. فرض کنید $|Z \cap V| = 3$. در این صورت Z شامل سه رأس متوالی از V است. چون رأس‌های C_n ویژگی‌های یکسانی دارند می‌توان فرض کرد.

$$Z \cap V = \{v_1, v_2, v_3\} .$$

در نتیجه $Z \cap V' = \{v'_1\}$ یا $Z \cap V' = \{v'_3\}$. بدون کاستن از کلیت فرض کنید $Z \cap V' = \{v'_1\}$. در این صورت v_2 راس v'_3 را تحمیل می‌کند. ملاحظه می‌شود که رئوس سیاه v'_1, v_1 و v'_3 هر کدام با دو رأس سفید مجاورند. به این ترتیب عمل تحمیل متوقف می‌شود که تناقض است. پس

$$|Z \cap V| = |Z \cap V'| = 2.$$

فرض کنید $Z \cap V = \{v_i, v_j\}$ و $Z \cap V' = \{v'_\ell, v'_k\}$. اگر شروع کننده‌ی عمل تحمیل یکی از رئوس v_i یا v_j به عنوان مثال v_i باشد، آنگاه $\ell = i-1$ ، $k = i+1$ و $j \in \{i-1, i+1\}$. فرض کنید $j = i+1$ در این صورت v_{i-1} تنها رأس سفید مجاور v_i است، پس v_i رأس v_{i-1} را تحمیل می‌کند. ملاحظه می‌شود که رئوس سیاه v_{i-1} ، v_{i+1} ، v'_{i+1} ، v'_{i-1} هر کدام حداقل با دو رأس سفید مجاورند، لذا عمل تحمیل متوقف می‌شود که تناقض است. پس فرض کنید شروع کننده‌ی عمل تحمیل یکی از رئوس v'_ℓ و v'_k به عنوان مثال v'_k باشد. در این صورت $\{i, j\} = \{k-1, k+1\}$.

پس w تنها رأس سفید مجاور با v'_k است، لذا v'_k رأس w را تحمیل می‌کند. چون رئوس w، v_{k-1} و v_{k+1} هر کدام حداقل دو رأس سفید مجاور دارند، پس v'_ℓ شروع کننده‌ی بعدی عمل تحمیل است. در این صورت $v'_\ell \in \{v'_{k+1}, v'_{k-2}\}$. بدون کاستن از کلیت فرض کنید $v'_\ell = v'_{k-2}$. اگر $n = 4$، آنگاه هر رأس سیاه یا همسایه سفید ندارد یا حداقل با دو رأس سفید مجاور است. اگر $n \geq 5$ آنگاه v'_{k-2} رأس v_{k-3} را تحمیل می‌کند. هر کدام از رئوس سیاه یا همسایه سفید ندارند یا حداقل با دو رأس سفید مجاورند. در نتیجه عمل تحمیل ادامه نمی‌یابد که تناقض است. بنابراین هر مجموعه‌ی چهار عضوی فاقد w از رئوس $\mu(C_n)$ نمی‌تواند یک مجموعه‌ی تحمیلی صفر این گراف باشد.

حالت دوم: فرض کنید $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{Z}$، در این صورت $|Z \cap V| \in \{1,2\}$. فرض کنید $Z \cap V' = \{v'_i\}$ و $Z \cap V = \{v_\ell, v_t\}$. لذا یکی از دو رأس v_{i-1} یا v_{i+1} متعلق به $\{v_\ell, v_t\}$ هستند. فرض کنید $v_\ell = v_{i-1}$. در این صورت v'_i رأس v_{i+1} را تحمیل می‌کند. ملاحظه می‌شود که هر رأس سیاه در $\mu(C_n)$ یا همسایه سفید ندارد یا حداقل با دو رأس سفید مجاور است. بنابراین عمل تحمیل متوقف می‌شود. فرض کنید $Z \cap V = \{v_i\}$ و $Z \cap V' = \{v'_t, v'_\ell\}$. واضح است که شروع کننده عمل تحمیل یکی از دو رأس v'_t یا v'_ℓ هستند. فرض کنید v'_t شروع کننده عمل تحمیل باشد. در این صورت

$$v_i \in N_{\mu(C_n)}(v'_t) = \{w, v_{t-1}, v_{t+1}\}\,.$$

فرض کنید $i = t - 1$. در این صورت v'_t رأس v_{t+1} را تحمیل می‌کند. به طور مشابه اگر v'_ℓ شروع کننده عمل تحمیل باشد، آنگاه v'_ℓ رأس $v_{\ell+1}$ را تحمیل می‌کند. اگر v'_ℓ و v'_t هر دو شروع کننده‌ی عمل تحمیل باشند آنگاه $\ell = i + 1$ و $t = i - 1$. به هر حال هر رأس سیاه $\mu(G)$ یا همسایه سفید ندارد یا حداقل دو همسایه‌ی سفید دارد که عمل تحمیل متوقف می‌شود. از این رو هر مجموعه‌ی چهار عضوی از رئوس $\mu(C_n)$ که شامل w باشد یک مجموعه‌ی تحمیلی صفر گراف $\mu(C_n)$ نیست. در نتیجه $Z(\mu(C_n)) \geq 5$. به علاوه طبق قضایای ۲-۷ و ۲-۸، داریم:

$$3 \leq M(\mu(C_n)) \leq 5$$

بنابر قضایای ۳-۲-۲ و ۳-۲-۴، به نظر می‌رسد حدس زیر قابل اثبات باشد:

حدس: فرض کنید G یک گراف از مرتبه‌ی $n \geq 4$ و $B = \{a \in V(G) | \deg a = n - 1\}$. در این صورت $Z\big(\mu(G)\big) = 2n - 3$ اگر و تنها اگر زیر گراف القایی روی B گراف کامل و زیر گراف القایی روی $V(G) \setminus B$ فاقد یال باشد.

فهرست منابع

[۱] عزیزی کشاورز، پریسا، تهرانیان، ابوالفضل. (۱۳۹۹). 'عدد احاطه‌گری وقوعی گراف‌ها'، پژوهش‌های نوین در ریاضی 6(24), pp. 85-96.

[۲] فغانی، مرتضی. (۱۳۹۸). 'بررسی بیشینه تعداد رده‌های احاطه‌گر در رنگ‌آمیزی یک گراف'، پژوهش‌های نوین در ریاضی 5(21), pp. 57-62.

[3] AIM workshop Zero forcing and it's applications, American Institute of Mathmatics, San Jose, CA, Jan.30_Feb.3, 2017 Availabele at https:// aimath.org/ past workshops/ Zeroforcing.html/.

[4] Alameda, J.S. Curl, E. Grez, A. Hogben, L. Schulte, A. Young, D. and Young, M. 2018. Families of graphs with maximum nullity equal to zero forcing number. *Special Matrices*, 6(1), pp. 56-67.

[5] Barioli, F. Barrett, W. Butler, S. Cioabă, S.M. Cvetković, D. Fallat, S.M. Godsil, C. Haemers, W. Hogben, L. Mikkelson, R. and Narayan, S. 2008. Zero forcing sets and the minimum rank of graphs. *Linear Algebra and its Applications*, 428(7), pp. 1628-1648.

[6] Barioli, F. Barrett, W. Fallat, S.M. Hall, H.T. Hogben, L. Shader, B. Van Den Driessche, P and Van Der Holst, H. 2010. Zero forcing parameters and minimum rank problems. *Linear Algebra and its Applications*, 433(2), pp. 401-411.

[7] Berman, A. Feidland, S. Hogben, L. Rothbium, U.G and Shader, B. 2008. An upper bound for the minimum rank of graph. Linear Algebra Appl. 429, pp. 1629-1638.

[8] Edholm, C.J. Hogben, L. Huynh, M., LaGrange, J. and Row, D.D. 2012. Vertex and edge spread of zero forcing number, maximum nullity, and minimum rank of a graph. *Linear Algebra and its Applications*, 436(12), pp.4352-4372.

[9] Eroh, L. Kang, C.X. and Yi, E. 2017. A comparison between the metric dimension and zero forcing number of trees and unicyclic graphs. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, 33(6), pp.731-747.

[10] Fallat, S.M. and Hogben, L. 2007. The minimum rank of symmetric matrices described by a graph: a survey. *Linear Algebra and its Applications*, 426(2-3), pp. 558-582.

[11] Johnson, C.R. Loewy, R. and Smith, P.A. 2009. The graphs for which the maximum multiplicity of an eigenvalue is two. *Linear and Multilinear Algebra*, 57(7), pp.713-736.

[12] Montazeri, Z. Soltankhah, N. On the Relationship Between the Zero Forcing Number and Path Cover Number for Some Graphs. 2020. Bull. Iran. Math. Soc. 46, pp. 767–776.

[13] Row, D.D., 2012. A technique for computing the zero forcing number of a graph with a cut-vertex. *Linear Algebra and its Applications*, 436(12), pp.4423-4432.

[14] Vatandoost, E. and Golkhandy Pour, Y. 2017. On the zero forcing number of some Cayley graphs. *Algebraic Structures and Their Applications*, 4(2), pp.15-25.

[15] Vatandoost, E. and Golkhandy Pour, Y., 2018. Maximum nullity of some Cayley graphs. *Cogent Mathematics & Statistics*, 5(1), pp.1462658.

[16] Vatandoost, E. and Nozari, K. 2018. Maximum nullity and zero forcing number of graphs with rank at most 4.

Cogent Mathematics & Statistics, *5*(1), pp.1437668.

[17] Vatandoost, E. Ramezani, F. and Alikhani, S. 2019. On the zero forcing number of generalized Sierpinski graphs. *Transactions on Combinatorics*, 8(1), pp. 41-50.