دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال ششم، شماره بیست و هشتم، بهمن و اسفند ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

مکمل گراف M-اشتراکی ایده‌آل‌های یک حلقه

فریده حیدری *

گروه ریاضی، واحد کرج، دانشگاه آزاد اسلامی، کرج، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۰۳/۱۹ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۸/۱۲/۱۰

چکیده

فرض کنید R یک حلقه جابه‌جایی یکدار و M یک R-مدول یکانی باشد. همچنین فرض کنید $I(R)^*$ مجموعه همه ایده‌آل‌های غیربدیهی R باشد. مکمل گراف M-اشتراکی ایده‌آل‌های R که با $\Gamma_M(R)$ نشان داده می‌شود، گرافی است با مجموعه رئوس $I(R)^*$ و دو رأس متمایز I و J مجاورند هرگاه $IM \cap JM = \{0\}$. در این مقاله، برای هر R-مدول ضربی M، قطر و کمر $\Gamma_M(R)$ تعیین شده است. همچنین، نشان می‌دهیم اگر $m, n > 1$ دو عدد صحیح باشند و $\mathbb{Z}_n$ یک $\mathbb{Z}_m$-مدول باشد، مکمل گراف $\mathbb{Z}_n$-اشتراکی ایده‌آل‌های $\mathbb{Z}_m$، تام ضعیف است.

واژه‌های کلیدی: قطر، کمر، تام ضعیف، مدول ضربی.

*. عهده‌دار مکاتبات:
Email: f-heydari@kiau.ac.ir

۱. مقدمه

مقالات زیادی در باب گراف‌های وابسته به ساختارهای جبری به‌ویژه حلقه‌ها به چاپ رسیده است که برای نمونه می‌توان به مراجع [1-7] اشاره نمود. یکی از مهم‌ترین گراف‌های وابسته به حلقه‌ها، گراف اشتراکی ایده‌آل‌های یک حلقه و مکمل آن است. البته این گراف نه تنها برای حلقه‌ها که برای دیگر ساختارهای جبری نظیر گروه‌ها و مدول‌ها نیز تعریف شده و در مقالات متعددی همچون [8, 9, 10] مورد بررسی قرار گرفته است. در این مقاله، R یک حلقه جابه‌جایی یکدار و M یک R–مدول یکانی ناصفر است. منظور از یک ایده‌آل غیربدیهی R، ایده‌آل ناصفر و محض R است. همچنین $I(R)^*$ معرف مجموعه همه ایده‌آل‌های غیربدیهی R می‌باشد. فرض کنید M یک R–مدول باشد. M یک مدول ضربی نامیده می‌شود هرگاه هر زیرمدول آن به شکل IM باشد که I ایده‌آلی از R است. پوچساز M با نماد $\mathrm{ann}(M)$ نشان داده می‌شود. M را یک مدول باوفا می‌نامیم اگر $\mathrm{ann}(M)=\{0\}$. همچنان که معمول است، $\mathbb{Z}_n$ مشخص کننده حلقه اعداد صحیح به پیمانه n می‌باشد. کوچکترین مضرب مشترک دو عددصحیح a و b را با نماد $[a,b]$ نشان می‌دهیم و می‌نویسیم $a|b$ هرگاه b مضربی از a باشد.

به گرافی که هیچ یالی نداشته باشد، گراف پوچ اطلاق می‌شود. گراف پوچ n رأسی را با $\overline{K}_n$ نشان می‌دهیم. همچنین یک گراف دوبخشی کامل با دو بخش X و Y که $|X|=m$ و $|Y|=n$ را با نماد $K_{m,n}$ نمایش می‌دهیم. اجتماع مجزای دو گراف G و H را با نماد $G\cup H$ نشان می‌دهیم. به رأسی که درجه اش صفر باشد، رأس ایزوله گوییم. گراف G را همبند گویند هرگاه بین هردو رأس متمایز آن یک مسیر وجود داشته باشد و در غیر این صورت آن را ناهمبند نامند. طول کوتاهترین مسیر بین دو رأس u و v از گراف G را فاصله این دو رأس نامیده و با نماد $d(u,v)$ نشان می‌دهند. اگر هیچ مسیری بین u و v نباشد، قرار می‌دهیم $d(u,v)=\infty$. قطر گراف G نیز با نماد $\mathrm{diam}(G)$ نشان داده شده و برابر است با $\sup\{d(u,v)|u,v\in V(G)\}$. که در آن $V(G)$ مجموعه رئوس G است. کمر گراف G که آن را با $\mathrm{gr}(G)$ نشان می‌دهیم، طول کوتاهترین دور در G است و اگر G شامل هیچ دوری نباشد، قرار می‌دهیم $\mathrm{gr}(G)=\infty$. گرافی که هیچ دوری نداشته باشد، جنگل نامیده می‌شود. یک خوشه در گراف G، یک زیرگراف کامل از G است. خوشه W در G را ماکزیمم گویند هرگاه در بین خوشه‌های G بیشترین تعداد رأس را داشته باشد. تعداد رئوس یک خوشه ماکزیمم در گراف G را عدد خوشه‌ای نامیده و آن را با نماد $\omega(G)$ نمایش می‌دهند. عدد رنگی گراف G که با $\chi(G)$ نشان داده می‌شود، کمترین تعداد رنگی است که بتوان به رئوس G نظیر کرد طوری که رنگ هیچ دو رأس مجاوری یکسان نباشد. واضح است که همواره داریم $\chi(G)\geq\omega(G)$. گراف G را تام ضعیف نامند هرگاه $\chi(G)=\omega(G)$. شایان ذکر است که محاسبه عدد خوشه ای و یا عدد رنگی یک گراف، مسأله‌ای NP–کامل است.

گراف M–اشتراکی ایده‌آل‌های R، $G_M(R)$، نخستین بار در مقاله [11] معرفی شده و برخی ویژگی‌های مهم آن مورد مطالعه قرار گرفته است. از جمله ثابت شده است برای هر R–مدول ضربی M، $\mathrm{diam}(G_M(R))\in\{0,1,2,\infty\}$ و $\mathrm{gr}(G_M(R))\in\{3,\infty\}$. در این مقاله، مکمل گراف M–اشتراکی ایده‌آل‌های R که با $\Gamma_M(R)$ نشان داده می‌شود، را بررسی خواهیم کرد. برای هر R–مدول ضربی M، نشان می‌دهیم اگر $\Gamma_M(R)$ رأس ایزوله نداشته باشد، همبند است. به‌علاوه نشان می‌دهیم $\mathrm{diam}(\Gamma_M(R))\in\{0,1,2,3,\infty\}$ و $\mathrm{gr}(\Gamma_M(R))\in\{3,4,\infty\}$. همچنین اگر $m,n>1$ دو عدد صحیح باشند و $\mathbb{Z}_n$ یک $\mathbb{Z}_m$–مدول باشد، قطر و کمر $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}(\mathbb{Z}_m)$ که برای اختصار با نماد $\Gamma_n(\mathbb{Z}_m)$ نشان داده شده را رده‌بندی کرده و ثابت می‌کنیم این گراف تام ضعیف است.

۲- مکمل گراف M–اشتراکی

این بخش را با تعریف زیر شروع می‌کنیم.

تعریف ۲-۱. فرض کنید R یک حلقه و M یک R–مدول ناصفر باشد. مکمل گراف M–اشتراکی ایده‌آل‌های R که با $\Gamma_M(R)$ نشان داده می‌شود، گرافی است با

مجموعه رئوس $I(R)^*$ و دو رأس متمایز I و J مجاورند هرگاه $IM \cap JM = \{0\}$.

واضح است که اگر M و N دو R-مدول یکریخت باشند، آنگاه $\Gamma_M(R)$ و $\Gamma_N(R)$ دو گراف یکسان خواهند بود.

تبصره ۲-۲. فرض کنید M یک R-مدول ناصفر باشد به‌طوری که $\mathrm{ann}(M) \neq \{0\}$. در این صورت اگر I یک ایده‌آل ناصفر باشد که $I \subseteq \mathrm{ann}(M)$، آنگاه I به همه رئوس دیگر $\Gamma_M(R)$ متصل است و لذا $\Gamma_M(R)$ یک گراف همبند خواهد بود.

قضیه زیر نشان می‌دهد که برای هر R-مدول ضربی M، $\mathrm{diam}(\Gamma_M(R)) \in \{0, 1, 2, 3, \infty\}$.

قضیه ۲-۳. فرض کنید R یک حلقه و M یک R-مدول ضربی ناصفر باشد. اگر $\Gamma_M(R)$ رأس ایزوله نداشته باشد، آنگاه همبند است و به‌علاوه داریم

$$\mathrm{diam}(\Gamma_M(R)) \leq 3.$$

برهان. با توجه به تبصره ۲-۲، اگر داشته باشیم $\mathrm{ann}(M) \neq \{0\}$، آنگاه خواهیم داشت $\mathrm{diam}(\Gamma_M(R)) \leq 2$ پس فرض کنیم M یک R-مدول باوفا باشد و I و J دو رأس غیرمجاور در $\Gamma_M(R)$ باشند. چون $\Gamma_M(R)$ رأس ایزوله ندارد، فرض کنیم I' و J' دو رأسی باشند که به ترتیب به I و J متصل‌اند یعنی $IM \cap I'M = \{0\}$ و $JM \cap J'M = \{0\}$.

اگر $I' = J'$ که مسأله حل است. در غیر این صورت دو حالت در نظر می‌گیریم.

حالت اول: $I'M \cap J'M = \{0\}$

در این صورت $I - I' - J' - J$ یک مسیر به طول ۳ بین I و J است.

حالت دوم: $I'M \cap J'M \neq \{0\}$

چون M یک R-مدول ضربی است، ایده‌آل K از R وجود دارد که $KM = I'M \cap J'M$. توجه کنید که اگر $K = R$، آنگاه $I'M \cap J'M = M$ و بنابراین $I'M = M$ و چون $IM \cap I'M = \{0\}$، خواهیم داشت $IM = \{0\}$. حال از $\mathrm{ann}(M) = \{0\}$ نتیجه می‌گیریم $I = \{0\}$ که تناقض است. پس K یک ایده‌آل غیربدیهی R است و به‌علاوه داریم

$$IM \cap KM \subseteq IM \cap I'M = \{0\},$$

و

$$JM \cap KM \subseteq JM \cap J'M = \{0\}.$$

یعنی K به هر دو I و J متصل است. به این ترتیب اثبات کامل می‌شود. □

در قضیه بعد نشان می‌دهیم برای هر R-مدول ضربی M، $\mathrm{gr}(\Gamma_M(R)) \in \{3, 4, \infty\}$.

قضیه ۲-۴. فرض کنید R یک حلقه و M یک R-مدول ضربی ناصفر باشد. اگر $\Gamma_M(R)$ شامل دور باشد، آنگاه

$$\mathrm{gr}(\Gamma_M(R)) \leq 4.$$

برهان. به روش برهان خلف، فرض کنیم $\Gamma_M(R)$ شامل دور باشد ولی $\mathrm{gr}(\Gamma_M(R)) = \mathrm{g} \geq 5$. فرض کنیم $I_1, \dots, I_g$ به ترتیب رئوس این دور باشند. چون I_1 و I_{g-2} به هم وصل نیستند، پس $I_1M \cap I_{g-2}M \neq \{0\}$. از آنجا که M یک R-مدول ضربی است، ایده‌آل J از R وجود دارد که $JM = I_1M \cap I_{g-2}M$. اگر $J = R$، آنگاه $I_1M = M$ و چون $I_1M \cap I_2M = \{0\}$، خواهیم داشت $I_2M = \{0\}$. بنابراین $I_2M \cap I_gM = \{0\}$ که نتیجه می‌دهد I_1, I_2, I_g در $\Gamma_M(R)$ تشکیل یک مثلث می‌دهند و این یک تناقض می‌باشد. پس J یک ایده‌آل غیربدیهی R است. از طرف دیگر داریم

$$JM \cap I_gM \subseteq I_1M \cap I_gM = \{0\},$$

و

$$JM \cap I_{g-1}M \subseteq I_{g-2}M \cap I_{g-1}M = \{0\}.$$

یعنی J به هر دو I_g و I_{g-1} وصل است. پس J, I_{g-1}, I_g رئوس یک مثلث در $\Gamma_M(R)$ است که تناقض می‌باشد. □

فرض کنید $m, n \geq 2$ دو عدد صحیح باشند. می‌دانیم $\mathbb{Z}_n$ یک $\mathbb{Z}_m$-مدول است هرگاه $n|m$. اکنون به مطالعه مکمل گراف $\mathbb{Z}_n$-اشتراکی ایده‌آل‌های $\mathbb{Z}_m$

می‌پردازیم. برای اختصار، $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}(\mathbb{Z}_m)$ را با نماد $\Gamma_n(\mathbb{Z}_m)$ نشان می‌دهیم. در ادامه این بخش، فرض می‌کنیم $m = p_1^{\alpha_1} \cdots p_s^{\alpha_s}$ و $n = p_1^{\beta_1} \cdots p_t^{\beta_t}$ که $t \le s$ و $p_1, \dots, p_s$ اعداد اول متمایز هستند و برای هر $1 \le i \le t$ ، $0 < \beta_i \le \alpha_i$. همچنین فرض می‌کنیم، m اول نیست.

تبصره ۲-۵. به آسانی می‌توان دید که
$I(\mathbb{Z}_m)^* = \{d\mathbb{Z}_m \mid d|m, d \ne 1, m\}.$

لذا $|I(\mathbb{Z}_m)^*| = \prod_{i=1}^{s}(\alpha_i + 1) - 2$. پس بدیهی است که اگر $n|m$ ، آنگاه $\mathbb{Z}_n$ یک $\mathbb{Z}_m$-مدول ضربی است. همچنین دو رأس $d_1\mathbb{Z}_m$ و $d_2\mathbb{Z}_m$ از $\Gamma_n(\mathbb{Z}_m)$ مجاورند اگر و تنها اگر $n|[d_1, d_2]$. به‌علاوه اگر $d\mathbb{Z}_m \in I(\mathbb{Z}_m)^*$ و $n|d$ ، آنگاه $d\mathbb{Z}_m$ به همه رئوس دیگر $\Gamma_n(\mathbb{Z}_m)$ متصل است.
در قضایای زیر، قطر و کمر گراف $\Gamma_n(\mathbb{Z}_m)$ را رده‌بندی می‌کنیم.

قضیه ۲-۶. گراف $\Gamma_n(\mathbb{Z}_m)$ کامل است اگر و تنها اگر یکی از گزاره‌های زیر برقرار باشد:
1. $m = p_1^{\alpha_1}p_2,\ n = p_1,\ \ \alpha_1 \ge 1,$
2. $m = p_1^{\alpha_1},\ \ \ \ n = p_1,\ \ \alpha_1 \ge 2,$
3. $m = p_1^{\alpha_1},\ n = p_1^2,\ \ \alpha_1 \ge 2,$
4. $m = n = p_1p_2.$

برهان. به آسانی از نتیجه ۳ مرجع [12] به دست می‌آید.

قضیه ۲-۷. فرض کنید گراف $\Gamma_n(\mathbb{Z}_m)$ کامل نباشد. در این صورت گزاره‌های زیربرقرارند:
۱. $\Gamma_n(\mathbb{Z}_m)$ ناهمبند است هرگاه $m = n$ و به ازای بعضی مقادیر i، که $1 \le i \le s$ ، $\alpha_i \ge 2$.
۲. $\mathrm{diam}(\Gamma_n(\mathbb{Z}_m)) = 3$ هرگاه $m = n = p_1 \cdots p_s$ و $s \ge 3$.
۳. $\mathrm{diam}(\Gamma_n(\mathbb{Z}_m)) = 2$ هرگاه $m \ne n$.

برهان. با توجه به تبصره ۲-۵ و قضیه ۲-۳:
قسمت (۱) به راحتی از قضیه ۵ مرجع [12] ثابت می‌شود. برای اثبات قسمت (۲)، دقت کنید که اگر $m = n = p_1 \cdots p_s$ و $s \ge 3$، آنگاه $d(p_1\mathbb{Z}_m, p_2\mathbb{Z}_m) = 3$ و برای اثبات قسمت (۳)، واضح است که اگر $m \ne n$ ، آنگاه $n\mathbb{Z}_m$ به همه رئوس دیگر $\Gamma_n(\mathbb{Z}_m)$ متصل است. □
برای رده‌بندی کمر گراف $\Gamma_n(\mathbb{Z}_m)$ ، توجه کنید که اگر n حداقل سه شمارنده اول متمایز داشته باشد، آنگاه $\frac{n}{p_1^{\beta_1}}\mathbb{Z}_m$ ، $\frac{n}{p_2^{\beta_2}}\mathbb{Z}_m$ و $\frac{n}{p_3^{\beta_3}}\mathbb{Z}_m$ تشکیل یک مثلث می‌دهند و لذا در این حالت کمر گراف برابر ۳ است. اگر $n = p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}$ و $m \ne n$، آنگاه $p_1^{\beta_1}\mathbb{Z}_m$، $p_2^{\beta_2}\mathbb{Z}_m$ و $n\mathbb{Z}_m$ رئوس یک مثلث در $\Gamma_n(\mathbb{Z}_m)$ است. پس در این حالت نیز کمر گراف برابر ۳ خواهد بود. درصورتی‌که $m = n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$ و $\alpha_1,\ \alpha_2 \ge 2$، قرار دهید
$X = \{p_1^{r_1}p_2^{\alpha_2}\mathbb{Z}_m | 0 \le r_1 < \alpha_1\},$
$Y = \{p_1^{\alpha_1}p_2^{r_2}\mathbb{Z}_m | 0 \le r_2 < \alpha_2\}$

و

$Z = \{p_1^{r_1}p_2^{r_2}\mathbb{Z}_m | 0 \le r_1 < \alpha_1, 0 \le r_2 < \alpha_2\} - \{\mathbb{Z}_m\}.$

به وضوح رئوس Z همگی ایزوله هستند. همچنین رئوس X و Y تشکیل یک گراف دوبخشی کامل می‌دهند. پس در این حالت، $\Gamma_n(\mathbb{Z}_m) = \overline{K}_{\alpha_1\alpha_2-1} \cup K_{\alpha_1,\alpha_2}$ و در نتیجه کمر آن برابر ۴ است. با بررسی سایر حالات که به آسانی انجام می‌شود، می‌توان قضایای زیر را نتیجه گرفت.

قضیه ۲-۸. $\mathrm{gr}(\Gamma_n(\mathbb{Z}_m)) = 4$ هرگاه $m = n = p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}$ و $\alpha_1,\ \alpha_2 \ge 2$.

قضیه ۲-۹. گراف $\Gamma_n(\mathbb{Z}_m)$ جنگل است هرگاه یکی از گزاره‌های زیر برقرار باشد:
1. $m = n = p_1^{\alpha_1}p_2,\ \ \ \ \alpha_1 \ge 1,$
2. $m = n = p_1^{\alpha_1},\ \ \ \alpha_1 \ge 2,$
3. $m = p_1^{\alpha_1}p_2,\ n = p_1^{\alpha_1}, \alpha_1 \ge 1,$
4. $m = p_1^{\alpha_1},\ n = p_1^{\alpha_1-1}, \alpha_1 \ge 2,$
5. $m = p_1^3,\ n = p_1.$

برهان. کافی است دقت کنیم که اگر $m = n = p_1p_2$ یا $n = p_1$ ، $m = p_1^{\alpha_1}$ که $\alpha_1 = 2,3$، آنگاه $\Gamma_n(\mathbb{Z}_m)$ یک گراف کامل با حداکثر ۲ رأس است و در سایر حالات فوق، گراف $\Gamma_n(\mathbb{Z}_m)$ به صورت زیر می‌باشد:

$$1.\ \Gamma_n(\mathbb{Z}_m) = \overline{K}_{\alpha_1-1} \cup K_{1,\alpha_1},\ \alpha_1 \geq 2,$$
$$2.\ \Gamma_n(\mathbb{Z}_m) = \overline{K}_{\alpha_1-1}\ ,$$
$$3.\ \Gamma_n(\mathbb{Z}_m) = K_{1,2\alpha_1-1}\ ,$$
$$4.\ \Gamma_n(\mathbb{Z}_m) = K_{1,\alpha_1-2},\ \alpha_1 \geq 3.$$

در پایان، نشان می‌دهیم گراف $\Gamma_n(\mathbb{Z}_m)$، تام ضعیف است.

قضیه ۲-۱۰. گراف $\Gamma_n(\mathbb{Z}_m)$ تام ضعیف است و به‌علاوه اگر $\Gamma_n(\mathbb{Z}_m)$ کامل نباشد، داریم

$$\chi\big(\Gamma_n(\mathbb{Z}_m)\big) = \omega\big(\Gamma_n(\mathbb{Z}_m)\big) = \prod_{i=1}^{t}(\alpha_i - \beta_i + 1)\prod_{i=t+1}^{s}(\alpha_i + 1) - 1 + t.$$

برهان. واضح است که اگر $\Gamma_n(\mathbb{Z}_m)$ کامل باشد، تام ضعیف است. پس فرض کنیم کامل نباشد. بنابر قضیه ۲ مرجع [12]،

$$\omega\big(\Gamma_n(\mathbb{Z}_m)\big) = \prod_{i=1}^{t}(\alpha_i - \beta_i + 1)\prod_{i=t+1}^{s}(\alpha_i + 1) - 1 + t.$$

در واقع اگر قرار دهیم

$$W = \{p_1^{r_1} \cdots p_s^{r_s}\mathbb{Z}_m \in V(\Gamma_n(\mathbb{Z}_m)) \mid \beta_j \leq r_j \leq \alpha_j, for\ 1 \leq j \leq t\}$$

و $X = \{x_1, \dots, x_t\}$ که برای هر $1 \leq j \leq t$، $x_j = p_j^{\beta_j-1}\prod_{i\neq j} p_i^{\alpha_i}\mathbb{Z}_m$، آنگاه $W \cup X$ رئوس یک خوشه ماکزیمم در $\Gamma_n(\mathbb{Z}_m)$ است. حال تعریف می‌کنیم

$$X_1 = \{p_1^{r_1} \cdots p_s^{r_s}\mathbb{Z}_m \in V(\Gamma_n(\mathbb{Z}_m)) \mid 0 \leq r_1 < \beta_1\}$$

و برای هر $2 \leq j \leq t$ ،

$$X_j = \{p_1^{r_1} \cdots p_s^{r_s}\mathbb{Z}_m \in V(\Gamma_n(\mathbb{Z}_m)) \mid \beta_i \leq r_i \leq \alpha_i,\ for\ 1 \leq i \leq j-1,\ 0 \leq r_j < \beta_j\}.$$

به وضوح هیچ یک از رئوس X_j به هم وصل نیست و چون $x_j \in X_j$، می‌توان همه رئوس X_j را با رنگ متناظر با x_j رنگ کرد. از آنجا که

$$V\big(\Gamma_n(\mathbb{Z}_m)\big) = W \cup (\cup_1^t X_j)$$

اثبات کامل است. □

نتیجه‌گیری

در این مقاله، نشان داده شد برای هر R-مدول ضربی M، اگر مکمل گراف M-اشتراکی ایده‌آل‌های R رأس ایزوله نداشته باشد، همبند است و قطر آن حداکثر ۳ می‌باشد و اگر شامل دور باشد، کمر آن حداکثر ۴ است. به‌علاوه، در حالتی که $\mathbb{Z}_n$ یک $\mathbb{Z}_m$-مدول باشد، قطر و کمر مکمل گراف $\mathbb{Z}_n$-اشتراکی ایده‌آل‌های $\mathbb{Z}_m$، رده بندی و نشان داده شد این گراف تام ضعیف است.

تشکر و قدردانی

نویسنده مقاله از دانشگاه آزاد اسلامی واحد کرج به جهت حمایت مالی از این پژوهش، تشکر و قدردانی می‌نماید. همچنین از نظرات و پیشنهادات داوران محترم که باعث بهبود مقاله شده است، کمال تشکر را دارد.

فهرست منابع

[۱] رجائی، سعید، گراف جمع زیرمدول‌های غیر اساسی، پژوهش‌های نوین در ریاضی، ۵(۱۷) (۱۳۹۸)، ۱۳۴–۱۲۱.

[۲] برزگر، حسن، احاطه‌گری و نمایش گراف اشتراکی روی فضاهای توپولوژی، پژوهش‌های نوین در ریاضی، ۴ (۱۴) (۱۳۹۷)، ۱۴۸–۱۳۷.

[۳] امجدی، جعفر، برخی خواص و عدد احاطه‌گر متمم یک گراف جدید وابسته به یک حلقه جابجایی، پژوهش‌های نوین در ریاضی، ۳(۱۲) (۱۳۹۶)، ۱۱۰-۹۹.

[4] Z. Shafiei, M Maghasedi, F. Heydari, S. Khojasteh, The annihilating graph of a ring, Mathematical Sciences 12 (1) (2018) 1-6.

[5] R. Nikandish, H. R. Maimani, H. Izanloo, The annihilating-ideal graph of $\mathbb{Z}_n$ is weakly perfect, Contributions to Discrete Mathematics 11 (1) (2016) 16-21.

[6] M. J. Nikmehr, F. Heydari, The M-regular graph of a commutative ring, Mathematica Slovaca 65 (1) (2015) 1-12.

[7] I. Chakrabarty, S. Ghosh, T. K. Mukherjee, M. K. Sen, Intersection graphs of ideals of rings, Discrete Math. 309 (2009) 5381-5392.

[8] S Akbari, F Heydari, M Maghasedi, The intersection graph of a group, J. Algebra Appl. 14 (5) (2015) 1550065.

[9] S. Akbari, H. A. Tavallaee, S. Khalashi Ghezelahmad, On the complement of the intersection graph of submodules of a module, J. Algebra Appl. 14 (8) (2015) 1550116.

[10] S. Akbari, H. A. Tavallaee, S. Khalashi Ghezelahmad, Intersection graph of submodules of a module, J. Algebra Appl. 11 (1) (2012) 1250019.

[11] F. Heydari, The M-intersection graph of ideals of a commutative ring, Discrete Math. Algorithms Appl. 10 (3) (2018) 1850038.

[12] S. Khojasteh, The intersection graph of ideals of $\mathbb{Z}_m$, Discrete Math. Algorithms Appl. 11 (4) (2019) 1950037.