دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال ششم، شماره بیست و هفتم، آذر و دی ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

مجموعه‌های متعامد: قضایای نقطه انطباق و ثابت در فضاهای متریک ناکامل

حمید باغانی [*]، مریم رمضانی [۲]، حمیدخدایی [۳]

[۱] استادیار، گروه ریاضی، دانشکده ریاضی، آماروعلوم کامپیوتر، دانشگاه سیستان و بلوچستان، زاهدان، ایران
[۲] استادیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم پایه، دانشگاه بجنورد، بجنورد، ایران
[۳] استادیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم ریاضی وآمار، دانشگاه ملایر، ملایر، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۸/۰۲/۰۷ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۸/۰۶/۰۴

چکیده

در این مقاله با الهام از مقاله دافر و همکاران [۶]، به بیان و اثبات چند قضیه برای نگاشت‌های مجموعه مقدار پرداخته و با استفاده از این قضایا، وجود نقاط انطباق و نقاط ثابت یک رده کلی از نگاشت‌های مجموعه مقدار که در یک شرط انقباضی تعمیم یافته صدق می‌کنند، را نتیجه‌گیری می‌کنیم. برای این منظور ابتدا مفهوم مجموعه‌های متعامد که برگرفته شده از مقاله اخیر اسحاقی و همکاران [۱۱] می‌باشد را معرفی کرده و با استفاده از این مفهوم، قضایا را در فضاهای قویا متعامد کامل (نه لزوماً فضاهای متری کامل) مورد بررسی قرار می‌دهیم. به علاوه، پژوهش حاضر با نگاه جدید و متفاوت به موضوع پرداخته و با بیان چند مثال غیر بدیهی، اهمیت پرداختن به این موضوع را تشریح کرده است. همچنین با مثال‌های مطرح شده در انتهای مقاله، نشان داده‌ایم که نتایج بدست آمده، توسیعی واقعی از نتایج قبل در این زمینه هستند.

واژه‌های کلیدی: نگاشت‌های مجموعه مقدار، نقاط ثابت و انطباق، مجموعه‌های متعامد، فضاهای قویاً متعامد کامل.

---

* عهده‌دار مکاتبات: Email: h.baghani@gmail.com

۱- مقدمه

در این مقاله فرض می‌شود که $\mathbb{N}$ مجموعه اعداد طبیعی، $\mathbb{Q}$ مجموعه اعداد گویا و $\mathbb{R}$ مجموعه اعداد حقیقی باشند. همچنین برای هر مجموعه غیر تهی X فرض می‌شود که $P^*(X)$ تمامی زیر مجموعه‌های غیرتهی X را نشان دهد. فرض کنیم (X,d) یک فضای متری باشد، در ادامه مقاله از نماد $CB(X)$ برای معرفی تمام زیر مجموعه‌های غیرتهی و کراندار X و از نماد $K(X)$ برای معرفی تمامی زیر مجموعه‌های ناتهی و فشرده X استفاده می‌کنیم.

فرض کنیم $A,B \in CB(X)$ و $x\in X$، در این صورت تعریف می‌کنیم:

$$D(x,A) := \inf\{d(x,a) : a \in A\}$$

و

$$\mathrm{H}(A,B) = \max\left\{\sup_{a\in A} D(a,B), \sup_{b\in B} D(b,A)\right\}.$$

تابع H بر روی $CB(X)$ یک متر است که آن را متر هاسدورف القا شده توسط متر d می‌گوییم. می‌توان نشان داد، اگر X یک فضای متری کامل باشد آن‌گاه $(CB(X), H)$ نیز یک فضای متری کامل خواهد بود. برای اطلاعات بیشتر به مرجع [۱] مراجعه شود.

فرض می‌کنیم $f : X\to X$ یک خود نگاشت و T از X به $CB(X)$ یک نگاشت مجموعه مقدار باشد. نقطه $x\in X$ یک نقطه انطباق[۱] از f و T می‌باشد اگر $fx\in Tx$. اگر $f = id$ (تابع همانی) آن‌گاه $x = fx\in Tx$ و به x نقطه ثابت[۲] نگاشت T گفته می‌شود. مجموعه نقاط ثابت T را با نماد F(T) و مجموعه نقاط انطباق f و T را با نماد $COP(f,T)$ نشان می‌دهیم.

در سال ۱۹۶۹ ندلر [۱] قضیه نقطه ثابت باناخ را برای نگاشت‌های مجموعه مقدار به شرح زیر بیان کرد.

قضیه ۱.۱. فرض‌کنیم (X,d) یک فضای متری کامل و T یک نگاشت از X به $CB(X)$ باشد. فرض کنیم که $r\in [0, 1)$ وجود دارد به‌طوری که برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم $H(Tx, Ty) \le rd(x, y)$. در این صورت وجود دارد. $z\in X$ به‌طوری که داشته باشیم $z\in T(z)$.

با الهام گرفتن از پژوهش ندلر، نظریه نقطه ثابت برای توابع مجموعه مقدار از جهات مختلفی توسط بسیاری از پژوهش‌گران توسعه یافته است. به ویژه ریچ [۲]، برایند- برایند [۳]، میزوگوچی و تاکاهاشی [۴]، دیو [۵]، دافر و همکاران [۷-۶]، امینی- هرندی [۸]، بونسری و همکاران [۹]، پتروسل و همکاران [۱۰] و بسیاری دیگر از نویسندگان را می‌توان نام برد.

اخیرا دیو [۵] یک توسیعی از قضیه نقطه ثابت برایند- برایند به شرح زیر ارائه کرده است.

قضیه ۲.۱. فرض کنیم (X,d) یک فضای متری کامل، T از X به $CB(X)$ یک نگاشت مجموعه مقدار، $f : X \to X$ خود نگاشت پیوسته و $\beta : [0, \infty) \to [0, 1)$ یک تابع باشد به‌طوری که برای هر $t \ge 0$ شرط $\limsup_{s\to t^+} \beta(s) < 1$ برقرار باشد. فرض کنیم که:

(الف). برای هر $x \in X$ داشته باشیم

$$\{fy : y\in Tx\} \subseteq Tx.$$

(ب). وجود داشته باشد یک تابع مانند $h: X\to[0, 1)$ به‌طوری که برای هر $x, y\in X$ داشته باشیم

$$H(Tx, Ty) \le \beta(d(x, y)).d(x, y) + h(fy)D(fy, Tx).$$

در این صورت

$$COP(f, T) \cap F(T) \neq \emptyset.$$

در ادامه به بیان قضیه نقطه ثابت برایند- برایند می‌پردازیم.

قضیه ۳.۱. فرض‌کنیم (X,d) یک فضای متری کامل، T از X به $CB(X)$ یک نگاشت مجموعه مقدار و $\beta: [0, \infty) \to [0, 1)$ یک تابع باشد به‌طوری که برای هر $t \ge 0$ داشته باشیم: $\limsup_{s\to t^+} \beta(s) < 1$.

حال فرض کنیم برای هر $x, y\in X$ رابطه زیر برقرار باشد:

$$H(Tx,Ty) \le \beta\big(d(x,y)\big).\, d(x,y) + L.D(y,Tx)$$

1. Coincidence point

2. Fixed point

که در آن $L \geq 0$. در این صورت $F(T) \neq \emptyset$ خواهد بود.
لازم به ذکر است که اگر در قضیه فوق $L = 0$ در نظر گرفته شود، قضیه نقطه ثابت میزوگوچی و تاکاهاشی حاصل خواهد شد که یک پاسخ جزئی از مسئله ۹ در [۲] می‌باشد.

قضیه ۴.۱. فرض می‌کنیم (X,d) یک فضای متری کامل، T از X به $K(X)$ یک نگاشت مجموعه مقدار و همچنین تابع $\beta:[0, \infty) \to (0,1)$ به گونه‌ای باشد که برای هر $t > 0$ داشته باشیم: $\limsup_{s\to t^+} \beta(s) < 1$.
حال اگر برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم:

$$H(Tx,Ty) \leq \beta\left(d(x,y)\right).d(x,y),$$

آنگاه

$$F(T) \neq \emptyset.$$

ریچ [۲] این سوال را مطرح کرد که آیا قضیه فوق نیز برای نگاشت $T : X \to CB(X)$ برقرار است یا نه؟ میزوگوچی و تاکاهاشی [۴] در ۱۹۸۹ به این سوال پاسخ دادند و قضیه زیر را اثبات کردند، که عمومیت بیشتری نسبت به قضیه ندلر دارد.

قضیه ۵.۱. فرض می‌کنیم (X,d) یک فضای متری کامل، T از X به $CB(X)$ نگاشت مجموعه مقدار و همچنین تابع $\beta: [0, \infty) \to [0,1)$ به گونه‌ای باشد که برای هر $t \geq 0$ شرط $\limsup_{s\to t^+} \beta(s) < 1$ برقرار باشد. حال فرض کنیم برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم

$$H(Tx,Ty) \leq \beta\left(d(x,y)\right).\,d(x,y).$$

در این صورت $F(T)$ یک مجموعه ناتهی خواهد بود.
در سال ۲۰۱۱، امینی- هرندی مفهوم شبه انقباضی[۱] برای توابع مجموعه مقدار معرفی و قضیه جالب زیر را بیان و اثبات کرد.

قضیه ۶.۱. فرض می‌کنیم (X,d) یک فضای متری کامل و T از X به $CB(X)$ یک نگاشت مجموعه مقدار باشد. حال فرض‌کنیم برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم:

$$H(Tx,Ty) \leq k.\max\{d(x,y), D(x,Tx), D(y,Ty), D(x,Ty), D(y,Tx)\}$$

که در آن $0 < k < 1/2$. در این صورت $F(T) \neq \emptyset$.
از طرفی دیگر بونسری و همکاران در [۹] نشان دادند که نتایج دافر و کانئو [۶] با حذف شرط نیم پیوستگی پایینی[۲] برای تابع $x \mapsto D(x,T x)$ همچنان برقرار است و قضیه زیر را بیان و اثبات کردند.

قضیه ۷.۱. فرض می‌کنیم (X,d) یک فضای متری کامل و T از X به $CB(X)$ یک نگاشت مجموعه مقدار باشد. حال فرض کنیم برای هر $x, y \in X$ داشته باشیم

$$H(Tx,Ty) \leq k.\max\left\{d(x,y), D(x,Tx), D(y,Ty), \frac{D(x,Ty)+D(y,Tx)}{2}\right\}$$

که در آن $0 < k < 1$. در این صورت $F(T) \neq \emptyset$.
با توجه به پژوهش‌های فوق، در این مقاله با معرفی یک شرط انقباضی تعمیم یافته برای توابع مجموعه مقدار، چند قضیه نقطه ثابت را بیان و اثبات می‌کنیم.

۲- مجموعه‌های متعامد

اخیرا اسحاقی و همکاران [۱۱] نظریه مجموعه‌های متعامد[۳] را معرفی کردند و تعمیمی واقعی از قضیه نقطه ثابت باناخ در فضای متری ناکامل[۴] ارائه دادند. این نظریه به آن‌ها کمک کرد تا جواب‌های یک معادله انتگرالی را در فضاهای متری ناکامل بیابند. برای جزئیات بیش‌تر به مراجع [۱۳، ۱۴، ۱۵،۱۶، ۱۷] مراجعه شود.
اکنون به تعریف زیر که تعریف اصلی در مقاله حاضر می‌باشد توجه می‌کنیم.

تعریف ۱.۲. [۱۱] فرض کنیم X یک مجموعه ناتهی و $\perp$ یک رابطه دوتایی باشد. اگر $\perp$ در شرط زیر صدق کند
$x_0 \in X: (\forall y, y \perp x_0)$ یا $(\forall y, x_0 \perp y)$

1. Quasi contraction
2. Lower semicontinuous

3. Orthogonal sets
4. Incomplete metric spaces

آن‌گاه $\perp$را یک رابطه تعامد و جفت $(X,\perp)$ را یک مجموعه متعامد[1] نامید.

لازم به ذکر است که در تعریف فوق x_0 را عنصر تعامد[2] می‌نامیم. اگر $(X,\perp)$ تنها یک عنصر تعامد داشته باشد، آنگاه $(X,\perp)$ را مجموعه متعامد منحصر[3] به فرد می‌نامیم. در پایان عناصر $x, y\in X$ را $\perp$- مقایسه‌پذیر[4] می‌نامیم اگر و تنها اگر $x\perp y$ یا $y\perp x$.

اکنون مثال‌های زیر را در نظر بگیرید.

مثال ۲.۲. [۱۱] فرض کنید X مجموعه تمام مردم جهان باشد. تعریف می‌کنیم $x\perp y$ اگر x بتواند به y خون بدهد. مطابق جدول زیر اگر x_0 یک شخص باشد که دارای گروه خونی AB+ باشد، آن‌گاه برای هر $y\in X$ داریم $y\perp x_0$. این بدان معنی است که $(X,\perp)$ مجموعه متعامد است.

گروه خونی گیرنده	گروه خونی دهنده	نوع گروه خون
A+ A- O+ O	A+ AB+	A+
O+ O	O+ A+ B+ AB+	O+
B+ B- O+ O	B+ AB+	B+
همه افراد	AB+	AB+
A- O-	A+ A- AB+ AB-	A-
O-	همه افراد	O-
B- O-	B+ B- AB+ AB-	B-
AB- B- O- A-	AB+ AB-	AB-

مثال ۳.۲. فرض کنیم Σ گردایه‌ای از زیرمجموعه‌های ناتهی از X باشد. فرض کنیم μ مجموعه‌ای از تمام σ-جبرهای شامل Σ است. تعریف می‌کنیم $A\perp_\mu B$ اگر $B\subset A$. بنابراین $(\mu,\perp_\mu)$ یک مجموعه متعامد منحصر به فرد است به‌طوری که σ-جبر تولید شده توسط Σ یک عنصر متعامد منحصر به فرد از μ است.

فرض کنیم $(X,\perp)$ یک مجموعه متعامد و $A,B\subseteq X$ باشد. رابطه دوتایی $\hat{\perp}$ بین A و B به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$A\,\hat{\perp}\,B$ اگر $a\perp b\ \forall a\in A, \forall b\in B$.

تعریف ۴.۲. فرض کنید $(X,d,\perp)$ یک فضای متری متعامد (یعنی $(X,\perp)$ یک مجموعه متعامد و (X,d) یک فضای متری) و T از X به $CB(X)$ یکنگاشت مجموعه مقدار باشد. در این صورت به T یک نگاشت حافظ تعامد $\perp$[5] گفته می‌شود اگر

$$x,y\in X, x\perp y \Rightarrow Tx\,\hat{\perp}\,Ty.$$

مثال۵.۲. فرض کنیم $X=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\dots,\frac{1}{2^n},\dots\right\}\cup\{0,1\}$، $d(x,y)=|x-y|$ برای هر $x, y\in X$ باشد. رابطه دوتایی $\perp$ را روی X به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$x\perp y \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{y}\in\mathbb{N} \\ \text{یا}\quad x=y=0\end{cases}$$

فرض کنیم $T:X\to CB(X)$ به‌صورت زیر تعریف شود.

$$Tx=\begin{cases}\left\{\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n+1}}\right\}, \ x=\frac{1}{2^n}, n=1,2,\cdots,\\ \{0\},\ \ x=0,\\ \left\{\frac{1}{4}\right\},\ \ x=1,\end{cases}$$

کاملاً مشخص است که T یک نگاشت حافظ تعامد$\perp$نیست.چون $\frac{1}{2}\perp 1$ اما $T(1)=\left\{\frac{1}{4}\right\}$ نسبت به $T\left(\frac{1}{2}\right)=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right\}$، $\hat{\perp}$ متعامد نیست.

مثال ۶.۲. فرض کنیم $X = [0, 1)$ و متر روی X، متر اقلیدسی باشد. رابطه دوتایی $\perp$ روی X به وسیله‌ی $x\perp y$ اگر و تنها اگر $xy\in\{x,y\}$ تعریف می‌شود. فرض کنید نگاشت T از X به $CB(X)$ یک به‌صورت زیر تعریف شود.

$$T(x)=\begin{cases}\left\{\frac{1}{2}x^2,x\right\}\ x\in\mathbb{Q}\cap X\\ \{0\}, x\in\mathbb{Q}^c\cap X\end{cases}$$

کاملاً مشخص است که T یک نگاشت حافظ تعامد $\perp$ است.

1. Orthogonal set
2. Orthogonal element
3. Uniquely orthogonal set
4. $\perp$-comparable
5. $\perp$-preserving mapping

تعریف ۷.۲. [۱۷] فرض کنیم $(X,\perp)$ یک مجموعه متعامد باشد. دنباله $\{x_n\}$ قویا متعامد[1] نامیده می‌شود اگر $(\forall n,k: x_n \perp x_{n+k})$ یا $(\forall n,k: x_{n+k} \perp x_n)$.

تعریف ۸.۲. [۱۷] فرض کنیم $(X,d,\perp)$ یک فضای متری متعامد باشد. در این صورت فضای X را قویا متعامد کامل[2] می‌نامیم اگر هر دنباله قویا متعامد کوشی در این فضا همگرا باشد.

تعریف ۹.۲. فرض کنید $(X,d,\perp)$ یک فضای متری متعامد باشد. در این صورت فضای X را $\perp-$ منظم[3] نامیم هرگاه شرایط زیر برقرار باشد:

۱. برای هر دنباله $\{x_n\}$ به‌طوری که $x_n \perp x_{n+k}$ برای هر $n,K \in \mathbb{N}$ و $x_n \to x$ که $x \in X$، آن‌گاه وجود دارد یک هر زیردنباله $\{x_{n_k}\}$ از $\{x_n\}$ به‌طوری که $x_{n_k} \perp x$ برای هر $k \in \mathbb{N}$.

۲. برای هر دنباله $\{x_n\}$ به‌طوری که $x_{n+k} \perp x_n$ برای هر $n,k \in \mathbb{N}$ و $x_n \to x$ که $x \in X$، آن‌گاه وجود دارد یک زیردنباله $\{x_{n_k}\}$ از $\{x_n\}$ به‌طوری که $x \perp x_{n_k}$ برای هر $k \in \mathbb{N}$.

مثال ۱۰.۲. فرض کنیم $X=\left[0,\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{1}{2},2\right]$ که با متر اقلیدسی تجهیز شده است. رابطه $\perp$ بر روی X به وسیله $\perp=\{(0,x): x\in X\}$ تعریف می‌کنیم. می‌خواهیم نشان دهیم که $(X,d,\perp)$ یک متری $\perp-$ منظم می‌باشد. دنباله قویا متعامد $\{x_n\}$ را در نظر بگیرید به‌طوری که $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. از آن‌جا که $\{x_n\}$ دنباله قویا متعامد می‌باشد، لذا وجود دارد $k\in\mathbb{N}$ که برای هر $n\ge k$، $x_n=0$.
بنابراین برای هر $n\ge k$، x و x_n عضوهای $\perp-$ مقایسه‌پذیر می‌باشند.

مثال ۱۱.۲. فرض کنیم $X=\mathbb{Q}$. تعریف می‌کنیم $x\perp y$ اگر و فقط اگر $x=0$ یا $y=0$. واضح است که $\mathbb{Q}$ با متر اقلیدسی یک فضای متریک کامل نیست اما قویا متعامد کامل است. در حقیقت اگر $\{x_k\}$ یک دنباله دلخواه قویا متعامد کوشی باشد آن‌گاه زیر دنباله‌ی $\{x_{k_n}\}$ از $\{x_k\}$ وجود دارد که $x_{k_n}=0$ برای هر $n\ge 1$. از طرف دیگر می‌دانیم که هر دنباله کوشی با زیر دنباله‌های همگرا، همگرا می‌باشد. از این نتیجه می‌گیریم که $\{x_k\}$ همگراست. واضح است که $(X,d,\perp)$ نیز یک فضای متری $\perp-$ منظم است.

مثال ۱۲.۲. فرض کنیم $X=[0,1)$ و

$$x\perp y \Leftrightarrow \begin{cases} x\le y\le \dfrac{1}{4} \\ or \quad x=0 \end{cases}$$

واضح است که X با متر اقلیدسی یک فضای متری کامل نیست اما قویا متعامد کامل است. در حقیقت اگر $\{x_k\}$ یک دنباله دلخواه قویا متعامد کوشی باشد آن‌گاه زیر دنباله‌ی $\{x_{k_n}\}$ از $\{x_k\}$ وجود دارد که $x_{k_n}=0$ برای هر $n\ge 1$ یا دنباله $\{x_k\}$ یک دنباله یکنوا در بازه $\left[0,\frac{1}{4}\right]$ خواهد بود. از این نتیجه می‌گیریم که $\{x_k\}$ به نقطه‌ای در $x\in\left[0,\frac{1}{4}\right]\subseteq X$ همگراست. از طرف دیگر می‌دانیم که هر دنباله کوشی با زیر دنباله‌های همگرا، همگرا می‌باشد. از این نتیجه می‌گیریم که $\{x_k\}$ همگراست. واضح است که $(X,d,\perp)$ نیز یک فضای متری $\perp-$ منظم است.

تعریف ۱۳.۲. [۱۷] فرض کنیم $(X,d,\perp)$ یک فضای متری متعامد باشد. یک نگاشت $f: X\to X$ در $a\in X$، $\perp-$ پیوسته[4] است، اگر برای هر دنباله قویا متعامد $\{a_n\}$ در X اگر $a_n\to a$ آن‌گاه

1. Strongly orthogonal sequence
2. Strongly orthogonal complete
3. $\perp$-regular
4. $\perp$- continuous

$f(a_n)\to f(a)$. همچنین f روی X ⊥ - پیوسته است، اگر f روی هر $a\in X$، ⊥- پیوسته باشد.

مثال ۱۴.۲. فرض کنیم $X=[0,2)$ متری اقلیدسی باشد. فرض کنیم $x\perp y$ اگر و فقط اگر $xy=0$. خودنگاشت f را روی X به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1+x}{2}, & x\in[0,1]\\ 0, & x\in(1,2)\end{cases}$$

توجه کنید که f پیوسته نیست اما ⊥ f- پیوسته هست.

تعریف ۱۵.۲. فرض کنید Λ گردایه‌ای از توابع $\varphi(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5):\mathbb{R}_+{}^5\to\mathbb{R}_+$ باشدکه در شرایط زیر صدق کند.

شرط (Λ_1): φ نسبت به متغییرهای t_2,t_3,t_4 و t_5 صعودی باشد.

شرط (Λ_2): برای هر $u,v\in\mathbb{R}_+$ اگر $v\le\varphi(u,u,v,u+v,0)$، آنگاه داریم $v\le u$.

شرط (Λ_3): اگر $t_n,s_n,p_n\to 0$ و $u_n\to\gamma>0$ آن‌گاه داریم:

$$\limsup_{n\to\infty}\varphi(t_n,s_n,\gamma,u_n,p_n)\le\gamma$$

شرط (Λ_4): برای هر $u\in\mathbb{R}_+$ داریم:

$\varphi(u,u,u,2u,0)\le u$.

شرط (Λ_5): اگر $t_i\neq 0$، $i\in\{1,2,3\}$ آنگاه داریم:

$\varphi(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)\neq 0.$

توابع زیادی به کلاس Λ مربوط می‌شوند. مثال‌های زیر این مورد را نشان می‌دهند.

مثال ۱۶.۲.

(I): $\phi_1(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)=\hat{\alpha}t_1+\hat{\beta}t_2+\hat{\gamma}t_3+\hat{\delta}t_4+Lt_5,\hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\gamma},\hat{\delta},L\ge 0,\ \hat{\alpha}+\hat{\beta}+\hat{\gamma}+2\hat{\delta}=1,\hat{\gamma}\neq 1,\hat{\alpha}+\hat{\beta}+\hat{\gamma}>0.$

(II): $\phi_2(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)=\frac{1}{2}\max\{t_1,t_2,t_3,t_4,t_5\}.$

(III): $\phi_3(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)=\max\left\{t_1,t_2,t_3,\frac{1}{2}(t_4+t_5)\right\}.$

(IV): $\phi_4(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)=\hat{\alpha}t_1+\hat{\beta}t_2+\hat{\gamma}t_3,\ \hat{\alpha},\hat{\beta},\hat{\gamma}>0,\ \hat{\alpha}+\hat{\beta}+\hat{\gamma}<1.$

مثال ۱۷.۲. فرض کنید $\phi\in\Lambda$. اگر $\tilde{\phi}$ با رابطه زیر تعریف شود.

$$\tilde{\phi}:=(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)=\phi(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)+L.t_5$$

که $L\ge 0$، آن گاه واضح است که $\tilde{\phi}\in\Lambda$.

۳- نتایج اصلی

در ادامه به بیان و اثبات قضیه‌ی اصلی پژوهش حاضر می‌پردازیم.

قضیه ۱.۳. فرض کنیم $(X,d,\perp)$ یک فضای متری قویا متعامد کامل، ⊥- منظم و $T:X\to CB(X)$ یک نگاشت مجموعه مقدار باشد که حافظ ⊥است. اگر $f:X\to X$ یک خود نگاشت ⊥- پیوسته و $\alpha:[0,\infty)\to(0,1]$ تابعی باشد به‌طوری که برای هر $t\ge 0$ داشته باشیم $\limsup_{s\to t^+}\alpha(s)<1$. فرض کنیم:

۱. برای هر $x\in X$ داریم $\{fy:y\in Tx\}\subseteq Tx$.

۲. وجود دارد تابعی مانند $h:X\to[0,\infty)$ و $\phi\in\Lambda$ به‌طوری که برای هر $x,y\in X$ ، ⊥- مقایسه پذیر داشته باشیم.

$$H(Tx,Ty)\le\alpha(d(x,y)).\phi_x^y+h(fy)D(fy,Tx)\qquad (۱-۳)$$

که در آن

$$\phi_x^y:=\phi(d(x,y),D(x,Tx),D(y,Ty),D(x,Ty),D(y,Tx)).$$

در این صورت $COP(f,T)\cap F(T)\neq\varnothing$.

اثبات: واضح است که اگر $x\in T(x)$ آن‌گاه با استفاده از شرط ۱ از قضیه داریم، $x\in COP(f,T)\cap F(T)$.

به همین دلیل فرض می‌کنیم T نقطه ثابت ندارد.

فرض کنیم x_0 عضو متعامد X باشد. با استفاده از تعریف تعامد داریم:

$\forall y \in X, x_0 \perp y$ یا $\forall y \in X, y \perp x_0.$

که نتیجه می‌دهد:

$\forall y \in T(x_0), x_0 \perp y$
یا $\forall y \in T(x_0), y \perp x_0.$

با حفظ کلیت مسئله، فرض کنیم:
$\forall y \in T(x_0), x_0 \perp y$.

فرض کنید $x_1 \in Tx_0$ آن‌گاه $x_0 \perp x_1$. از طرف دیگر از آن‌جا که T حافظ $\perp$ می‌باشد، بنابراین $Tx_0 \hat{\perp} Tx_1$. اگر $x_0 = x_1$ آن‌گاه $x_0 = x_1 \in Tx$ نقطه ثابتی از T است و یک تناقض می‌باشد. بنابراین فرض می‌کنیم که $x_0 \neq x_1$. حال با استفاده از (Λ_5) داریم $\phi_{x_0}^{x_1} > 0$. فرض کنیم عدد صحیح و مثبت n_1 به‌طوری باشد که:
$\alpha^{n_1}\left(d\left(x_0,x_1\right)\right) \le \left(1-\alpha\left(d\left(x_0,x_1\right)\right)\right)\phi_{x_0}^{x_1}$

با استفاده از رابطه فوق، تعریف متر هاسدورف و $Tx_0 \hat{\perp} Tx_1$، وجود دارد $x_2 \in Tx_1$ که $x_1 \perp x_2$ و
$d\left(x_1,x_2\right) \le H\left(Tx_0,Tx_1\right) + \alpha^{n_1}\left(d\left(x_0,x_1\right)\right)$

از طرف دیگر با استفاده از (۱-۳) و (Λ_1) می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned}
&d(x_1,x_2) \le \alpha\big(d(x_0,x_1)\big)\phi_{x_0}^{x_1}\\
&+\alpha^{n_1}\big(d(x_0,x_1)\big)\\
&= \phi_{x_0}^{x_1} = \phi(d(x_0,x_1),\\
&D(x_0,Tx_0), D(x_1,Tx_1),\\
&D(x_0,Tx_1), D(x_1,Tx_0))\\
&\le \phi(d(x_0,x_1), d(x_0,x_1),\\
&d(x_1,x_2), d(x_0,x_1)+d(x_1,x_2), 0).
\end{aligned}$$

سپس با استفاده از (Λ_2) داریم $d\left(x_1,x_2\right) \le d\left(x_0,x_1\right)$. اگر $x_2 = x_1$، آن‌گاه x_1 نقطه ثابتی از T می‌باشد و این یک تناقض است. فرض کنید $x_2 \neq x_1$. آن‌گاه با استفاده از (Λ_5) داریم $\phi_{x_1}^{x_2} > 0$. فرض کنید عدد صحیح و مثبت $n_2 > n_1$ به طوری باشد که:
$\alpha^{n_2}\left(d\left(x_1,x_2\right)\right) \le \left(1-\alpha\left(d\left(x_1,x_2\right)\right)\right)\phi_{x_1}^{x_2}$

با در نظر گرفتن $x_3 \in Tx_2$ با $x_2 \perp x_3$ داریم:
$d\left(x_2,x_3\right) \le H\left(Tx_1,Tx_2\right) + \alpha^{n_2}\left(d\left(x_1,x_2\right)\right)$

سپس با استفاده از (۱-۳) و (Λ_1) داریم:

$$\begin{aligned}
&d(x_2,x_3) \le \alpha\big(d(x_1,x_2)\big)\phi_{x_1}^{x_2}\\
&+\alpha^{n_2}\big(d(x_1,x_2)\big)\\
&= \phi_{x_1}^{x_2} = \phi(d(x_1,x_2),\\
&D(x_1,Tx_1), D(x_2,Tx_2), D(x_1,Tx_2),\\
&D(x_2,Tx_1))\\
&\le \phi(d(x_1,x_2), d(x_1,x_2),\\
&d(x_2,x_3), d(x_1,x_2)+d(x_2,x_3), 0).
\end{aligned}$$

سپس با استفاده از (Λ_2) داریم $d\left(x_2,x_3\right) \le d\left(x_1,x_2\right)$. با انجام همین روند برای هر $k \in \mathbb{N}$ می‌توان عددی صحیح و مثبت مانند n_k انتخاب کرد به‌طوری که
$\alpha^{n_k}\left(d\left(x_{k-1},x_k\right)\right) \le \left(1-\alpha\left(d\left(x_{k-1},x_k\right)\right)\right)\phi_{x_{k-1}}^{x_k}$

حال با انتخاب $x_{k+1} \in Tx_k$ با $x_k \perp x_{k+1}$ و $x_k \neq x_{k+1}$ داریم:

$$\begin{aligned}
&d(x_k,x_{k+1}) \le H(Tx_{k-1},Tx_k) +\\
&\alpha^{n_k}\big(d(x_{k-1},x_k)\big),
\end{aligned}$$

و در نتیجه $d\left(x_k,x_{k+1}\right) \le d\left(x_{k-1},x_k\right)$. بنابراین $d_k := d\left(x_{k-1},x_k\right)$ یک دنباله نزولی از اعداد صحیح نامنفی می‌باشد. فرض می‌کنیم $\lim_{k\to\infty} d_k = c$ که در آن $c \ge 0$. چون $\limsup_{t\to c^+} \alpha(t) < 1$، بنابراین وجود دارد k_0 به‌طوری که $k \ge k_0$ و $\alpha(d_k) < h$ که $\limsup_{t\to c^+} \alpha(t) < h < 1$.

حال با استفاده از (۱-۳)، (Λ_1) و (Λ_4) و با دانستن این‌که $x_{k+1} \in Tx_k$ برای هر $k \in \mathbb{N}$، می‌توان نوشت

$$d_{k+1} = d(x_k, x_{k+1}) \leq H(Tx_{k-1}, Tx_k)$$
$$+\alpha^{n_k}(d_k) \leq \alpha\big(d(x_{k-1}, x_k)\big)$$
$$\phi(d(x_{k-1}, x_k), D(x_{k-1}, Tx_{k-1}),$$
$$D(x_k, Tx_k), D(x_{k-1}, Tx_k), D(x_k, Tx_{k-1}))$$
$$+\alpha^{n_k}(d_k) \leq \alpha\big(d(x_{k-1}, x_k)\big)$$
$$\phi(d(x_{k-1}, x_k), d(x_{k-1}, x_k), d(x_k, x_{k+1}),$$
$$d(x_{k-1}, x_k) + d(x_k, x_{k+1}), 0)$$
$$+\alpha^{n_k}(d_k) \leq \alpha\big(d(x_{k-1}, x_k)\big)$$
$$\phi(d(x_{k-1}, x_k), d(x_{k-1}, x_k), d(x_k, x_{k-1}),$$
$$2d(x_{k-1}, x_k), 0) + \alpha^{n_k}(d_k)$$
$$\leq \alpha(d_k)d_k + \alpha^{n_k}(d_k)$$
$$\leq \alpha(d_k)\alpha(d_{k-1})d_{k-1} +$$
$$\alpha(d_k)\alpha^{n_{k-1}}(d_{k-1}) + \alpha^{n_k}(d_k)$$
$$\cdots$$
$$\leq \prod_{i=1}^{k} \alpha(d_i)\, d_1 +$$
$$\sum_{m=1}^{k-1} \prod_{i=m+1}^{k} \alpha(d_i)\, \alpha^{n_m}(d_m) +$$
$$\alpha^{n_k}(d_k) \leq \prod_{i=1}^{k} \alpha(d_i)\, d_1 +$$
$$\sum_{m=1}^{k-1} \prod_{i=max\{k_0, m+1\}}^{k} \alpha(d_i)\, \alpha^{n_m}(d_m) +$$
$$\alpha^{n_k}(d_k) \equiv A.$$

در آخرین نامساوی از این حقیقت استفاده می‌کنیم که $\alpha(t)<1$ برای هر $t\in[0,\infty)$. اکنون چون برای هر $k \geq k_0+1$ داریم:

$$\sum_{m=1}^{k-1} \prod_{i=max\{k_0, m+1\}}^{k} \alpha\,(d_i)\alpha^{n_m}(d_m) \leq$$
$$\sum_{m=1}^{k_0-1} \prod_{i=k_0}^{k} \alpha\,(d_i)\alpha^{n_m}(d_m) +$$
$$\sum_{m=k_0}^{k-1} \prod_{i=m+1}^{k} \alpha\,(d_i)\alpha^{n_m}(d_m) \leq$$
$$h^{k-k_0+1} \sum_{m=1}^{k_0-1} \alpha^{n_m}(d_m) +$$
$$\sum_{m=k_0}^{k_0-1} h^{k-m}\alpha^{n_m}(d_m) \leq C_1 h^k +$$
$$\sum_{m=k_0}^{k-1} h^{k-m+n_m}$$
$$\leq C_1 h^k + h^{k+n_{k_0}-k_0} +$$
$$h^{k+n_{k_0+1}-(k_0+1)} + \cdots + h^{k+n_{k+1}-(k-1)}$$
$$\leq C_1 h^k + \sum_{m=k+n_{k_0}-k_0}^{k+n_{k+1}-(k-1)} h^m = C_1\, h^k$$
$$+\frac{h^{k+n_{k_0}-k_0} - h^{k+n_{k+1}-k+2}}{1-h} \leq C_1 h^k +$$
$$h^k\, \frac{h^{n_{k_0}-k_0}}{1-h} = C_2 h^k$$

که C_1 و C_2 اعداد حقیقی و مثبت هستند. بنابراین

$$A \leq \prod_{i=1}^{k} \alpha(d_i)d_1 + C_2 h^k + \alpha^{n_k}(d_k)$$
$$< h^{k-k_0+1} \prod_{i=1}^{k_0-1} \alpha(d_i)d_1 + C_2 h^k + h^{n_k}$$
$$\leq C_3 h^k + C_2 h^k + h^k = C h^k$$

برای هر $k \geq k_0$ که C_3 و C اعداد حقیقی و مثبت هستند. حال برای هر $k \geq k_0$ و $m \in \mathbb{N}$ داریم:

$$d(x_k, x_{k+m}) \leq \sum_{i=k+1}^{k+m} d_i <$$
$$\sum_{i=k+1}^{k+m} C h^{i-1}$$
$$= C\,\frac{h^{k+1} - h^{k+m+1}}{1-h} \leq C h^k$$

بنابراین که $\{x_k\}$ دنباله کوشی می‌باشد. همچنین x_0 یک عضو متعامد روی $(X,\perp)$ و T یک نگاشت حافظ $\perp$ می‌باشد. بنابراین $\{x_k\}$ یک دنباله قویا متعامد کوشی نیز می‌باشد. فرض کنید $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$ برای یک $x^* \in X$. از آن‌جا که $x_{k+1} \in Tx_k$ برای هر $k \in \mathbb{N}$ لذا با استفاده از ۱ از فرضیات قضیه، نتیجه می‌شود که $fx_{k+1} \in Tx_k$ برای هر $k \in \mathbb{N}$. از آن‌جا که $f\perp$- پیوسته می‌باشد و $\lim_{k\to\infty} x_k = x^*$ داریم:

$$\lim_{k\to\infty} fx_{k+1} = fx^*$$

با فرض $\perp$-منظمی X، از آن‌جا که $x_n \perp x_{n+k}$ برای هر $n,k \in \mathbb{N}$ و $x_n \to x^*$ وقتی که $n\to\infty$، بنابراین یک زیردنباله $\{x_{n_k}\}$ از $\{x_n\}$ وجود دارد که $x_{n_k} \perp x$ برای هر $k \in \mathbb{N}$. بنابراین از (Λ_1) و (۱-۳) با فرض $x = x_{n_k}$ و $y = x^*$ به‌دست می‌آوریم:

$$D(x_{n_k+1}, Tx^*) \leq H(Tx_{n_k}, Tx^*)$$
$$\leq \alpha\left(d(x_{n_k}, x^*)\right).\phi\begin{pmatrix} d(x_{n_k}, x^*), \\ d(x_{n_k}, x_{n_k+1}), \end{pmatrix}$$
$$D(x^*, Tx^*), D(x_{n_k}, Tx^*), d(x^*, x_{n_k+1})\big)$$
$$+\hat{h}(fx^*)d(fx^*, fx_{n_k+1})$$

برای هر $k \in \mathbb{N}$.

حال از آن‌جا که $x^* \notin Tx^*$ سپس با استفاده از رابطه فوق و (Λ_3) داریم:

$$D(x^*, Tx^*) = \lim_{k\to\infty} \sup D(x_{n_k+1}, Tx^*) \leq$$
$$\lim_{k\to\infty} \sup\big(\alpha(d(x_{n_k}, x^*))\phi(d(x_{n_k}, x^*)d(x_{n_k}, Tx_{n_k}),$$
$$D(x^*, Tx^*), D(x_{n_k}, Tx^*), d(x^*, x_{n_k+1}))$$
$$+\hat{h}(fx^*)d(fx^*, fx_{n_k+1})\big) < D(x^*, Tx^*)$$

که یک تناقض است. بنابراین $x^* \in Tx^*$. اکنون با استفاده از شرط ۱ از قضیه داریم $fx^* \in Tx^*$. بنابراین $x^* \in COP(f,T)\cap F(T)$ و این اثبات را کامل می‌کند.

۴- برخی از نتایج

با فرض

$$\phi(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)=\alpha t_1+\beta t_2+\gamma t_3+\delta t_4+Lt_5$$

که

$$\alpha,\beta,\gamma,\delta,L>0,\ \alpha+\beta+\gamma+2\delta=1,\ \gamma\neq 1$$

و $\alpha+\beta+\gamma>0$ به تعمیمی از قضیه ۲.۲ از [۵] قضیه ۴ از [۳] و قضیه ۵ از [۴] می‌رسیم.

نتیجه ۱.۴. فرض کنیم $(X,d,\perp)$ یک فضای متری قویا متعامد کامل، $\perp$- منظم و $T:X\to CB(X)$ یک نگاشت مجموعه مقدار که حافظ $\perp$است. اگر $f:X\to X$ یک خود نگاشت $\perp$- پیوسته و $\alpha:[0,\infty)\to(0,1)$ تابعی باشد به‌طوری که برای هر $t\geq 0$، داشته باشیم $\limsup\limits_{s\to t^+}\alpha(s)<1$. فرض کنیم

۱. برای هر $x\in X$ داریم $\{fy : y\in Tx\}\subseteq Tx$.

۲. وجود دارد تابعی مانند $h:X\to[0,\infty)$ که برای عناصر $x,y\in X$ ، $\perp$- مقایسه پذیر داشته باشیم:

$$\begin{aligned}&H(Tx,Ty)\le\alpha\big(d(x,y)\big).\\&(\alpha.d(x,y)+\beta.D(x,Tx)\\&+\gamma.D(y,Ty)+\delta.D(x,Ty))\\&+L.D(y,Tx)+h(fy).D(fy,Tx)\end{aligned}$$

که

$$\alpha,\beta,\gamma,\delta,L>0,\alpha+\beta+\gamma+2\delta=1,\gamma\neq1$$

و

$$\alpha+\beta+\gamma>0$$

آن‌گاه

$$COP(f,T)\cap F(T)\neq\emptyset$$

اثبات: با تعریف تابع $\tilde\beta$ از $[0,\infty)$ به $[0,1)$ به ضابطه $\tilde\beta(t)=\frac{\alpha(t)+1}{2}$ برای $t\in[0,\infty)$ داریم:

(۱) $\limsup\limits_{s\to t^+}\tilde\beta(s)<1 \quad \forall t\in[0,\infty)$.

(۲) $\alpha(t)<\tilde\beta(t) \quad \forall t\in[0,\infty)$.

(۳) $\tilde\beta(t)\geq\frac{1}{2} \quad \forall t\in[0,\infty)$.

حال برای هر $x,y\in X$ ، $\perp$- مقایسه پذیر داشته باشیم:

$$\begin{aligned}&H(Tx,Ty)\le\alpha\big(d(x,y)\big)\\&(\alpha.d(x,y)+\beta.D(x,Tx)+\\&\gamma.D(y,Ty)+\delta.D(x,Ty))\\&+L.D(y,Tx)+h(fy).D(fy,Tx)\\&<\tilde\beta\big(d(x,y)\big)\\&(\alpha.d(x,y)+\beta.D(x,Tx)+\\&\gamma.D(y,Ty)+\delta.D(x,Ty))\\&+\frac{L.\tilde\beta\big(d(x,y)\big).D(y,Tx)}{\tilde\beta\big(d(x,y)\big)}\\&+h(fy).D(fy,Tx)\\&\le\tilde\beta\big(d(x,y)\big).\\&(\alpha.d(x,y)+\beta.D(x,Tx)+\\&\gamma.D(y,Ty)+\delta.D(x,Ty)\\&2L.D(y,Tx))\\&+h(fy).D(fy,Tx),\end{aligned}$$

بنابراین با به‌کار گیری قضیه ۱.۳ و مثال I- ۱۶.۲ نتیجه حاصل خواهد شد.

اکنون با تعریف

$$\phi(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5)=\max\left\{t_1,t_2,t_3,\frac{1}{2}(t_4+t_5)\right\}$$

به تعمیمی از قضیه ۱ در [۹]، قضیه ۲.۲ در [۵] و قضیه ۴ در [۳] دست می‌یابیم.

نتیجه ۲.۴. فرض کنیم $(X,d,\perp)$ یک فضای متری قویا متعامد کامل، $\perp$- منظم و $T:X\to CB(X)$ یک نگاشت مجموعه مقدار که حافظ $\perp$است. اگر $f:X\to X$ یک خود نگاشت $\perp$- پیوسته و $\alpha:[0,\infty)\to(0,1)$ تابعی باشد به‌طوری که برای هر $t\geq 0$ داشته باشیم $\limsup\limits_{s\to t^+}\alpha(s)<1$. فرض کنیم

۱. برای هر $x\in X$ داریم $\{fy : y\in Tx\}\subseteq Tx$

۲. وجود دارد تابعی مانند $h: X \to [0,\infty)$ که برای هر $x, y \in X$ ، $\perp$- مقایسه‌پذیر داشته باشیم:

$$H(Tx,Ty) \le \alpha\big(d(x,y)\big).$$
$$(\max\{d(x,y), D(x,Tx), D(y,Ty), \tfrac{1}{2}(D(x,Ty)$$
$$+D(y,Tx))\}) + L.D(y,Tx) +$$
$$h(fy).D(fy,Tx)$$

که در آن $L \ge 0$. در این صورت $COP(f,T) \cap F(T) \neq \varnothing$.

۵- مثال‌ها

در زیر با بیان چند مثال ساده نشان خواهیم داد که قضیه اصلی در این مقاله توسیعی از قضیه ۱ در [۹]، قضیه ۲.۲ در [۵]، قضیه ۵ در [۴] و قضیه ۲.۲ در [۸] است.

مثال ۱.۵. دنباله $\{S_n\}$ را به‌صورت زیر در نظر بگیریم.

$$S_1 = \ln 1,$$
$$S_2 = \ln(1+2),$$
$$S_3 = \ln(1+2+3),$$
$$\ldots$$
$$S_n = \ln(1+2+3\ldots+n)$$
$$= \ln(\tfrac{n(n+1)}{2}),\ n \in \mathbb{N}.$$

فرض کنید $X = \{S_n : n \in \mathbb{N}\}$ و $d(x,y) = |x-y|,\ x,y \in X$. برای هر $S_n, S_m \in X$ تعریف می‌کنیم $S_n \perp S_m$ اگر و فقط اگر $(1 = n \le m)$. بنابراین $(X, d, \perp)$ قویا متعامد کامل و $\perp$- منظم می‌باشد. نگاشت مجموعه مقدار $T : X \to CB(X)$ با ضابطه زیر را در نظر بگیریم:

$$Tx = \begin{cases} \{S_{n-1}, S_{n+1}\}, & x{=}S_n, n = 3,4,\cdots, \\ \{S_1\}, & x{=}S_1, S_2. \end{cases}$$

واضح است که T نگاشت حافظ تعامد $\perp$ می‌باشد. حال از آن‌جا که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H\big(T(S_n), T(S_1)\big)}{d(S_n, S_1)} = 1,$$

بنابراین T انقباض پذیرنمی‌باشد.

در وهله اول بدیهی است که

$$S_n \perp S_m, T(S_n) \neq T(S_m) \Leftrightarrow (1 = n, m > 2)$$

از طرف دیگر برای عناصر $\perp$- مقایسه پذیر $S_n, S_m \in X$ داریم:

$$H(TS_n, TS_m) \le$$
$$\alpha\big(d(S_n,S_m)\big)\big(\alpha.d(S_n,S_m)\big) + L.D(S_m, TS_n)$$

که $\alpha = 1, L = 5$ و $\alpha: [0,\infty) \to (0,1)$ با ضابطه $\alpha(t) = \frac{1}{2}, t \in [0,\infty)$ تعریف می‌شود. بنابراین با استفاده از نتیجه ۱.۴، برای هر خودنگاشت $\perp$-پیوسته $f: X \to X$ که در شرط ۱ از نتیجه ۱.۴ صدق کند، می‌توان نتیجه گرفت که $COP(f,T) \cap F(T) \neq \varnothing$.
لازم به ذکر است که نگاشت T در شرط انقباضی قضیه ۱ در [۹]، قضیه ۲.۲ در [۵]، قضیه ۴ در [۳]، قضیه ۵ در [۴] و قضیه ۲.۲ در [۸] صدق نمی‌کند. برای این منظور کافی است $x = S_3$ و $y = S_4$ در نظر گرفته شود.

مثال ۲.۵. فرض کنیم l^∞ فضای باناخ شامل تمام دنباله‌های حقیقی و کراندار مجهز به سوپرمم نرم و $\{e_n\}$ فرم کانونی l^∞ باشد. فرض کنیم $\{\tau_n\}$ دنباله اکیدا نزولی در $(0,\infty)$ باشد. حال برای هر $n \in \mathbb{N}$ تعریف می‌کنیم $x_n = \tau_n e_n$. اکنون اگر تعریف کنیم $X = \{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$ آنگاه X یک زیر مجموعه کراندار و کامل از l^∞ است. نگاشت مجموعه مقدار T از X به $CB(X)$ با ضابطه زیر را در نظر بگیرید:

$$Tx_n = \begin{cases} \{x_{n-1}, x_{n+1}\}, & n = 3,4,\cdots, \\ \{x_1\}, & n{=}1,2. \end{cases}$$

برای هر $x_n, x_m \in X$ تعریف می‌کنیم $x_n \perp x_m$ اگر و فقط اگر $(1 = n \le m)$. بنابراین $(X, d, \perp)$ قویا متعامد کامل و $\perp$- منظم می‌باشد. واضح است که T نگاشت حافظ تعامد $\perp$ می‌باشد. از طرف دیگر برای عناصر $\perp$- مقایسه‌پذیر $x_n, x_m \in X$ داریم:

$$H(Tx_n, Tx_m) \le$$
$$\alpha\big(d(x_n,x_m)\big)\big(\alpha.d(x_n,x_m)\big) +$$
$$L.D(x_m, Tx_n)$$

که $\alpha = 1, L = 3$ و $\alpha: [0,\infty) \to (0,1)$ با ضابطه $\alpha(t) = \frac{1}{2}, t \in [0,\infty)$ تعریف می‌شود. بنابراین با استفاده از نتیجه ۱.۴، برای هر خودنگاشت $\perp$− پیوسته $f : X \to X$ که در شرط ۱ از نتیجه ۱.۴ را صدق کند، می‌توان نتیجه گرفت که $COP(f, T) \cap F(T) \neq \varnothing$.
لازم به ذکراست که نگاشت T در شرط انقباضی قضیه ۱ در [۹]، قضیه ۲.۲ در [۵]،قضیه ۴ در [۳]، قضیه ۵ در [۴] و قضیه ۲.۲ در [۸] صدق نمی‌کند. برای این منظورکافی است $x = x_4$ و $y = x_5$ در نظر گرفته شود.

فهرست منابع

[1] S. B. Nadler Jr,(1969). Multivalued contraction mappings, Pacific J. Math. 30, 475–488.

[2] S. Reich, (1983). Some problems and results in fixed point theory, Contemp. Math. 21, 179–187.

[3] M. Berinde, V. Berinde, (2007). On a general class of multi-valued weakly picard mappings, J. Math. Anal. Appl. 326,772-782.

[4] N. Mizogochi, W. Takahashi, (1989). Fixed point theorems for multivalued mappings on complete metric space, J. Math.Anal. Appl. 141, 177-188.

[5] W. -S. Du, (2012). On coincidence point and fixed point theorems for nonlinear multivalued maps, Topology. Appl. 159,49-56.

[6] P.Z. Daffer, H. Kaneko, (1995). Fixed points of generalized contractive multi-valued mappings, J. Math. Anal. Appl. 195, 655-666.

[7] P.Z. Daffer, H. Kaneko, (1996). W. Li, On a conjecture of S. Reich, Proc. Amer. Math. Soc. 124, 3159-3162.

[8] A. Amini-Harandi, (2011). Fixed point theory for set-valued quasi-contraction maps in metric spaces, Appl. Math. Lett. 24, 1791-1794.

[9] N. Boonsri, S. Saejung, (2017). Some fixed point theorems for multivalued mappings in metric spaces, RACSAM 111,489-497.

[10] A. Petrusel, G. Petrugel, Jen-Chih Yao, (2018). Variational analysis concepts in the theory of multi-valued coincidenceproblems, J. Nonlinear Convex Anal. 24, 935-958.

[11] M. Eshaghi Gordji, M. Ramezani, M. De La Sen, Y.J. Cho, (2017). On orthogonal sets and Banach fixed Point theorem, Fixed Point Theory 18, 569-578.

[12] H. Baghani, M. Eshaghi Gordji, M. Ramezani, (2016). Orthogonal sets: The axiom of choice and proof of a fixed pointtheorem, J. Fixed Point Theory Appl. 18, 465-477.

[13] Z. Ahmadi, R. Lashkaripour, H. Baghani, (2018). A fixed point problem with constraint inequalities via a contraction inincomplete metric spaces, Filomat 32, 234-254.

[14] H. Baghani, (2018). Existence and uniqueness of solutions to fractional Langevin equations involving two fractional orders, J. Fixed Point Theory Appl. 20:3.

[15] H. Baghani, M. Ramezani, (2017). A fixed point theorem for a new class of set-valued mappings in R-complete (not necessarilycomplete) metric spaces, Filomat 31, 3875-3884.

[16] O. Baghani, H. Baghani, (2017). A new contraction condition and its application to weakly singular Volterra integral equations of the second kind, J. Fixed Point Theory Appl. 19, 2601-2615.

[17] M. Ramezani, H. Baghani, (2017). The Meir-Keeler fixed point theorem in incomplete modular spaces with application, J.Fixed Point Theory Appl. 19, 2369-2382.