



تعمیم‌هایی از نامساوی‌های نوع چیشف با ضرب هادامارد در فضاها L^p شامل توابع عملگر مقدار

رودین تیموریان^۱، امیر قاسم غضنفری*

^(۱) دانشجوی دکتری ریاضی، گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه لرستان، خرم‌آباد، ایران

^(۲) دانشیار، گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه لرستان، خرم‌آباد، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۰۶/۲۰ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۸/۱۰/۱۹

چکیده

فرض کنید $C^*B(H)$ جبر متشکل از تمامی عملگرهای خطی و کراندار روی فضای هیلبرت مختلط H همراه با نرم عملگری باشد که دارای یک پایه متعامد یکه است. همچنین فرض کنید \mathfrak{A} یک $*$ -زیر جبر باناخ از $B(H)$ ، Ω یک فضای هاسدرف فشرده همراه با اندازه رادون μ و $\alpha: \Omega \rightarrow [0, \infty)$ یک تابع انتگرال‌پذیر باشد. در این صورت ابتدا برای $1 \leq p \leq \infty$ فضای $L^p_\alpha(\Omega, \mathfrak{A})$ شامل توابع عملگر مقدار انتگرال‌پذیر از Ω به \mathfrak{A} که نسبت به نرم تعریف شده روی آن‌ها دارای نرم متناهی هستند را معرفی می‌کنیم و سپس نشان می‌دهیم که اگر p, q مزدوج نمایی باشند و اعضای $(A_i) \in L^p_\alpha(\Omega, \mathfrak{A})$ و $(B_i) \in L^q_\alpha(\Omega, \mathfrak{A})$ دارای خاصیت هم‌نوایی تقریبی برای ضرب هادامارد باشند، آن‌گاه

$$\int_{\Omega} \alpha(s) d\mu(s) \int_{\Omega} \alpha(t) (A_i \circ B_i) d\mu(t) \geq \int_{\Omega} \alpha(t) A_i d\mu(t) \circ \int_{\Omega} \alpha(t) B_i d\mu(t).$$

همچنین با استفاده از خواص تابع خطی مثبت اثر که با tr نمایش داده می‌شود، یک نیم-ضرب داخلی برای توابع انتگرال‌پذیر مربعی از عملگرهای واقع در $L^2_\alpha(\Omega, L^2(H))$ معرفی و با استفاده از آن نامساوی نوع شوارتس و چیشف شامل ضرب هادامارد را ثابت می‌کنیم.

واژه‌های کلیدی: ضرب هادامارد، نامساوی عملگری، نامساوی چیشف، نامساوی شوارتس.

۱- مقدمه

فرض کنید H یک فضای هیلبرت مختلط همراه با پایه متعامد $\{e_j\}$ و $C^* B(H)$ جبر متشکل از تمامی عملگرهای خطی کراندار روی H باشد. ضرب هادامارد^۲ دو عملگر $A, B \in B(H)$ را با $A \circ B$ نمایش می‌دهیم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\langle A \circ B e_i, e_j \rangle = \langle A e_i, e_j \rangle \langle B e_i, e_j \rangle.$$

روشن است که $A \circ B = B \circ A$. ضرب هادامارد را می‌توان با پالایش حاصلضرب تانسوری $A \otimes B$ از میان یک عملگر خطی مثبت نوشت؛ یعنی

$$A \circ B = U^*(A \otimes B)U \quad (۱.۱)$$

که در آن $U: H \rightarrow H \times H$ ایزومتري است که با $Ue_j = e_j \otimes e_j$ تعريف می‌شود [۱]. از (۱.۱) نتیجه می‌شود:

$$\|A \circ B\| \leq \|A\| \|B\|.$$

اگر $A \geq 0$ و $B \geq 0$ ، آن‌گاه $A \circ B \geq 0$ ؛ زیرا عملگرهای $C, D \in B(H)$ وجود دارند به طوری که

$$A = C^*C \text{ و } B = D^*D, \text{ بنابراین}$$

$$A \circ B = U^*(C^*C \otimes D^*D)U \geq 0.$$

برای ماتریس‌ها به سادگی می‌توان نشان داد که اگر $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ ، آن‌گاه $A \circ B = (a_{ij}b_{ij})$ [۲]؛ و این یک زیرماتریس اصلی از حاصلضرب تانسوری $A \otimes B = (a_{ij}b_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ است.

اگر $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ و $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ دنباله‌هایی حقیقی و $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)$ دنباله حقیقی نامنفی باشد. در این صورت تابع وزن‌دار چیبش^۳ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$T(\omega, a, b) = \sum_{j=1}^n \omega_j \sum_{j=1}^n \omega_j a_j b_j - \sum_{j=1}^n \omega_j a_j \sum_{j=1}^n \omega_j b_j \quad (۲.۱)$$

در سال ۱۸۸۲، چیبش [۳] ثابت کرد که اگر a و b هر دو صعودی یا هردو نزولی باشند، آن‌گاه $T(\omega, a, b) \geq 0$.

برای توابع انتگرال‌پذیر لیگ $f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ تابع چیبش زیر

$$T(f, g) := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)g(t)dt - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt \frac{1}{b-a} \int_a^b g(t)dt.$$

شکل انتگرالی رابطه‌ی (۲.۱) است. در سال ۱۹۳۴، جی گروس^۴ [۴] نشان داد که نامساوی زیر برقرار است:

$$|T(f, g)| \leq \frac{1}{4}(M-m)(N-n), \quad (۳.۱)$$

که در آن n, N, m, M اعداد حقیقی با ویژگی $-\infty < m \leq f \leq M < \infty, -\infty < n \leq g \leq N < \infty$

تقریباً همه جا رو $[a, b]$ هستند. عدد ثابت $\frac{1}{4}$ در

(۳.۱) بهترین مقدار ممکن است؛ به این معنی که نمی‌توان مقدار کوچک‌تری به جای آن قرار داد و توسط

$$f(x) = g(x) = \operatorname{sgn}\left(x - \frac{a+b}{2}\right)$$

به دست می‌آید.

در سال‌های اخیر چندین بسط و تعمیم برای نامساوی چیبش ارائه شده است. برای اطلاعات بیشتر می‌توانید [۵] و مراجع آن را ببینید. این نامساوی یک تعمیم از نامساوی گروس است [۶]. تعدادی از نامساوی‌های انتگرالی از نوع چیبش، توسط بارزا، پیرسون و سوریا^۵ در [۷] ارائه شده‌اند. در [۸] تعمیمی از نامساوی‌های نوع چیبش برای توابع پیوسته از عملگرهای خطی خودالحاق در فضاهای هیلبرت ثابت شده است.

تعدادی از مقالات نوشته شده روی این نامساوی، نامساوی‌هایی شبیه نامساوی چیبش داده شده در (۳.۱) را ارائه نموده‌اند که شامل ضرب هادامارد عملگرهای خطی هستند [۹ و ۱۰].

مصلحیان و باخرد در [۱۰] ضرب هادامارد میدان‌های پیوسته از عملگرهای واقع در $C(\Omega, \mathfrak{A})$ را با نرم

3. G. Grüss

4. Barza, Persson and Soria

1. Hadamard

2. Chebyshev

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup \{ \|A(x)\| : \|x\| \leq 1 \} \\ \|A\|_1 &= \text{tr}(|A|) = \sum_j \langle |A| e_j, e_j \rangle \\ \|A\|_2 &= \left(\sum_j \|A(e_j)\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

هرگاه $\|A\| < \infty$ ، گوییم عملگر A کراندار است و همان طوری که گفته شد، مجموعه‌ی تمام عملگرهای خطی کراندار روی H را با $B(H)$ نمایش می‌دهیم. اگر $\|A\|_1 < \infty$ ، A یک عملگر رده‌ی-اثر نامیده می‌شود و مجموعه‌ی تمام عملگرهای رده‌ی-اثر روی H را با $L^1(H)$ نمایش می‌دهیم. اگر $\|A\|_2 < \infty$ ، گوییم A یک عملگر هیلبرت-اشمیت است و مجموعه‌ی تمام عملگرهای هیلبرت-اشمیت را با $L^2(H)$ نمایش می‌دهیم. همچنین مجموعه‌ی تمام عملگرهای رتبه-متناهی روی H را با $F(H)$ و مجموعه‌ی عملگرهای فشرده روی H را با $K(H)$ نمایش می‌دهیم. به سادگی می‌توان نشان داد که

$$\|A\| \leq \|A\|_1 \leq \|A\|_2$$

و $F(H) \subseteq L^1(H) \subseteq L^2(H) \subseteq K(H) \subseteq B(H)$ و همچنین بر $L^i(H)$ ، $i=1,2$ ، یک ایده‌آل در $K(H)$ و $F(H)$ با نرم $\|\cdot\|_i$ در $L^i(H)$ چگال است [۱۵].

فرض کنید \mathfrak{A} یک *-زیر جبر باناخ از $B(H)$ ، Ω یک فضای هاسدرف فشرده همراه با اندازه رادون μ و $\alpha: \Omega \rightarrow [0, \infty)$ یک تابع انتگرال‌پذیر باشد. اگر

$$\begin{cases} A: \Omega \rightarrow \mathfrak{A} \\ t \rightarrow A_t \end{cases} \quad 1 \leq p < \infty$$

یک عدد حقیقی و تابع

اندازه پذیر قوی باشد، تعریف کنید:

$$\| \| A \| \|_p := \left(\int_{\Omega} \alpha(t) \|A_t\|^p d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p}}$$

و فرض کنید $L^p_{\alpha}(\Omega, \mathfrak{A})$ مجموعه‌ی تمام توابع A از Ω به \mathfrak{A} باشد که برای آن‌ها $\| \| A \| \|_p < \infty$.

$\| \| (A_t) \| \| = \sup_{t \in \Omega} \|A_t\|$ در نظر گرفتند که در آن \mathfrak{A} یک C^* -جبر از عملگرهایی است که روی یک فضای هیلبرت عمل می‌کنند. آن‌ها ثابت کردند که اگر (A_t) و (B_t) اعضای از $C(\Omega, \mathfrak{A})$ با خاصیت همناوایی برای ضرب هادامارد^۶ باشند، آن‌گاه

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \alpha(s) d\mu(s) \int_{\Omega} \alpha(t) (A_t \circ B_t) d\mu(t) &\geq \\ \int_{\Omega} \alpha(t) A_t d\mu(t) \circ \int_{\Omega} \alpha(t) B_t d\mu(t). \end{aligned} \quad (۴.۱)$$

نتایج بالا انگیزه‌ای شد که در این مقاله ثابت کنیم که نامساوی (۴.۱) برای فضاهای دیگری از توابع عملگر مقدار (که لزوماً پیوسته نیستند)، نیز برقرار است. علاوه بر این با استفاده از خواص تابعی خطی مثبت اثر، یک نیم‌ضرب داخلی شامل ضرب هادامارد عملگرهای خطی در یک زیر فضای مناسب از $B(H)$ معرفی و با استفاده از آن چند تعمیم عملگری جدید از نامساوی‌های نوع شوارتس و چبیشف شامل ضرب هادامارد عملگرها، ارایه می‌کنیم.

قبل از بیان نتایج اصلی، یادآوری می‌کنیم که انتگرال بوخنر^۷ تعمیم یافته انتگرال لبگ برای توابعی است که مقادیر آن‌ها در یک فضای باناخ، و یا به طور کلی‌تر در یک فضای برداری توپولوژی قرار دارد. بیشتر خواص اساسی انتگرال بوخنر از خواص انتگرال‌های لبگ کلاسیک نتیجه می‌شوند [۱۱ و ۱۲]. برای دیدن انتگرال‌های بوخنر در C^* -جبرها [۱۳ و ۱۴] را ببینید. از این‌جا به بعد تمام انتگرال-های مورد بحث بوخنر هستند.

۲- نتایج اصلی

فرض کنید H یک فضای هیلبرت مختلط با پایه متعامد $\{e_j\}$ یک عملگر خطی روی H ، A^* عملگر

الحاقی A و $|A| = (A^*A)^{\frac{1}{2}}$ باشد. یادآوری می‌کنیم که نرم عملگری، نرم رده‌ی-اثر^۸ و نرم هیلبرت-اشمیت^۹ عملگر A ، به ترتیب عبارت‌اند از:

2. Synchronous property for Hadamard product
3. Bochner
4. Trace-class
5. Hilbert-Schmidt

$$\int_{\Omega} \alpha(s) d\mu(s) \int_{\Omega} \alpha(t) (A_t \circ B_t) d\mu(t) \geq \left(\int_{\Omega} \alpha(t) A_t d\mu(t) \right) \circ \left(\int_{\Omega} \alpha(s) B_s d\mu(s) \right). \quad (1.2)$$

برهان. اگر $1 < p < \infty$ و $(A_t) \in L^p_{\alpha}(\Omega, \mathfrak{A})$ نشان می‌دهیم انتگرال‌های (۱.۲) روی Ω انتگرال‌پذیر بوخنر هستند. این توابع انتگرال‌پذیر قوی هستند و از نامساوی $\|A \circ B\| \leq \|A\| \|B\|$ داریم:

$$\int_{\Omega} \alpha(t) \|A_t \circ B_t\| d\mu(t) \leq \int_{\Omega} \alpha(t) \|A_t\| \|B_t\| d\mu(t) \leq \left(\int_{\Omega} \alpha(t) \|A_t\|^p d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\int_{\Omega} \alpha(t) \|B_t\|^q d\mu(t) \right)^{\frac{1}{q}} = \| (A_t) \|_p \| (B_t) \|_q < \infty,$$

و

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{\Omega} \alpha(t) A_t d\mu(t) \circ \int_{\Omega} \alpha(t) B_t d\mu(t) \right\| \leq \\ & \left\| \int_{\Omega} \alpha(t) A_t d\mu(t) \right\| \left\| \int_{\Omega} \alpha(t) B_t d\mu(t) \right\| \leq \\ & \int_{\Omega} \alpha(t) \|A_t\| d\mu(t) \int_{\Omega} \alpha(t) \|B_t\| d\mu(t) \leq \\ & \left(\int_{\Omega} \alpha(s) d\mu(s) \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int_{\Omega} \alpha(t) \|A_t\|^p d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p}} \times \\ & \left(\int_{\Omega} \alpha(s) d\mu(s) \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} \alpha(t) \|B_t\|^q d\mu(t) \right)^{\frac{1}{q}} \leq \\ & \left(\int_{\Omega} \alpha(s) d\mu(s) \right) \| (A_t) \|_p \| (B_t) \|_q < \infty. \end{aligned}$$

برای $p = 1$ داریم:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \alpha(t) \|A_t \circ B_t\| d\mu(t) \leq \\ & \left(\int_{\Omega} \alpha(t) \|A_t\| d\mu(t) \right) (\text{ess sup } \|B_t\|) \leq \\ & \|A\|_1 \|B\|_{\infty} < \infty, \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} & \left\| \int_{\Omega} \alpha(t) A_t d\mu(t) \circ \int_{\Omega} \alpha(t) B_t d\mu(t) \right\| \leq \\ & \left\| \int_{\Omega} \alpha(t) A_t d\mu(t) \right\| \left\| \int_{\Omega} \alpha(t) B_t d\mu(t) \right\| \leq \\ & \int_{\Omega} \alpha(t) \|A_t\| d\mu(t) \int_{\Omega} \alpha(t) \|B_t\| d\mu(t) \leq \\ & \int_{\Omega} \alpha(t) \|A_t\| d\mu(t) \int_{\Omega} \alpha(t) \|B_t\|_{\infty} d\mu(t) \leq \\ & \left(\int_{\Omega} \alpha(t) d\mu(t) \right) \| (A_t) \|_1 \| (B_t) \|_{\infty} < \infty. \end{aligned}$$

به طور مشابه برای $p = \infty$ داریم:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \alpha(t) \|A_t \circ B_t\| d\mu(t) \leq \\ & \| (A) \|_{\infty} \| (B) \|_1 < \infty, \end{aligned}$$

و

از آن جایی که مقادیر هر تابع عضو این فضا خانواده‌ای از عملگرهاست، از این پس به جای تابع A می‌نویسیم (A_t) و آن را یک میدان از عملگرهای در \mathfrak{A} می‌نامیم. میدان (A_t) از عملگرهای در \mathfrak{A} یک میدان اندازه‌پذیر کراندار اساسی است هرگاه تابع $t \rightarrow A_t$ انتگرال‌پذیر قوی باشد و $\| (A_t) \|_{\infty} := \text{ess sup } \|A_t\| < \infty$.

مجموعه‌ی تمام میدان‌های اندازه‌پذیر کراندار اساسی از عملگرهای در \mathfrak{A} را با $L^{\infty}_{\alpha}(\Omega, \mathfrak{A})$ نمایش می‌دهیم. روشن است که $C(\Omega, \mathfrak{A}) \subseteq L^p_{\alpha}(\Omega, \mathfrak{A})$. اگر \mathfrak{A} یک ایده‌آل در $B(H)$ و نرم آن پایای یکانی باشد، آن‌گاه نرم $L^p_{\alpha}(\Omega, \mathfrak{A})$ پایای یکانی است؛ زیرا:

$$\begin{aligned} \| U(A_t) V \|_p &= \left(\int_{\Omega} \alpha(t) \|U A_t V\|^p d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\int_{\Omega} \alpha(t) \|A_t\|^p d\mu(t) \right)^{\frac{1}{p}} = \| (A_t) \|_p. \end{aligned}$$

تعریف ۱. فرض کنید Ω یک فضای هاسدرف فشرده همراه با اندازه رادون μ باشد. در این صورت:

(i) گوئیم میدان‌های (A_t) و (B_t) از عملگرهای در $B(H)$ دارای خاصیت همنوایی تقریبی^{۱۰} برای ضرب هادامارد است، هرگاه $(A_t - A_s) \circ (B_t - B_s) \geq 0$ تقریباً همه جا نسبت به $\mu \times \mu$.

(ii) گوئیم میدان‌های (A_t) و (B_t) از عملگرهای در $B(H)$ دارای خاصیت همنوایی ضعیف^{۱۱} برای ضرب هادامارد است، هرگاه برای هر تابع خطی مثبت Λ روی $B(H)$ $\Lambda((A_t - A_s) \circ (B_t - B_s)) \geq 0$ تقریباً همه جا نسبت به $\mu \times \mu$.

قضیه ۱. فرض کنید p و q مزدوج نمایی باشند، $1 \leq p \leq \infty$ ، \mathfrak{A} یک باناخ *-جبر، Ω یک فضای هاسدرف فشرده همراه با اندازه رادون μ و $\alpha: \Omega \rightarrow [0, \infty)$ یک تابع انتگرال‌پذیر باشد. همچنین فرض کنید $(A_t)_{t \in \Omega}$ و $(B_t)_{t \in \Omega}$ به ترتیب میدان‌هایی در $L^p_{\alpha}(\Omega, \mathfrak{A})$ و $L^q_{\alpha}(\Omega, \mathfrak{A})$ با خاصیت همزمانی تقریبی هادامارد باشند. در این صورت:

1. Almost synchronous property
2. Weakly synchronous property

$$\begin{aligned} |\operatorname{tr}(A \circ B^*)|^2 &\leq \operatorname{tr}(A \circ A^*) \operatorname{tr}(B \circ B^*) \\ &= \|1_H \circ A\|_2^2 \|1_H \circ B\|_2^2 \quad (۲.۲) \\ &\leq \|A\|_2^2 \|B\|_2^2. \end{aligned}$$

اثبات: روشن است که اگر A یک عملگر خطی کراندار

روی H و A^* عملگر الحاقی آن باشد، آن‌گاه

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}(A \circ A^*) &= \operatorname{tr}(1_H \circ A \circ A^*) \\ &= \operatorname{tr}((1_H \circ A)(1_H \circ A)^*) \\ &= \|1_H \circ A\|_2^2 \geq 0. \end{aligned}$$

این مطلب نشان می‌دهد که $\langle A, B \rangle := \operatorname{tr}(A \circ B^*)$ یک نیم-ضرب داخلی روی H است. از این‌جا و نامساوی شوارتز، نامساوی (۲.۲) حاصل می‌شود.

قضیه ۲. (i) نگاشت

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle : L^2_\alpha(\Omega, L^2(H)) \times L^2_\alpha(\Omega, L^2(H)) &\rightarrow \mathbb{R}, \\ \langle (A_t), (B_t) \rangle &:= \end{aligned} \quad (۳.۲)$$

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \alpha(s) d\mu(s) \int_\Omega \alpha(t) \operatorname{tr}(A_t \circ B_t^*) d\mu(t) - \\ &\operatorname{tr}\left(\int_\Omega \alpha(t) A_t d\mu(t) \circ \int_\Omega \alpha(t) B_t^* d\mu(t)\right), \end{aligned}$$

یک نیم-ضرب داخلی روی $L^2_\alpha(\Omega, L^2(H))$ است و نامساوی زیر حاصل می‌شود.

$$\begin{aligned} &\left| \int_\Omega \alpha(s) d\mu(s) \int_\Omega \alpha(t) \operatorname{tr}(A_t \circ B_t) d\mu(t) - \right. \\ &\left. \operatorname{tr}\left(\int_\Omega \alpha(t) A_t d\mu(t) \circ \int_\Omega \alpha(t) B_t d\mu(t)\right) \right| \leq \quad (۴.۲) \\ &\int_\Omega \alpha(s) d\mu(s) \| \| (A_t) \| \| (B_t) \| - \\ &\| 1_H \circ \int_\Omega \alpha(t) A_t d\mu(t) \circ \int_\Omega \alpha(t) B_t d\mu(t) \|_2. \end{aligned}$$

(ii) فرض کنید $(A_t), (B_t) \in L^2_\alpha(\Omega, L^2(H))$ و $A, B \in L^2(H)$ در این صورت:

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \alpha(s) d\mu(s) \times \int_\Omega \alpha(t) (A_t - A) \circ (B_t - B)^* d\mu(t) - \\ &\int_\Omega \alpha(t) (A_t - A) d\mu(t) \circ \int_\Omega \alpha(t) (B_t - B)^* d\mu(t) = \quad (۵.۲) \\ &\int_\Omega \alpha(s) d\mu(s) \int_\Omega \alpha(t) A_t \circ B_t^* d\mu(t) - \\ &\int_\Omega \alpha(t) A_t d\mu(t) \circ \int_\Omega \alpha(t) B_t^* d\mu(t). \end{aligned}$$

اثبات: (i) اگر $(A_t), (B_t) \in L^2_\alpha(\Omega, L^2(H))$ باشد،

نشان می‌دهیم که انتگرال‌های (۳.۲) روی Ω انتگرال‌پذیر بوختر هستند. این توابع به طور قوی اندازه‌پذیرند و بنا بر نامساوی (۲.۲) داریم:

$$\begin{aligned} &\left\| \int_\Omega \alpha(t) A_t d\mu(t) \circ \int_\Omega \alpha(t) B_t d\mu(t) \right\| \leq \\ &\left(\int_\Omega \alpha(t) d\mu(t) \right) \| \| (A_t) \| \| (B_t) \| \|_1 < \infty. \end{aligned}$$

حال نشان می‌دهیم که نامساوی (۱.۲) برقرار است.

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \alpha(s) d\mu(s) \int_\Omega \alpha(t) (A_t \circ B_t) d\mu(t) - \\ &\left(\int_\Omega \alpha(t) A_t d\mu(t) \right) \circ \left(\int_\Omega \alpha(s) B_s d\mu(s) \right) = \\ &\int_\Omega \int_\Omega \alpha(s) \alpha(t) (A_t \circ B_t) d\mu(t) d\mu(s) - \\ &\int_\Omega \int_\Omega \alpha(t) \alpha(s) (A_t \circ B_t) d\mu(t) d\mu(s) = \\ &\frac{1}{2} \int_\Omega \int_\Omega \alpha(s) \alpha(t) (A_t - A_s) \circ \\ &(B_t - B_s) d\mu(t) d\mu(s) \geq 0. \end{aligned}$$

نتیجه ۱. فرض کنید Ω یک فضای هاسدرف فشرده

همراه با اندازه رادون μ و $\alpha : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ یک تابع ننگرال‌پذیر باشد. اگر (A_t) و (B_t) دو میدان در $L^2_\alpha(\Omega, L^2(H))$ با خاصیت هم‌نواپی ضعیف برای

ضرب هادامارد باشند، آن‌گاه:

$$\begin{aligned} &\operatorname{tr}\left(\int_\Omega \alpha(t) A_t d\mu(t) \circ \int_\Omega \alpha(t) B_t d\mu(t)\right) \leq \\ &\int_\Omega \alpha(s) d\mu(s) \int_\Omega \alpha(t) \operatorname{tr}(A_t \circ B_t) d\mu(t). \end{aligned}$$

برهان. روشن است که تقریباً همه جا نسبت به

$$\operatorname{tr}((A_t - A_s) \circ (B_t - B_s)) \geq 0, \mu \times \mu$$

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \alpha(s) d\mu(s) \int_\Omega \alpha(t) \operatorname{tr}(A_t \circ B_t) d\mu(t) - \\ &\operatorname{tr}\left(\int_\Omega \alpha(t) A_t d\mu(t) \circ \int_\Omega \alpha(t) B_t d\mu(t)\right) = \\ &\operatorname{tr}\left(\int_\Omega \alpha(s) d\mu(s) \int_\Omega \alpha(t) (A_t \circ B_t) d\mu(t) - \right. \\ &\left. \int_\Omega \alpha(t) A_t d\mu(t) \circ \int_\Omega \alpha(t) B_t d\mu(t)\right) = \\ &\operatorname{tr}\left(\frac{1}{2} \int_\Omega \int_\Omega \alpha(t) \alpha(s) (A_t - A_s) \circ (B_t - B_s) d\mu(t) d\mu(s)\right) = \\ &\frac{1}{2} \int_\Omega \int_\Omega \alpha(t) \alpha(s) \operatorname{tr}((A_t - A_s) \circ (B_t - B_s)) d\mu(t) d\mu(s) \geq 0. \end{aligned}$$

در ادامه یک نیم-ضرب داخلی روی

$L^2_\alpha(\Omega, L^2(H))$ ارزیابی می‌دهیم. برای این منظور ابتدا گزاره ساده زیر را ثابت می‌کنیم.

گزاره ۱: برای هر $A, B \in L^2(H)$ نامساوی شوارتز زیر برقرار است:

نامساوی مورد نظر در (۴.۲) حاصل می‌شود.

(ii) فرض کنید $(A_i), (B_i) \in L^2_\alpha(\Omega, L^2(\mathbb{H}))$ و

$A, B \in L^2(\mathbb{H})$ در این صورت:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \alpha(s) d\mu(s) \times \int_{\Omega} \alpha(t) (A_i - A) \circ (B_i - B)^* d\mu(t) - \\ & \int_{\Omega} \alpha(t) (A_i - A) d\mu(t) \circ \int_{\Omega} \alpha(t) (B_i - B)^* d\mu(t) = \\ & \int_{\Omega} \alpha(s) d\mu(s) \int_{\Omega} \alpha(t) (A_i \circ B_i^* - A_i \circ B^* \\ & - A \circ B_i^* + A \circ B^*) d\mu(t) - \\ & \left(\int_{\Omega} \alpha(t) A_i d\mu(t) - A \int_{\Omega} \alpha(t) d\mu(t) \right) \circ \\ & \left(\int_{\Omega} \alpha(t) B_i^* d\mu(t) - B^* \int_{\Omega} \alpha(t) d\mu(t) \right) = \\ & \int_{\Omega} \alpha(s) d\mu(s) \int_{\Omega} \alpha(t) A_i \circ B_i^* d\mu(t) - \\ & \int_{\Omega} \alpha(t) A_i d\mu(t) \circ \int_{\Omega} \alpha(t) B_i^* d\mu(t). \end{aligned}$$

قضیه ۳. اگر $(A_i), (B_i) \in L^2_\alpha(\Omega, L^2(\mathbb{H}))$ و

بردارهای $A, A', B, B' \in L^2(\mathbb{H})$ وجود داشته باشند

به طوری که

$$\| \| (A_i) - \frac{A'+A}{2} \| \| \| \| (A_i) - \frac{A'+A}{2} \| \| \leq \frac{1}{2} \| \| A' - A \| \|, \quad (۹.۲)$$

$$\| \| (B_i) - \frac{B'+B}{2} \| \| \| \| (B_i) - \frac{B'+B}{2} \| \| \leq \frac{1}{2} \| \| B' - B \| \|.$$

در این صورت نامساوی زیر برقرار است

$$\left| \int_{\Omega} \alpha(s) d\mu(s) \int_{\Omega} \alpha(t) \operatorname{tr}(A_i \circ B_i) d\mu(t) - \operatorname{tr} \left(\int_{\Omega} \alpha(t) A_i d\mu(t) \circ \int_{\Omega} \alpha(t) B_i d\mu(t) \right) \right| \leq \quad (۱۰.۲)$$

$$\frac{1}{4} \int_{\Omega} \alpha(s) d\mu(s) \| \| A' - A \| \| \| \| B' - B \| \| -$$

$$\left\| \int_{\Omega} \alpha(t) 1_{\mathbb{H}} \circ (A_i - \frac{A'+A}{2}) \circ (B_i - \frac{B'+B}{2}) d\mu(t) \right\|_2$$

ضریب $\frac{1}{4}$ در نامساوی (۱۰.۲) ظریف^{۱۲} است؛ یعنی

نمی‌توان آن را با مقدار کوچک‌تری جایگزین نمود.

اثبات: با استفاده از رابطه‌ی (۵.۲) اگر $A_i = B_i$ و به

جای A و B قرار دهیم $\frac{A'+A}{2}$ ، آن‌گاه:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \alpha(t) \operatorname{tr}(A_i \circ B_i^*) d\mu(t) \leq \int_{\Omega} \alpha(t) \| \| A_i \| \| \| \| B_i \| \| \| d\mu(t) \leq \\ & \left(\int_{\Omega} \alpha(t) \| \| A_i \| \| \| d\mu(t) \right)^{\frac{1}{2}} \times \left(\int_{\Omega} \alpha(t) \| \| B_i \| \| \| d\mu(t) \right)^{\frac{1}{2}} = \\ & \| \| (A_i) \| \| \| \| (B_i) \| \| \| < \infty. \end{aligned}$$

همچنین داریم:

$$\begin{aligned} & \operatorname{tr} \left(\int_{\Omega} \alpha(t) A_i d\mu(t) \circ \int_{\Omega} \alpha(t) B_i^* d\mu(t) \right) \leq \\ & \left\| \int_{\Omega} \alpha(t) A_i d\mu(t) \right\|_2 \left\| \int_{\Omega} \alpha(t) B_i^* d\mu(t) \right\|_2 \leq \\ & \int_{\Omega} \alpha(t) \| \| A_i \| \| \| d\mu(t) \int_{\Omega} \alpha(t) \| \| B_i^* \| \| \| d\mu(t) \leq \\ & \left(\int_{\Omega} \alpha(s) d\mu(s) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} \alpha(t) \| \| A_i \| \| \| d\mu(t) \right)^{\frac{1}{2}} \times \\ & \left(\int_{\Omega} \alpha(s) d\mu(s) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Omega} \alpha(t) \| \| B_i^* \| \| \| d\mu(t) \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \int_{\Omega} \alpha(s) d\mu(s) \| \| (A_i) \| \| \| \| (B_i) \| \| \| < \infty. \end{aligned}$$

سادگی می‌توان نشان داد که $\langle \cdot, \cdot \rangle$ یک نیم-ضرب داخلی روی $L^2_\alpha(\Omega, L^2(\mathbb{H}))$ است. بنابراین نامساوی

شوارتز زیر نتیجه می‌شود:

$$| \langle (A_i), (B_i) \rangle | \leq \langle (A_i), (A_i) \rangle \langle (B_i), (B_i) \rangle \quad (۶.۲)$$

از طرف دیگر

$$\begin{aligned} \langle (A_i), (A_i) \rangle &= \int_{\Omega} \alpha(s) d\mu(s) \times \\ & \int_{\Omega} \alpha(t) \operatorname{tr}(A_i \circ A_i^*) d\mu(t) - \\ & \operatorname{tr} \left(\int_{\Omega} \alpha(t) A_i d\mu(t) \circ \int_{\Omega} \alpha(t) A_i^* d\mu(t) \right) = \\ & \int_{\Omega} \alpha(s) d\mu(s) \int_{\Omega} \alpha(t) \| \| 1_{\mathbb{H}} \circ A_i \| \| \| d\mu(t) - \\ & \left\| 1_{\mathbb{H}} \circ \int_{\Omega} \alpha(t) A_i d\mu(t) \right\|_2^2 \leq \\ & \int_{\Omega} \alpha(s) d\mu(s) \| \| (A_i) \| \| \| ^2 - \\ & \left\| 1_{\mathbb{H}} \circ \int_{\Omega} \alpha(t) A_i d\mu(t) \right\|_2^2. \end{aligned} \quad (۷.۲)$$

به طور مشابه

$$\begin{aligned} \langle (B_i), (B_i) \rangle &\leq \int_{\Omega} \alpha(s) d\mu(s) \| \| (B_i) \| \| \| ^2 \\ &- \left\| 1_{\mathbb{H}} \circ \int_{\Omega} \alpha(t) B_i d\mu(t) \right\|_2^2. \end{aligned} \quad (۸.۲)$$

با استفاده از نامساوی‌های (۷.۲)، (۸.۲) و (۶.۲) و

نامساوی مقدماتی زیر برای اعداد حقیقی

$$(m^2 - n^2)(p^2 - q^2) \leq (mp - nq)^2$$

$$A_t = B_t = \begin{cases} -P_{H_1} & 0 \leq t \leq 0/5 \\ P_{H_1} & 0/5 < t \leq 1 \end{cases} \quad (۱۴.۲)$$

آن‌گاه روشن است که $(A_t) \in L^2_\alpha(\Omega, L^2(\mathbb{H}))$ پیوسته نیست؛ زیرا اگر برای t هایی که به اندازه‌ی کافی به t_0 نزدیک‌اند $\sup_{t \in \Omega} \|A_t - A_{t_0}\| < \varepsilon$ ، آن‌گاه:

$$\begin{aligned} \|P_{H_1} + A_{t_0}\| &\leq \sup_{t \in \Omega} \|A_t - A_{t_0}\| < \varepsilon, \\ \|P_{H_1} - A_{t_0}\| &\leq \sup_{t \in \Omega} \|A_t - A_{t_0}\| < \varepsilon. \end{aligned}$$

بنابراین

$$\|A_{t_0}\| \leq \frac{1}{2} \|P_{H_1} + A_{t_0}\| + \frac{1}{2} \|P_{H_1} - A_{t_0}\| < \varepsilon.$$

از اینجا نتیجه می‌شود که $A_{t_0} = 0$ و این با $\|A_t\| = \sup_{t \in \Omega} \|A_t\| = 1$ در تناقض است. با انتخاب $A = B = -P_{H_1}$ و $A' = B' = P_{H_1}$ اندازه لبگ μ روی Ω شرایط (۱۱.۲) حاصل می‌شود. حال از (۱۳.۲) نتیجه می‌شود $C \geq \frac{1}{4}$ و بدین ترتیب قضیه ثابت می‌شود.

نتیجه ۲. اگر A_1, A_2, \dots, A_n و B_1, B_2, \dots, B_n عملگرهایی در $L^2(\mathbb{H})$ و $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ اعداد حقیقی مثبتی باشند. آن‌گاه:

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{i=1}^n \omega_i \sum_{i=1}^n \omega_i \operatorname{tr}(A_i \circ B_i) - \operatorname{tr} \left(\sum_{i=1}^n \omega_i A_i \circ \sum_{i=1}^n \omega_i B_i \right) \right| \leq \\ &\sum_{i=1}^n \omega_i \sum_{i=1}^n \omega_i \|A_i\|_2 \|B_i\|_2 - \left\| \mathbb{1}_H \circ \sum_{i=1}^n \omega_i A_i \circ \sum_{i=1}^n \omega_i B_i \right\|_2. \end{aligned}$$

اثبات:

$$\begin{aligned} &\left| \sum_{i=1}^n \omega_i \sum_{i=1}^n \omega_i \operatorname{tr}(A_i \circ B_i) - \operatorname{tr} \left(\sum_{i=1}^n \omega_i A_i \circ \sum_{i=1}^n \omega_i B_i \right) \right| \leq \\ &\sum_{i=1}^n \omega_i \sum_{i=1}^n \omega_i \|\mathbb{1}_H \circ A_i\|_2 \|\mathbb{1}_H \circ B_i\|_2 - \\ &\left\| \mathbb{1}_H \circ \sum_{i=1}^n \omega_i A_i \right\|_2 \left\| \mathbb{1}_H \circ \sum_{i=1}^n \omega_i B_i \right\|_2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n \omega_i \sum_{i=1}^n \omega_i \|A_i\|_2 \|B_i\|_2 - \left\| \mathbb{1}_H \circ \sum_{i=1}^n \omega_i A_i \circ \sum_{i=1}^n \omega_i B_i \right\|_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle (A_t), (A_t) \rangle &= \int_\Omega \alpha(s) d\mu(s) \int_\Omega \alpha(t) \operatorname{tr} \left(A_t \circ A_t^* \right) d\mu(t) - \\ &\operatorname{tr} \left(\int_\Omega \alpha(t) A_t d\mu(t) \circ \int_\Omega \alpha(t) A_t^* d\mu(t) \right) = \\ &\int_\Omega \alpha(s) d\mu(s) \times \int_\Omega \alpha(t) \operatorname{tr} \left(\left(A_t - \frac{A'+A}{2} \right) \circ \right. \\ &\left. \left(A_t - \frac{A'+A}{2} \right)^* \right) d\mu(t) - \operatorname{tr} \left(\int_\Omega \alpha(t) \left(A_t - \frac{A'+A}{2} \right) d\mu(t) \circ \right. \\ &\left. \int_\Omega \alpha(t) \left(A_t - \frac{A'+A}{2} \right)^* d\mu(t) \right) = \\ &\int_\Omega \alpha(s) d\mu(s) \times \int_\Omega \alpha(t) \left\| \mathbb{1}_H \circ \left(A_t - \frac{A'+A}{2} \right) \right\|_2^2 d\mu(t) - \\ &\left\| \mathbb{1}_H \circ \int_\Omega \alpha(s) \left(A_t - \frac{A'+A}{2} \right) d\mu(t) \right\|_2^2 \leq \\ &\int_\Omega \alpha(s) d\mu(s) \left\| \left(A_t - \frac{A'+A}{2} \right) \right\|^2 - \\ &\left\| \mathbb{1}_H \circ \int_\Omega \alpha(s) \left(A_t - \frac{A'+A}{2} \right) d\mu(t) \right\|_2^2 \end{aligned}$$

بنابراین

$$\begin{aligned} \langle (A_t), (A_t) \rangle &\leq \frac{1}{4} \|A' - A\|^2 \int_\Omega \alpha(s) d\mu(s) - \\ &\left\| \int_\Omega \alpha(s) \mathbb{1}_H \circ \left(A_t - \frac{A'+A}{2} \right) d\mu(t) \right\|_2^2. \end{aligned} \quad (۱۱.۲)$$

به طور مشابه

$$\begin{aligned} \langle (B_t), (B_t) \rangle &\leq \frac{1}{4} \|B' - B\|^2 \int_\Omega \alpha(s) d\mu(s) - \\ &\left\| \int_\Omega \alpha(s) \mathbb{1}_H \circ \left(B_t - \frac{B'+B}{2} \right) d\mu(t) \right\|_2^2. \end{aligned} \quad (۱۲.۲)$$

با توجه به نامساوی شوارتز در رابطه‌ی (۶.۲) و نامساوی‌های (۱۱.۲) و (۱۲.۲)، نامساوی (۱۰.۲) به دست می‌آید. حال فرض کنید که نامساوی (۱۰.۲) با ثابت $C > 0$ حاصل شود؛ یعنی

$$\begin{aligned} &\left| \int_\Omega \alpha(s) d\mu(s) \int_\Omega \alpha(t) \operatorname{tr} \left(A_t \circ B_t^* \right) d\mu(t) - \right. \\ &\left. \operatorname{tr} \left(\int_\Omega \alpha(t) A_t d\mu(t) \circ \int_\Omega \alpha(t) B_t^* d\mu(t) \right) \right| \leq \quad (۱۳.۲) \\ &C \left\| A' - A \right\| \left\| B' - B \right\| \int_\Omega \alpha(s) d\mu(s). \end{aligned}$$

حال فرض کنید $\{e_j\}$ یک پایه متعامد برای فضای هیلبرت \mathbb{H} و $P_{H_1} : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{H}_1$ یک تصویر متعامد با رتبه یک به روی زیرفضای \mathbb{H}_1 تولید شده توسط $\{e_j\}$ باشد. روشن است که $\operatorname{tr}(P_{H_1}) = 1$ و $P_{H_1} \circ P_{H_1} = P_{H_1}$. اگر قرار دهیم $\alpha : \Omega = [0, 1] \rightarrow \square$

$$\left| \int_0^1 e^t \operatorname{tr}(P_{H_n} \circ A_t) dt - \operatorname{tr} \left(\int_0^1 e^t P_{H_n} dt \circ \int_0^1 A_t dt \right) \right|^2 \leq$$

$$\left[\int_0^1 \operatorname{tr} \left(e^{2t} P_{H_n} \right) dt - \operatorname{tr} \left(\int_0^1 e^t P_{H_n} dt \circ \int_0^1 e^t P_{H_n} dt \right) \right] \times$$

$$\left[\int_0^1 \operatorname{tr} \left(A_t^* \circ A_t \right) dt - \operatorname{tr} \left(\int_0^1 A_t^* dt \circ \int_0^1 A_t dt \right) \right] \leq$$

$$\frac{n(e-1)(3-e)}{2} \int_0^1 \operatorname{tr} \left(A_t^* \circ A_t \right) dt.$$

بنابراین

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \int_0^1 e^t \operatorname{tr} \left(P_{H_n} \circ A_t \right) dt - \right.$$

$$\left. (e-1) \operatorname{tr} \left(P_{H_n} \circ \int_0^1 A_t dt \right) \right| \leq$$

$$\sqrt{\frac{(e-1)(3-e)}{2}} \| \| (A_t) \| \|,$$

و در نتیجه

$$\left| \int_0^1 e^t \operatorname{tr} \left(P_{H_n} \circ A_t \right) dt - \right.$$

$$\left. (e-1) \operatorname{tr} \left(P_{H_n} \circ \int_0^1 A_t dt \right) \right| = o(\sqrt{n}).$$

مثال ۱. فرض کنید $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ یک پایه متعامد یکه برای فضای هیلبرت جدایی‌پذیر H و H_n زیرفضایی از H باشد که توسط بردارهای e_1, e_2, \dots, e_n تولید می‌شود. همچنین فرض کنید $P_{H_n}: H \rightarrow H_n$ تصویر متعامد به روی H_n

$$\alpha: \Omega = [0, 1] \rightarrow \square, \quad \alpha(t) = 1.$$

روشن است که $\operatorname{tr}(P_{H_n}) = \operatorname{rank}(H_n) = n$ و

$$P_{H_n} \circ P_{H_m} = P_{H_n \wedge m}$$

$$n \wedge m = \min\{m, n\}.$$

اگر $m \geq 1$ و $(A_t) \in L_\alpha^2(\Omega, L^2(H))$ ، آن‌گاه:

$$\left| \int_0^1 t^{m-1} \operatorname{tr} \left(P_{H_n} \circ A_t \right) dt - \frac{1}{m} \operatorname{tr} \left(P_{H_n} \circ \int_0^1 A_t dt \right) \right|$$

$$\leq \sqrt{\frac{n}{2m-1} - \frac{n}{m^2}} \| \| (A_t) \| \|,$$

و

$$\left| \int_0^1 e^t \operatorname{tr} \left(P_{H_n} \circ A_t \right) dt - (e-1) \operatorname{tr} \left(P_{H_n} \circ \int_0^1 A_t dt \right) \right| \leq$$

$$\sqrt{\frac{n(e-1)(3-e)}{2}} \| \| (A_t) \| \|.$$

از نامساوی (۶.۲)، برای $B_t = t^{m-1} P_{H_n}$ داریم:

$$\left| \int_0^1 t^{m-1} \operatorname{tr} \left(P_{H_n} \circ A_t \right) dt - \operatorname{tr} \left(\int_0^1 t^{m-1} P_{H_n} dt \circ \int_0^1 A_t dt \right) \right|^2 \leq$$

$$\left(\int_0^1 \operatorname{tr} \left(t^{2m-2} P_{H_n} \right) dt - \operatorname{tr} \left(\int_0^1 t^{m-1} P_{H_n} dt \circ \int_0^1 t^{m-1} P_{H_n} dt \right) \right) \times$$

$$\left(\int_0^1 \operatorname{tr} \left(A_t^* \circ A_t \right) dt - \operatorname{tr} \left(\int_0^1 A_t^* dt \circ \int_0^1 A_t dt \right) \right) \leq$$

$$\left(\frac{n}{2m-1} - \frac{n}{m^2} \right) \int_0^1 \operatorname{tr} \left(A_t^* \circ A_t \right) dt.$$

بنابراین

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \int_0^1 t^{m-1} \operatorname{tr} \left(P_{H_n} \circ A_t \right) dt - \right.$$

$$\left. \frac{1}{m} \operatorname{tr} \left(P_{H_n} \circ \int_0^1 A_t dt \right) \right| \leq \sqrt{\frac{1}{2m-1} - \frac{1}{m^2}} \| \| (A_t) \| \|,$$

و در نتیجه

$$\left| \int_0^1 t^{m-1} \operatorname{tr} \left(P_{H_n} \circ A_t \right) dt - \right.$$

$$\left. \frac{1}{m} \operatorname{tr} \left(P_{H_n} \circ \int_0^1 A_t dt \right) \right| = o(\sqrt{n}).$$

حال برای $B_t = e^t P_{H_n}$ از نامساوی (۶.۲) داریم:

space operators, J. Math. Anal. Appl. **420** (2014), 737-749.

[11] J. Diestel and JR. J. J. Uhl, *Vector measures, with a foreword by B. J. Pettis*, Mathematical Surveys, No. 15, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1977.

[12] J. Mikusiński, *The Bochner Integral*, Birkhauser Verlag Basel, 1978.

[13] F. Bahrami, A. Bayati Eshkaftaki and S. M. Manjegani, *Operator-valued Bochner integrable functions and Jensen's inequality*, Georgian Math. J. **20**, (2013), 625-640.

[14] X. Li and W. Wu, *Operator Jensen's inequality on C^* -algebras*, Acta Mathematica Sinica, English Series Jan. **30**(1) (2014), 35-50.

[15] J. G. Murphy, *C^* -algebras and operator theory*, Academic Press, Boston, 1990.

فهرست منابع

[1] T. Furuta, J. Mičić Hot, J. J. Pečarić and Y. Seo, *Mond-J. Pečarić Method in Operator Inequalities. Inequalities for Bounded Selfadjoint Operators on a Hilbert Space*, Element, Zagreb, 2005.

[2] G.P.H. Styan, *Hadamard product and multivariate statistical analysis*, Linear Algebra Appl. **6** (1973), 217-240.

[3] P.L. Chebyshev, *O približennyh vyraženiach odnih integralov čerez drugie*, in: Soobšćenija i protokoly zasedanĭ Matemmati-českogo občestva pri Imperatorskom Har'kovskom Universitete, No. 2, 1882, pp. 93-98; Polnoe sobranie sočineniĭ P.L. Chebyshev, MoskvaLeningrad, 1948, pp. 128-131.

[4] G. Grüss, *Über das Maximum des absoluten Betrages von $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)g(x)dx - \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b f(x)dx \int_a^b g(x)dx$* , Math. Z. **39** (1934), 215-226.

[5] S. S. Dragomir, *Operators inequalities of the Jensen, Čebyšev and Grüss type*, SpringerBriefs in Mathematics, Springer, New York, 2012. MR2866026.

[6] M.S. Moslehian and R. Rajić, *Grüss inequality for n -positive linear maps*, Linear Algebra Appl. **433** (2010), 1555-1560.

[7] S. Barza, L.-E. Persson and J. Soria, *Sharp weighted multidimensional integral inequalities of Chebyshev type*, J. Math. Anal. Appl. **236**(2) (1999) 243-253.

[8] M. W. Alomari, Pompeiu –Čebyšev type inequalities for selfadjoint operators in Hilbert spaces, Adv. Oper. Theory **3** (2018), no 3, 459-472. MR3795049.

[9] R. Drnovšck, A. Peperko, *Inequalities on the spectral radius and the operator norm of Hadamard products of positive operators on sequence*, Banach J. Math. Anal. **10**(2016), no. 4, 800-814. Mr3548627.

[10] M.S. Moslehian and M. Bakharad, *Chebyshev type inequality for Hilbert*

