دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال نهم، شماره چهل و پنجم، آذر و دی ۱۴۰۲
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

کاربرد توابع مفصل در نظام بانکی و اقتصادی

کیانوش فتحی واجارگاه [۱*]، حمید متقی گلشن [۲]

(۱) گروه آمار، واحد تهران شمال، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران
(۲) گروه ریاضی، واحد شهریار، دانشگاه آزاد اسلامی، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۱۱/۱۸ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۶/۱۶

چکیده

در کشورهای صنعتی و پیشرفته اهداف اقتصادی اغلب دربرگیرنده موضوعاتی نظیر تامین اشتغال، مبارزه با تورم و غیره است، تا همواره ثبات قیمت‌ها و حفظ اعتبار پول ملی و موارد مشابه را ایجاد نمایند. در این راستا، یکی از روش‌های نیل به ثبات اقتصادی، مدیریت صحیح نظام پولی کشور بر پایه ابزار، نهاد و روش مناسب است. به‌طوری‌که در نظام بانکداری کشور کاربرد ابزارهای اسلامی مختلفی نظیر قرض‌الحسنه می‌تواند موجب دستیابی به اهداف فوق باشد. اما، مدیریت و استفاده ناکارا از این ابزار نیز به نوبه خود موجب اثرات نامطلوب در نظام اقتصادی می‌گردد. زیرا، به نظر می‌رسد که در سال‌های اخیر نظام پولی کشور در خصوص ابزار قرض‌الحسنه با وضعیت رکود مواجه بوده، لذا، بررسی علمی آن و اتخاذ تدابیر مناسب بر پایه نتایج پژوهشی می‌تواند باعث کاهش رکود قرض‌الحسنه و رسیدن به اهداف اقتصادی کشور باشد. لذا، در این مقاله رابطه بین این سیاست‌ها در مفاهیم اقتصادی و میزان رکود قرض‌الحسنه را با استفاده از توابع مفصل مورد بررسی قرار گرفته است. از این‌رو، با توجه به این که توابع مفصل ساختار وابستگی بین متغیرها را به صورت یک مدل نشان می‌دهند و به کمک آنها می‌توان اندازه همبستگی بین متغیرها را تعیین و رابطه بین آنها را مدل‌بندی کرد. در این مقاله دوره‌های رکود قرض‌الحسنه در سیستم اقتصاد بررسی شده است. مورد مطالعاتی این تحقیق استان کرمانشاه است. نتایج بدست آمده در این تحقیق بیانگر آن است که توابع مفصل ابزار مفیدی برای تعیین توزیع توام و ساختار وابستگی متغیرهای همبسته رکود هستند.

واژه‌های کلیدی: ساختار وابستگی، توابع مفصل، سیاست‌های انبساطی و انقباضی، قرض‌الحسنه، رکود قرض‌الحسنه.

* عهده‌دار مکاتبات: Email: K_fathi@iau-tnb.ac.ir

۱. مقدمه

تابع مفصل به عنوان یک مدل برای مشاهدات چند متغیره و وابسته توانسته است در مطالعات اخیر توجه بسیاری از کاربران آمار را به خود جلب کند و به منظور به دست آوردن ساختار وابستگی بین متغیرهای تصادفی در حالت چندبعدی بدون هیچ اثر نگران‌کننده ناشی از اثرات توابع توزیع حاشیه‌ای مورد استفاده قرار گیرد. در حقیقت می‌توان گفت توابع مفصل از یک نقطه‌نظر توابع توزیع چند متغیره را به توابع توزیع حاشیه‌ای آن‌ها پیوند می‌دهند و از دیدگاه دیگر، مفصل را می‌توان به صورت توابع توزیع چند متغیره‌ای تعریف کرد که توابع توزیع حاشیه‌ای آن‌ها به صورت یکنواخت روی فاصله (۰،۱) توزیع شده است.

چنانچه توزیع‌های حاشیه‌ای پیوسته باشند تابع مفصل یکتاست. به علاوه تابع مفصل، تحت تبدیلات اکیداً صعودی پایا می‌باشد. اهمیت مطالعه توابع مفصل از یک جهت به این دلیل است که ابزاری توانمند برای شبیه‌سازی نمونه تصادفی از توزیع‌های چند متغیره با حاشیه‌ای‌های دلخواه است و از جهت دیگر به این دلیل که می‌توان با استفاده از آن‌ها معیارهای آزاد-مقیاس[۱] برای اندازه‌گیری و وابستگی بدست آورد و ساختار وابستگی را توصیف نماید. برای بیان ساختار وابستگی و برازش یک توزیع چند متغیره مناسب، با استفاده از تابع مفصل لازم است دو مرحله طی شود. مرحله اول مدل-بندی همه توزیع‌های حاشی ای یک متغیری و مرحله دوم، برآورد یک تابع مفصل که وابستگی بین متغیرها را بیان کند. توابع مفصل به آماردان کمک می‌کند تا بتواند وابستگی بین متغیرهای تصادفی را صرف‌نظر از نوع توزیع‌های حاشیه‌ای آن‌ها مدل‌بندی کند. لذا به دلیل ویژگی‌های قابل توجه، توابع مفصل در مسائل مالی مورد استفاده قرار می‌گیرند تا ساختار وابستگی بین سرمایه‌ها را مدل‌بندی کنند و به عنوان ابزاری توانا در تحلیل سری‌های چند متغیره به‌کار می‌روند. در این راستا در این پژوهش، به بررسی کاربرد توابع مفصل در تحلیل بازارهای مالی در ابعاد بالا پرداخته می‌شود. به طوری که پیش‌بینی از آینده بازار با استفاده از شیوه جدید و با توجه به متغیرهای ایفاکننده نقش در این فرآیند فراهم گردد.

۲. مبانی نظری پژوهش

۲-۱. تعریف سیاست‌های پولی

سیاست‌هایی که توسط بانک مرکزی در جهت کنترل نقدینگی اعمال می‌شود را سیاست‌های پولی گویند. در واقع متولی این سیاست بانک مرکزی است. بعضی سیاست پولی را تنظیم اوضاع و احوال اقتصادی از طریق نرخ بهره می‌دانند و عده‌ای آن را سیاستی تلقی می‌کنند که مقدار پول در جریان را کم و زیاد کند [۱]. اما، مانتریست‌ها معتقدند که سیاست پولی کلیه اقداماتی می‌باشد که بانک مرکزی جهت تغییر در عرضه پول انجام می‌دهد [۲].

۲-۲. انواع سیاست‌های پولی

الف) سیاست پولی انبساطی: سیاست‌هایی که موجب افزایش عرضه پول در اقتصاد شود را سیاست‌های پولی انبساطی می‌گویند.

ب) سیاست پولی انقباضی: سیاست‌هایی که عرضه پول را در اقتصاد کاهش دهد را سیاست پولی انقباضی گویند.

۲-۳. عمده‌ترین اهداف سیاست پولی در اقتصاد:

الف) تسریع رشد اقتصادی

ب) ایجاد اشتغال کامل

ج) تثبیت سطوح عمومی قیمتها

د) ایجاد تعادل در موازنه‌ی پرداخت‌های خارجی [۳].

۲-۴. نقش حساب‌های قرض‌الحسنه در اقتصاد

سپرده‌گذاری در حساب قرض‌الحسنه نوعی کمک به بانک برای انجام امور خیریه و یا مساعدت‌های مالی به اشخاص حقیقی و حقوقی است. قرض‌الحسنه، حسابی است که در بانک هیچ سودی برای آن لحاظ نمی‌شود و در ازای آن بانک‌ها در فواصل معینی (شش ماهه یا یک‌ساله) برای دارندگان این

---

[۱] Scale-free

گونه حساب‌ها به قید قرعه جوایزی و یا تسهیلات بدون سود و به صورت قرض‌الحسنه در نظر می‌گیرند.

سپرده‌گذاری در حساب‌های قرض‌الحسنه به دلیل تاثیر مشهودی که بر سرمایه‌گذاری و تورم دارد از اهمیت بسیاری در بررسی‌های کلان اقتصاد برخوردار است. قرض‌الحسنه با تاثیر بر حجم نقدینگی، از عوامل اصلی در اجرای سیاست‌های پولی دولت به شمار می‌رود و با تاثیر بر عرضه پول و سرعت گردش پول[1] بسیاری از شاخص‌های ملی را تحت تاثیر قرار می‌دهد. در واقع، سپرده‌های قرض‌الحسنه یکی از مهم‌ترین منابع فعالیت‌های اقتصادی بانک‌ها است. بنابراین بررسی این موضوع که در آینده افراد چه مقدار از پول خود را در حساب‌های قرض‌الحسنه قرار می‌دهند، برای سیاست‌گذاری بانکی کشور و به ویژه بانک‌ها از اهیمت بسیاری برخوردار است [۴].

۲-۵. تورم

در خصوص تورم، تعاریف متعددی ارائه شده است. یک تعریف به نسبت کامل از تورم عبارت است از: تورم ناشی از وضعیتی است که سطح عمومی قیمت‌ها به طور بی‌رویه و یا بی‌تناسب و به طور مدام و به مرور زمان افزایش می‌یابد. از تعاریف دیگر تورم می‌توان به این نمونه‌ها اشاره کرد: طبق تعریف لاواسیچ (۱۹۷۶) تورم وضعیتی است که در آن سطح عمومی قیمت‌ها افزایش می‌یابد و به وسیله نرخ رشد سطح عمومی قیمت‌ها در طول یک دوره مشخص زمانی اندازه‌گیری می‌شود. طبق تعارف اتول، میگلیت و نیومن (۱۹۸۷) تورم افزایش مداوم در سطح عمومی قیمت‌ها و کاهش مستمر در قدرت خرید پول است. طبق تعریف گرینوالد (۱۹۸۲) منظور از تورم، بالا رفتن سطح عمومی قیمت‌های پولی کالاها و خدمات است.

اقتصاددانان از جهت اهداف سیاست کلان اقتصادی بر مواردی مانند اشتغال کامل، ثبات قیمت‌ها (مهار تورم)، توزیع عادلانه درآمد و رشد مداوم اقتصادی تاکید دارند. تورم به عنوان یکی از اهداف مهم سیاست کلان همواره مورد توجه اقتصاددانان بوده است. آثار منفی تورم بر پیکر اقتصاد را بطور خلاصه می‌توان به صورت زیر طبقه‌بندی کرد: آثار تورم بر توزیع درآمد، آثار تورم بر پس‌انداز، آثار تورم بر مصرف، آثار تورم بر سرمایه‌گذاری، آثار تورم از جهت ایجاد عدم اطمینان در تصمیم‌گیری‌های اقتصادی، آثار تورم از جهت انحراف امکانات تولید از فعالیت‌های مولد به فعالیت‌های غیرمولد، آثار تورم بر بودجه دولت و آثار تورم بر بازرگانی خارجی.

۳. روش‌شناسی پژوهش

۳-۱. معرفی تابع مفصل

توابع مفصل به دو دلیل مورد علاقه محققان رشته آمار قرار دارد و کاربردهای فراوانی در علوم مختلف در اقتصاد، کلاس-بندی اطلاعات، آنالیز داده‌ها، ریاضیات مالی و غیره دارد، به عنوان مثال رجوع کنید به [۶-۱۸]. اول به عنوان راهی برای مطالعه وابستگی بین متغیرها بصورت ناپارامتری و دوم به عنوان نقطه شروع ساخت توابع توزیع چند متغیره مدت‌های زیادی آماردانان علاقمند به بدست آوردن ارتباط بین توابع توزیع توام چند بعدی با توابع توزیع با بعد پایین‌تر بوده‌اند. فرچت (۱۹۵۱) و دال اگلی (۱۹۶۰) کارهای زیادی در رابطه با به دست آوردن این ارتباط انجام دادند. اسکلار (۱۹۵۹) کلاس جدیدی از توابع را با عنوان تابع مفصل معرفی نمود، این توابع در واقع توزیع چند متغیره با حاشیه‌های توزیع یکنواخت بر $I=[0,1]$ می‌باشند. در این قسمت ابتدا زیر مفصل‌ها را به عنوان کلاس مشخصی از توابع جهت‌دار دو-صعودی تعریف می‌کنیم، سپس تابع مفصل به عنوان تابع زیر مفصلی با دامنه I^2 معرفی خواهد شد.

تعریف ۱. فرض کنید S_1 و S_2 دو زیرمجموعه ناتهی از مجموعه اعداد حقیقی توسیع یافته

$R = R \cup \{-\infty, \infty\}$

تابعی حقیقی مقدار با دامنه $S_1 \times S_2$ و

$B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2]$

مستطیلی در دامنه H باشد . در این صورت H- حجم B به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$V_H(B) = H(x_2, y_2) - H(x_2, y_1) - H(x_1, y_2) + H(x_1, y_1)$$

[1] Velocity of Circulation

تعریف ۲. تابع حقیقی H را دو- صعودی گوییم، هرگاه برای هر مستطیلی که رئوس آن در دامنه H قرار دارد $V_H(B) \geq 0$ باشد.

تعریف ۳. تابع D^* یک زیر مفصل نامیده می‌شود هرگاه دارای خصوصیات زیر باشد:

الف) دامنه D^* مجموعه $S_1 \times S_2$ است، که در آن S_1 و S_2 زیر مجموعه‌هایی از I هستند.

ب) D^* تابع جهت‌دار و دو-صعودی است.

ج) برای هر $u \in S_1$ و $\mu \in S_2$ داریم $D^*(1,\mu) = \mu$ و $D^*(u,1) = u$ یعنی R_{D^*} نیز در I قرار دارد.

یک زیرمفصل با دامنه I^2، تابع مفصل دوبعدی نامیده می‌شود.

تعریف معادل دیگری برای تابع مفصل به صورت زیر ارائه می‌شود:

تعریف ۴. تابع $D: I^2 \to I$ را تابع مفصل دو-بعدی گوییم هرگاه:

الف) برای هر $u \in I$

$$D(u,0) = D(0,u) = 0, D(u,1) = D(1,u) = u$$

ب) (شرط یکنوایی) برای هر u_1, u_2, t_1, t_2 در I، اگر $t_1 \leq t_2$ و $u_1 \leq u_2$ آنگاه

$$H(t_2,u_2) - H(t_2,u_1) - H(t_1,y_2) + H(u_1,y_2) \geq 0$$

در این قسمت دو تعریف دیگر از توابع مفصل که استفاده بیشتری نسبت به تعاریف بالا دارند، ارائه می‌شود.

تعریف ۵. دو متغیر X, Y به ترتیب با توابع توزیع:

$$F_X(x) = P(X \leq x)$$

و

$$F_Y(y) = P(Y \leq y)$$

و تابع توزیع توام

$$F_{X,Y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

را در نظر بگیرید. برای هر جفت عدد حقیقی (x,y) می‌توان سه مقدار $(F_X(x), F_Y(y), F_{X,Y}(x,y))$ را در نظر گرفت، که هر کدام به یک نقطه $(F_X(x), F_Y(y))$ در مربع واحد I^2 و این زوج با مقدار $F_{X,Y}(x,y)$ در بازه I مطابقت دارد. این رابطه که یک مقدار مربوط به تابع توزیع توام را به توابع توزیع یک بعدی اختصاص می‌دهد، تابع مفصل نامیده می‌شود.

۳-۲. روش ساخت و خانواده‌های توابع مفصل

جو (۱۹۹۷) و چروبینی (۲۰۰۴) خانواده‌های توابع مفصل که در علوم مختلف کاربرد دارند را مورد بررسی قرار دادند. نلسن (۱۹۹۹) روش‌های مهم ساخت توابع مفصل و طیف وسیع‌تری از خانواده‌های آنها را که توسط محققین در زمینه‌های مختلف بکار گرفته شده، جمع‌آوری نموده است. در این بخش روش-های ساخت توابع مفصل را مطرح نموده، خانواده‌ی مهم از این توزیع را که با توجه به روش‌های ذکر شده به دست می-آیند معرفی و خصوصیات وابستگی برای هر خانواده را مورد بررسی قرار می‌دهیم. اطلاعات بیشتر در مراجع [۶،۷،۹-۱۱] موجود است.

۳-۲-۱. روش وارون

فرض کنید H تابع توزیع توام دو متغیر تصادفی X, Y با حاشیه‌های F, G باشد و F^{-1}, G^{-1} به ترتیب شبه معکوس دو تابع F, G باشند. رابطه بین تابع توزیع توام و تابع مفصل به صورت $H(x,y) = D(u,t)$ است. با قرار دادن $u = F(x)$ و $t = G(y)$ در تابع توزیع توام داریم:

$$H(F^{-1}(u), G^{-1}(t)) = D(u,t)$$

به این طریق می‌توان برای هر توزیع توام یک تابع مفصل تعیین نمود. این روش روش وارون[۱] نامیده می‌شود.

[۱] Inversion Method

۳-۲-۲. روش جبری

بر اساس نسبت بخت‌ها[1] یا نسبت حاصل‌ضرب متقاطع مشاهدات موجود در جداول توافقی می‌توان خانواده‌ای از توابع مفصل را ساخت، که به خانواده مفصل پلاکت معروف هستند. یک جدول توافقی مانند جدول (۱) را در نظر بگیرد، که در آن هر سطر و ستون شامل دو رده بالا =:↑ و پایین =:↓ است و مشاهدات خانه‌ها با a,b,c,d نمایش داده شده اند در این صورت نسبت بخت‌ها عبارتند از:

$$\theta=\frac{ad}{bc}=\frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{d}}=\frac{\frac{a}{a+c}}{\frac{b}{b+d}}\times\frac{\frac{d}{b+d}}{\frac{c}{a+c}}=\frac{P(R=\downarrow|C=\downarrow)}{P(R=\downarrow|C=\uparrow)}\times\frac{P(R=\uparrow|C=\uparrow)}{P(R=\uparrow|C=\downarrow)}$$

دو متغیر تصادفی پیوسته X,Y را با تابع توزیع توام H و حاشیه‌ای‌های F,G را در نظر گیرید. فرض کنید x,y مشاهدات متناظر با این دو متغیر تصادفی باشند. گروه‌های پایین و بالا در جدول (۱) با توجه به این متغیرها به دو گروه $X\le x$ و $X>x$ تعیین می‌کنیم، مقادیر d,c,b,a را به ترتیب با مقادیر $H(x,y)$، $F(x)-H(x,y)$، $G(y)-H(x,y)$، $1-F(x)-G(y)+H(x,y)$ جایگزین و جدول ۲ حاصل می‌شود.

جدول۱: جدول توافقی 2×2

		C		
		↓	↑	جمع
R	↓	a	b	$a+b$
	↑	c	d	$c+d$
	جمع	$a+c$	$b+d$	n

جدول۲: جدول توافقی 2×2 برای تابع توزیع توام

	$Y\le y$	$Y>y$	
$X\le x$	$H(x,y)$	$F(x)-H(x,y)$	$F(x)$
$X>x$	$G(y)-H(x,y)$	$1-F(x)-G(y)+H(x,y)$	$1-F(x)$
	$G(y)$	$1-G(y)$	1

با توجه به جدول (۲) مقدار θ به صورت:

$$\theta=\frac{H(x,y)(1-F(x)-G(y)+H(x,y))}{(F(x)-H(x,y))(G(y)-H(x,y))}$$

بدست می‌آید که از تعاریف قبل می‌توان آن را به صورت

$$\theta=\frac{D(u,t)(1-u-t+D(u,t))}{(u-D(u,t))(t-D(u,t))}$$

نوشت و با استفاده از آن داریم

$$D(u,t)=\frac{1+(\theta-1)(u+t)}{2(\theta-1)}\pm\frac{\sqrt{[1+(\theta-1)(u+t)]^2-4u\theta(\theta-1)}}{2(\theta-1)}$$

چون مقدار صورت با علامت " + " در خصوصیات تابع مفصل صدق نمی‌کند، لذا خانواده توابع مفصل پلاکت با علامت منفی به دست می‌آید.

۳-۳. خانواده‌های توابع مفصل

توابع مفصل برای اولین بار توسط شوایزر و اسکلار (۱۹۶۱) کشف شدند ولی توسط لینگ (۱۹۶۵) نام‌گذاری شدند. این توابع بطور فراوان در امور مالی و بیمه به کار می‌روند.

ایده کاربرد توابع مفصل ارشمیدسی در بیمه به صورت غیرمستقیم توسط کلایتون (۱۹۷۸) مطرح و توسط اوکس (۱۹۸۲) وکوک و جانسون (۱۹۸۱) به کار برده شدند. در این بخش ابتدا ارتباط این خانواده از توابع مفصل و چونگی محاسبه اندازه‌های وابستگی مورد بررسی قرار می‌گیرد سپس

[1] Odds Ratio

چند خانواده مهم از آنها که کاربرد زیادی در زمینه‌های مختلف علمی دارند، معرفی می‌شوند. اطلاعات بیشتر توابع مفصل را در مراجع [۶-۱۱] می‌توان یافت.

۳-۳-۱. خانواده گاوسی

خانواده تابع گاوسی[۱] به صورت

$$D_\rho^{G_\alpha}(u,t)=\Phi_\rho(\Phi^{-1}(u),\Phi^{-1}(t))$$

است، که در آن Φ_ρ تابع توزیع نرمال استاندارد دو متغیره با ضریب همبستگی ρ است . در نتیجه تابع توزیع توام به صورت

$$\Phi_\rho(\Phi^{-1}(u),\Phi^{-1}(t)) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)}\int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(t)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(\frac{2ut\rho-u^2-t^2}{1-\rho^2}\right)dudt$$

ساده می‌شود.

تابع مفصل چگالی توام خانواده گاوسی نیز به صورت

$$D_\rho^{G_\alpha}(u,t)=\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left(\frac{u^2+t^2}{2}+\frac{2ut\rho-u^2-t^2}{1-\rho^2}\right)$$

است.

۳-۳-۲. خانواده استودنت

فرض کنید t_υ تابع توزیع t -استودنت با درجه آزادی υ است. تابع توزیع توام دو متغیره با ضریب همبستگی ρ به صورت

$$H_{\rho,\upsilon}(x,y) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\left(1+\frac{s^2+t^2-2st\rho}{\upsilon(1-\rho^2)}\right)^{\frac{\upsilon+2}{2}} dsdt$$

است. بنابراین تابع مفصل دو متغیره استودنت به صورت

$$D_{\rho,\upsilon}(u,t)=t(t^{-1}(u)t^{-1}(t)) = \int_{-\infty}^{t^{-1}(u)}\int_{-\infty}^{t^{-1}(t)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\left(1+\frac{s^2+t^2-2st\rho}{\upsilon(1-\rho^2)}\right)^{\frac{\upsilon+2}{2}} dsdt$$

و تابع مفصل چگالی آن به صورت زیر تعریف می‌شوند

$$d_{\rho,\upsilon}(x,y) = \rho^{-\frac{1}{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{\upsilon+2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\upsilon}{2}\right)}{\Gamma\left(\left(\frac{\upsilon+2}{2}\right)^2\right)}\left(1+\frac{s^2+t^2-2st\rho}{\upsilon(1-\rho^2)}\right)^{-\frac{\upsilon+2}{2}}$$

۳-۳-۳. خانواده فرچه

فرچه (۱۹۵۸) برای مقادیر $p,q\in I$ و $p+q\le 1$ خانواده تابع مفصل

$$D^F_{p,q}(u,t) = p\max(u+t-1,0)+(1-p-q)ut+q\min(u,t)$$

را تعریف نمود. تابع مفصل چگالی برای این خانواده به صورت $d^F_{p,q}(u,t)=1-p-q$ است. این خانواده برای $p=1$ و $q=0$ کران پایین فرچه – هافدینگ، و برای $p=0$ و $q=1$ کران بالای فرچه – هافدینگ، مقدار τ-کندال و ρ -اسپرمن نیز به ترتیب برابر $\frac{(q-p)(2+p+q)}{3}$ و $q-p$ است.

۳-۳-۴. خانواده گالامبوس

گالامبوس (۱۹۷۸) برای $\theta\in[0,+\infty]$ تابع مفصل

$$D_\theta(u,t)=ut\exp\left(\left((-\ln u)^{-\theta}+(-\ln t)^{-\theta}\right)^{-\frac{1}{\theta}}\right)$$

را معرفی نمود، که تابع مفصل چگالی آن به صورت:

[۱] Gaussian Copula

$$d_{\theta}(u,t)=$$
$$\frac{C(u,t)}{ut}\left\{\left[1-(-\ln u)^{-\theta}-(-\ln t)^{-\theta}\right]^{-\frac{1}{\theta}-1}\right.$$
$$\times\left[(-\ln u)^{-\theta-1}+(-\ln t)^{-\theta-1}\right.$$
$$\left.+(-\ln u)^{-\theta}+(-\ln t)^{-\theta}\right]^{-\frac{1}{\theta}-2}$$
$$\times(-\ln u\ln t)^{-\theta-1}$$
$$\left.\times\left(1+\theta+\left((-\ln u)^{-\theta}+(-\ln t)^{-\theta}\right)^{-\frac{1}{\theta}}\right)\right\}$$

می‌باشد.

۳-۳-۵. خانواده مارشال اُلکین

خانواده مارشال الکین اولین بار توسط مارشال الکین (۱۹۶۷a و۱۹۶۷b) به صورت:

$$D_{m,n}(u,t)=\min\left\{u^{1-m}t,ut^{1-n}\right\}$$
$$=\begin{cases}(1-m)u^{1-2m}t & u^{m}\geq t^{n}\\ (1-n)ut^{1-2n} & u^{m}<t^{n}\end{cases}$$

معرفی شدند. تابع چگالی برای این خانواده از مفصل‌ها به صورت:

$$d_{m,n}(u,t)=\begin{cases}(1-m)u^{1-m} & u^{m}\geq t^{n}\\ (1-n)t^{1-n} & u^{m}<t^{n}\end{cases}$$

بدست می‌آید. ضریب همبستگی اسپیرمن و کندال برای این خانواده به ترتیب بصورت $\frac{3mn}{3m+2n-mn}$ و $\frac{mn}{m+n-mn}$ است. مقدار وابستگی دنباله‌ای بالایی برای این خانواده برابر $\min\{m,n\}$ است.

۳-۳-۶. خانواده فارلی–گامبل–مورگنسترن

خانواده توابع مفصل فارلی – گامبل – مورگنسترن[1] توسط مورگنسترن(۱۹۵۶) برای:

$$-1\leq\theta\leq1$$

به صورت

$$D_{\theta}(u,t)=ut(1-\theta(1-u)(1-t))$$

معرفی شد، که تابع مفصل چگالی آن به صورت

$$d_{\theta}(u,t)=1-\theta(1-2u)(1-2t)$$

بدست می‌آید. مقدار ضریب کندال و ضریب اسپیرمن به ترتیب برابر $\frac{\theta}{3}$ و $\frac{2\theta}{9}$ است. استفاده از این تابع مفصل در علوم مختلف محدود می‌باشد زیرا ضرایب همبستگی برای این خانواده همواره در بازه $\left[-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$قرار می‌گیرد و بیشترین مقدار همبستگی پیرسون برای این تابع زمانی بدست می‌آید که توزیع حاشیه‌ای یکنواخت بر بازه $[0,1]$ باشند. به عنوان مثال برای حاشیه‌ای نمایی با پارامتر یک، ضریب همبستگی پیرسون در بازه $\left[-\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right]$قرار دارد.

۳-۳-۷. خانواده علی میخاییل–حق

یکی از توابع مفصل که از روش تجربی به دست آمده است تابع مفصل علی- میخاییل- حق است که برای:

$$-1\leq\theta\leq1$$

به صورت:

$$D_{\theta}(u,t)=\frac{ut}{1-\theta(1-u)(1-t)}$$

تعریف می‌شود. تابع مفصل چگالی این خانواده نیز به صورت:

$$d_{\theta}(u,t)=\frac{\left[1-\theta(1-2u)(1-2t)\right]2\theta(1-\theta)ut}{\left[1-\theta(1-2u)(1-2t)\right]^{3}}$$

به دست می‌آید. ضریب کندال برای این خانواده برابر

$$\frac{3\theta-2}{\theta}-\frac{2}{3}\left(1-\frac{1}{\theta}\right)^{2}\ln(1-\theta)$$

است و برای ضریب اسپیرمن فرم بسته‌ای وجود ندارد.

[1] Farli-Gumbel-Morgenstern

۳-۳-۸. خانواده پلاکت

خانواده تابع مفصل پلاکت که برای: $0 \le \theta \le 1$ به صورت رابطه

$$D_{\theta}(u,t)=\frac{\left[1-(\theta-1)(u+t)\right]}{2(\theta-1)} -\frac{\sqrt{\left[1-(\theta-1)(u+t)\right]^{2}-4\theta(1-\theta)ut}}{2(\theta-1)}$$

است که تابع مفصل چگالی آن به صورت:

$$d_{\theta}(u,t)=\left[(1-(\theta-1)(u+t))^{2}-4\theta(1-\theta)ut\right]^{-\frac{3}{2}} \theta\left[1-(\theta-1)(u+t-2ut)\right]$$

به دست می‌آید. ضریب اسپیرمن برای این خانواده برابر $\frac{\theta+1}{\theta-1}-\frac{2\theta}{(\theta-1)^{2}}\ln(\theta)$ است و برای ضریب کندال فرم بسته‌ای وجود ندارد.

۴. یافته‌های پژوهش

مورد مطالعاتی این تحقیق استان کرمانشاه است. به بیان دیگر، در این تحقیق استان کرمانشاه به عنوان مثال مورد مطالعه قرار گرفته شده است. این استان از لحاظ تنوع مذهب (اهل تشیع، اهل تسنن، اهل حق) مورد توجه بوده و این بدان خاطر است که بحث قرض‌الحسنه از مباحث اعتقادی می‌باشد.

۴-۱. انتخاب شاخص

شاخص‌های رکود و رونق قرض‌الحسنه با توجه به استقبال مردم از این نوع سپرده می‌باشد عوامل انگیزشی متفاوتی سبب این استقبال می‌باشد. بانک‌ها با توجه به سیاست‌های مورد توجه خود گاها اقدام به طرح‌های مختلف جهت جذب این منابع ارزان قیمت می‌نمایند از جمله این طرح‌ها می‌توان به اعطای جواهر و تسهیلات ارزان قیمت به مشتریان نام برد. لذا افتتاح حساب مشتریان و منابع موجود در این بخش نشان دهنده نحوه استقبال مشتریان از سپرده‌های قرض‌الحسنه می‌باشد. در این میان بانک قرض‌الحسنه مهر ایران به عنوان نخستین بانک تخصصی قرض‌الحسنه که مبادرت به جذب سپرده‌های قرض‌الحسنه و اعطای تسهیلات قرض‌الحسنه به اقشار مختلف مردم می‌نماید، به عنوان بانک مورد مطالعه در استان کرمانشاه مورد توجه محقق قرار گرفته است.

۴-۲. تعیین توزیع رکود قرض‌الحسنه

رکود قرض‌الحسنه توسط دو عامل مدت و شدت رکود آن تفسیر می شود. تحلیل جداگانه این دو عامل برای بررسی رکود قرض‌الحسنه نمی‌تواند میزان ارتباط و تاثیراتی که این دو عامل در تحلیل رکود قرض‌الحسنه بر هم دارند نمایان سازند. لذا لازم است توزیع توام دو عامل مدت و شدت این رکود تعیین گردد. با توجه به خروجی نرم‌افزار چون همبستگی بین این دو عامل ۹۰٪ است و فرض استقلال آنها معنی‌دار نیست، نمی‌توان توزیع توام مدت و شدت رکود قرض‌الحسنه را به سادگی از طریق ضرب توزیع‌های کناری آنها بدست آورد. بنابراین با استفاده از توابع مفصل مناسب توزیع توام آنها را به دست می‌آوریم. برای این منظور لازم است ابتدا توزیع کناری هر یک از دو عامل مدت و شدت رکود قرض‌الحسنه برآورد شوند. سپس از بین خانواده‌های توابع مفصل معرفی شده، خانواده‌هایی را که شرایط مدل‌بندی رکود قرض‌الحسنه را دارا باشند انتخاب می‌کنیم. چون خانواده‌های فارلی- گامبل- مورگنسترن فقط برای مدل‌بندی عامل‌هایی با همبستگی بین $-\frac{1}{a}$ و $\frac{1}{a}$ مورد استفاده قرار می‌گیرد، با توجه به اینکه همبستگی بین داده‌ها ۹۰٪ است، از این خانواده برای مدل‌بندی رکود قرض‌الحسنه استفاده نخواهد شد و خانواده‌های علی-میخاییل-حق، کلایتون، فرانک، گامبل-بارنت، گامل-هوگارد، جو و پلاکت برای مدل بین متغیر مورد نظر ما مورد بررسی قرار می‌گیرند.

با توجه به اینکه در اغلب تحقیقات انجام شده در این زمینه توزیع‌های نمایی، گاما، وایبل و گامبل به داده‌های مربوط به موضوع این تحقیق برازش داده شده و برای مدت رکود وقتی داده‌ها گسسته باشند توزیع هندسی در نظر گرفته شده است. در این تحقیقات تمام توزیع‌های مذکور به داده‌ها برازش داده شد و نهایتاً توزیع نمایی به داده‌های مدت رکود و توزیع گاما به داده‌های شدت رکود برازش مناسب‌تری را داشته‌اند.

تابع چگالی توزیع نمایی به صورت

$$f_X(x)=\frac{1}{\lambda}e^{-\frac{x}{\lambda}},\ x\ge 0$$

است، که در آن پارامتر λ را می‌توان به روش ماکسیمم درست‌نمایی یا با کمینه کردن عبارت

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(F(x_i,\lambda)-F_n(x_i))^2 \qquad (۱)$$

برآورد نمود، که در آن $F_n(x_i)$ تابع توزیع تجربی مشاهدات و $F(x_i,\lambda)$ تابع توزیع تجمعی نمایی است. برای داده‌های شهرستان‌های مورد مطالعه از استان کرمانشاه برآورد ماکسیمم درست‌نمایی $\hat{\lambda}=3.47$ حاصل گردید و از کمینه کردن عبارت (۱) مقدار $\tilde{\lambda}=3.05$ به دست می‌آید. اما با انجام آزمون نیکویی برازش کولوموگر–اسمیرنوف ملاحظه می‌شودکه تابع چگالی نمایی با $\tilde{\lambda}$ برازش بهتری را فراهم می‌آورد. شکل (۱) نیکویی برازش توزیع نمایی برای داده‌های مدت رکود قرض‌الحسنه را نشان می‌دهد. برای شدت رکود قرض‌الحسنه نیز توزیع گاما با تابع چگالی

$$f_X(x)=\frac{x^{\alpha-1}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}e^{-\frac{x}{\beta}},\ \beta\ge 0$$

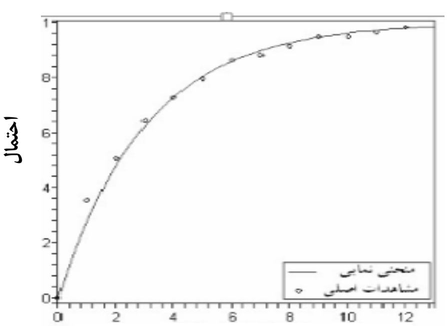
به داده‌ها برازش داده شد، که در آن α پارامتر نما و β پارامتر مقیاس این توزیع می‌باشند. پارامترهای این توزیع نیز با کمینه کردن عبارت (۱) برآورد شده‌اند، که در آن $F_n(x_i)$ تابع توزیع تجربی مشاهدات و $F(x_i,\lambda)$ تابع توزیع تجمعی گاما است. شکل (۲) برازش توزیع گاما به داده‌های رکود قرض‌الحسنه را نشان می‌دهد.

برای داده‌های شهرهای مورد نظر این تحقیق از کمینه کردن عبارت (۱) مقادیر $\hat{\alpha}=0.73$ و $\hat{\beta}=3.26$ حاصل گردیده است. مقادیر برآورد این پارامترها برای شهرهای مورد نظر استان کرمانشاه طبق جدول (۳) ارائه شده است.

برای برآورد پارامتر هر یک از توابع مفصل ابتدا مقادیر $\hat{\lambda},\hat{\beta},\hat{\alpha}$ را در رابطه (۱) قرار داده و تابع حاصل را برحسب پارامتر θ ماکسیمم می‌نماییم. با توجه به پیچیده بودن فرم تابع چگالی برای خانواده‌های استفاده شده و زمان‌بر بودن اجرای برنامه، برای برآورد پارامتر θ ابتدا نمودار لگاریتم تابع درست‌نمایی را در بازه تعریف شده برای θرسم نموده سپس با محدود نمودن بازه‌ای که ماکسیمم لگاریتم تابع درست‌نمایی در آن قرار دارد. طول نقطه ماکسیمم را به روش نیوتن رافسون به عنوان برآورد ماکسیمم درستنمایی θ به دست می‌آوریم.

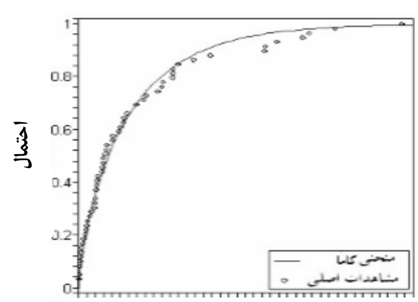
جدول۳. برآورد پارامترهای توزیع نمایی و گاما

شهر		کرمانشاه	اسلام آباد غرب	روانسر	سرپل ذهاب	گیلان غرب
نمایی	λ	۴٫۷۶	۳٫۳۶	۳٫۱۴	۴٫۰۶	۳٫۲۸
گاما	α	۱٫۳۶	.۷۵	.۶۸	۱٫۲۵	.۵۳
	β	۲٫۹۲	۳٫۸۳	۴٫۴۴	۲٫۵۹	۳٫۹۵



مدت رکود قرض الحسنه

شکل ۱: نمودار مشاهدات مدت رکود قرض‌الحسنه با توزیع تجمعی نمایی برازش شده



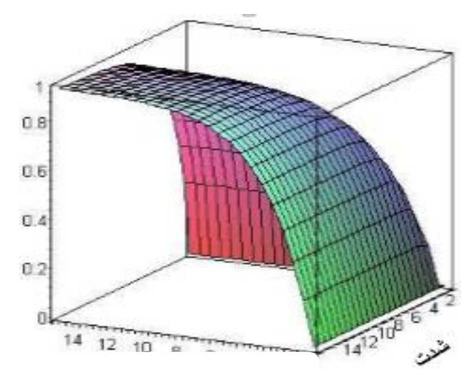
شدت رکود قرض الحسنه

شکل ۲: نمودار مشاهدات شدت رکود قرض‌الحسنه با توزیع تجمعی گاما برازش شده

جدول۴: برآورد ماکسیمم درستنمایی θ

تابع مفصل	برآورد θ ماکسیمم درستنمایی
علی- میخاییل- حق	.۹۵
کلایتون	۱.۵۴
فرانک	۱۰.۶۹
گالامبوس	۱.۹۸
گامبل-بارنت	.۳۴
گامبل-هوگارد	۲.۶۹
پلاکت	.۷۸
جوی	۳.۴۶

تابع مفصل برتر بر اساس روش ماکسیمم مقدار لگاریتم تابع درستنمایی انتخاب شده است، که مقادیر آن برای داده‌های شهرستان‌های مورد نظر استان کرمانشاه در جدول (۴) ارائه شده است. همانطور که ملاحظه می‌شود ماکسیمم مقدار لگاریتم درستنمایی خانواده فرانک از سایر خانواده‌ها بیشتر می‌باشد. یعنی تابع مفصل فرانک بیشترین شانس را برای نموده مشاهده شده به ازای مقدار برآورد شده نسبت به خانواده‌های دیگر فراهم می‌سازد. بنابراین تابع مفصل فرانک با مقدار پارامتر ۱۰.۶۹= θ را برای تعیین توزیع توام مدت وشدت رکود قرض‌الحسنه در شهرستان‌های استان کرمانشاه به کار می‌گیریم.



شکل ۳: نمودار توزیع توام مدت و شدت رکود

تابع چگالی توام دو عامل مدت و شدت نیز با استفاده از رابطه

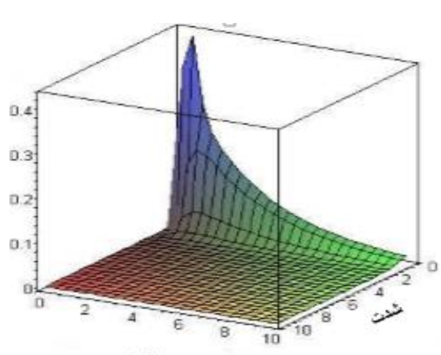
$$\rho_S = 12\iint_{I^2} ut dD(u,t) - 3$$
$$= 12\iint_{I^2} D(u,t) du dt - 3$$
$$= 12\iint_{I^2} \left(D(u,t) - ut \right) du dt$$

که با تابع مفصل D به صورت زیر در ارتباط است.

$$f_{X,Y}(x,y) = \left[-10.69 e^{-10.69(F_X(x)+F_Y(y))}(e^{-10.69}-1)\right] / \left[e^{-10.69(F_X(x)+F_Y(y))} - e^{-10.69F_X(x)} - e^{-10.69F_Y(y)} + e^{-10.69}\right]^2 \times \frac{1}{3.05} e^{-\frac{y}{3.05}} \times \frac{y^{-027}}{3.26^{.73}\Gamma(0.73)} e^{\frac{-y}{3.26}} \quad (۲)$$

است، که شکل (۴) نمودار آن را نمایش می‌دهد.

شکل شماره (۴)، رابطه همبستگی به شکل نمودار تابع چگالی توام بین مدت و شدت و احتمال رکود قرض‌الحسنه را نشان می‌دهد. همان‌طوری‌که ملاحظه می‌شود رابطه برآورد شده از نظر همبستگی مستقیم و مثبت است. در نتیجه با افزایش مدت و شدت رکود قرض‌الحسنه مقدار احتمال رکود قرض‌الحسنه نیز افزایش یافته و تا زمان افزایش مدت و شدت این جریان رکود ادامه خواهند داشت و به سمت معینی (یک) میل خواهند کرد و بالعکس. یعنی با کاهش مدت و شدت رکود قرض‌الحسنه احتمال نکول کاهش یافته و تا زمان کاهش همزمان مدت و شدت این جریان کاهشی نیز ادامه خواهند داشت و به سمت معینی (صفر) میل خواهند کرد.



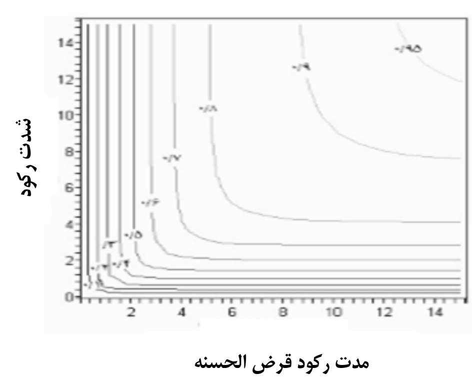
شکل۴: نمودار تابع چگالی‌ام مدت و شدت رکود قرض‌الحسنه

۴-۳. بررسی توزیع توام رکود قرض‌الحسنه

با استفاده از توزیع توام بین دو متغیر X و Y می‌توان اطلاعات مهمی درباره این رویداد به دست آورد، برای مثال احتمال وقوع یک رکود با مدت و شدت بیشتر از مقدار آستانه مشخص با توجه به تابع توزیع توام قابل حصول است. این احتمال در شرایط بحرانی اقتصادی نظیر (بحران کنونی ۱۶ ماه‌های اخیر منتهی به بهمن۱۳۹۴) باعث می‌شود این سوال در ذهن ایجاد گردد که چگونه مدیریت اعطای تسهیلات قرض‌الحسنه را می‌توان انجام داد؟ با استفاده از توابع توزیع حاشیه‌ای نمی‌توان چنین احتمالات و سایر اطلاعات در این مورد که در رابطه بین مدت و شدت متغیر مورد بحث است را به دست آورد، اما با استفاده از تابع مفصل و توابع توزیع حاشیه‌ای و جایگذاری در رابطه

$$\begin{aligned} &f_{X,Y}(x,y) \\ &=1-f_X(x)-f_Y(y)+P(X\geq x, Y\geq y) \\ &=1-f_X(x)-f_Y(y)+D(f_X(x), f_Y(y)) \end{aligned}$$

به راحتی می‌توان این احتمال را محاسبه نمود. به عنوان مثال یک رکود با مدت بیشتر از ۳ ماه و شدت بیشتر از ۲ بر اساس رابطه (۲) با احتمال ۰/۳۲ رخ می‌دهد. بعلاوه این مقدار را می‌توان به کمک تابع توزیع توام مدت و شدت رکود نیز به دست آورد،که نمودار خطوط تراز آن در شکل (۵) نمایش داده شده است.



شکل۵: نمودار خط تراز توزیع توام مدت و شدت رکود

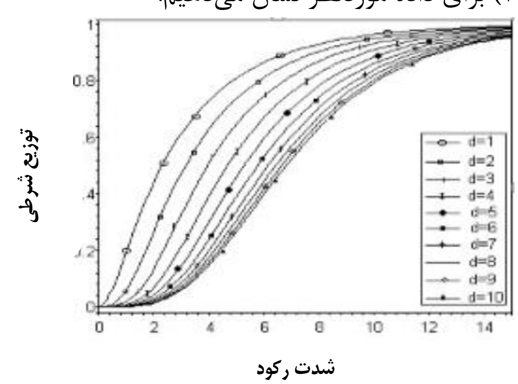
شکل شماره (۵)، رابطه همبستگی به شکل نمودار خط تراز بین مدت و شدت رکود قرض‌الحسنه را نشان می‌دهد. همان‌طوری‌که ملاحظه می‌شود رابطه برآورد شده از نظر همبستگی مستقیم و مثبت است. در نتیجه با افزایش مدت رکود قرض‌الحسنه احتمال شدت رکود نیز افزایش یافته و تا زمان افزایش مدت جریان افزایش شدت رکود نیز ادامه خواهند داشت و به سمت معینی (یک) میل خواهند کرد و بالعکس. یعنی با کاهش مدت رکود قرض‌الحسنه احتمال شدت رکود نیزکاهش یافته و تا زمان کاهش مدت جریان کاهش شدت رکود نیز ادامه خواهند داشت و به سمت معینی (صفر) میل خواهند کرد. شایان ذکر بوده که توابع توزیع شرطی را نیز می‌توان با استفاده از توابع مفصل تعیین و بر اساس آنها احتمال چگونگی تغییر یک عامل در قبال تغییرات کنترل شده عامل دیگر بحث نمود. توزیع شرطی شدت رکود برای مدت رکود بیشتر از آستانه X به صورت

$$\begin{aligned} P(X\geq x \mid Y\geq y) &= \frac{P(X\geq x, Y\geq y)}{P(X\geq x)} \\ &= \frac{F_Y(y)-D(F_X(x),F_Y(y))}{1-F_X(x)} \end{aligned}$$

و توزیع شرطی مدت رکود برای شدت رکود بیشتر از آستانه X به صورت

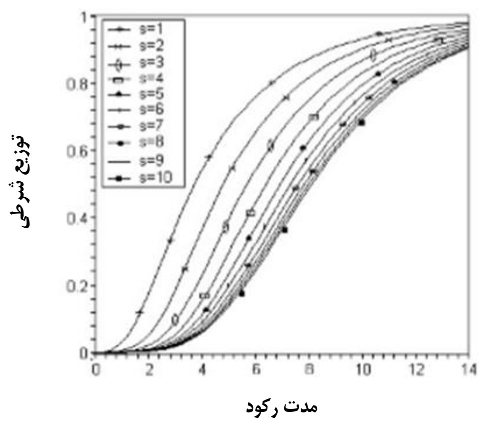
$$P(X\leq x \mid Y\geq y) = \frac{F_X(x)-D(F_X(x),F_Y(y))}{1-F_Y(y)}$$

به دست می‌آید. که نمودارهای آنها به ترتیب در شکل‌های (۶) و (۷) برای داده موردنظر نشان می‌دهیم.



شکل۶: نمودار توزیع شرطی شدت رکود برحسب مدت رکود بیشتر از آستانه

شکل شماره (۶)، رابطه همبستگی به شکل نمودار تابع توزیع شرطی شدت رکود بر حسب مدت رکود بیشتر از آستانه بین شدت رکود قرض‌الحسنه و توزیع شرطی را نشان می‌دهد. همان‌طوری‌که ملاحظه می‌شود رابطه برآورد شده از نظر همبستگی مستقیم و مثبت است. در نتیجه با افزایش شدت رکود قرض‌الحسنه احتمال رکود نیز به شکل توزیع شرطی افزایش یافته و تا زمان افزایش شدت رکود این جریان ادامه خواهند داشت و به سمت معینی (یک) میل خواهند کرد و بالعکس. یعنی با کاهش شدت رکود قرض‌الحسنه احتمال رکود نیز به شکل توزیع شرطی کاهش یافته و تا زمان کاهش شدت رکود این جریان ادامه خواهند داشت و به سمت معینی (صفر) میل خواهند کرد.



شکل۷: نمودار توزیع شرطی مدت رکود برحسب شدت رکود بیشتر از آستانه

شکل شماره (۷)، رابطه همبستگی به شکل نمودار تابع توزیع شرطی مدت رکود برحسب مدت رکود بیشتر از آستانه بین مدت رکود قرض‌الحسنه و توزیع شرطی را نشان می‌دهد. همان‌طوری‌که ملاحظه می‌شود رابطه برآورد شده از نظر همبستگی مستقیم و مثبت است. در نتیجه با افزایش مدت رکود قرض‌الحسنه احتمال نکول نیز به شکل توزیع شرطی افزایش یافته و تا زمان افزایش مدت رکود این جریان ادامه خواهند داشت و به سمت یک میل خواهند کرد و بالعکس. یعنی با کاهش مدت رکود قرض‌الحسنه احتمال رکود نیز به شکل توزیع شرطی کاهش یافته و تا زمان کاهش مدت رکود این جریان نیز ادامه خواهند داشت و به سمت معینی میل خواهند کرد.

۴-۴. دوره بازگشت رکود

اگر مدت زمان بین دو رکود را دوره بازگشت این پدیده در نظر گیریم در برخی شرایط ممکن است بین دو پدیده رکود بیش از یک‌سال و یا اینکه در یک‌سال چند پدیده رکود داشته باشیم. در مطالعات انجام شده برای پدیده‌های دیگر که مشمول دوره بازگشت می‌شوند، مدت یا شدت آنها را به صورت زیر محاسبه نموده‌اند.

$$T_X(x) = \frac{E(L)}{1-F_X(x)} \qquad (۳)$$

$$T_Y(x) = \frac{E(L)}{1-F_Y(y)} \qquad (۴)$$

در این روابط $E(L)$ مقدار متوسط زمان بین دو پدیده رکود قرض‌الحسنه است و از طریق مشاهدات قابل برآورد است.

جدول ۵: مقدار متوسط زمان بین دو رکود برای شهرستان‌های مورد نظر استان کرمانشاه

شهر	$E(L)$
کرمانشاه	.۷۰
اسلام آباد غرب	.۵۵
روانسر	.۵۴
سرپل ذهاب	.۶۴
گیلان غرب	.۵۸

با توجه به روابط (۳) و (۴) دوره بازگشت ۲ و ۵ و ۱۰ و ۲۰ و ۵۰ و ۱۰۰ ساله برای مدت و شدت رکود محاسبه شده که خلاصه نتایج در جدول (۶) ارائه شده‌اند.

جدول ۶: دوره بازگشت رکود بر اساس مدت و شدت رکود قرض-الحسنه

شدت رکود	مدت رکود	دوره تناوب
۱. ۴۲	۱. ۲۱	۲
۳. ۹۳	۳. ۷۱	۵
۵. ۹۱	۶. ۱۲	۱۰
۷. ۹۹	۸. ۲۴	۲۰
۱۰. ۷۶	۱۰. ۸۳	۵۰
۱۲ .۸۹	۱۳/ ۱۵	۱۰۰

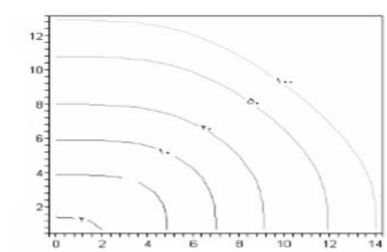
روابط (۳) و(۴) دوره بازگشت رکود قرض‌الحسنه را تنها برحسب یک عامل مشخص می‌کنند درحالی‌که می‌توان این پدیده را بر اساس دو عامل مدت و شدت رکود تواما تفسیر کرد. دوره بازگشت توام رکود برحسب مدت و شدت آن برای حالات $(X \geq x \,\text{and}\, Y \geq y)$ و $(X \geq x \,\text{or}\, Y \geq y)$ به صورت زیر را پیشنهاد می‌شود.

$$T_{XY}(x,y) = \frac{E(L)}{P(X \geq x \,\text{and}\, Y \geq y)}$$
$$= \frac{E(L)}{1 + F_{X,Y}(x,y) - F_X(x) - F_Y(y)}$$
$$= \frac{E(L)}{1 - F_X(x) - F_Y(y) + D(F_X(x), F_Y(y))}$$

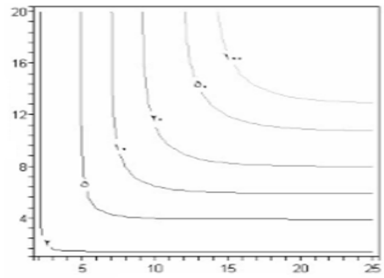
و

$$T'_{XY}(x,y) = \frac{E(L)}{P(X \geq x \,\text{or}\, Y \geq y)}$$
$$= \frac{E(L)}{1 - F_{X,Y}(x,y)}$$
$$= \frac{E(L)}{1 - D(F_X(x), F_Y(y))}$$

تعریف می‌شوند و نمودار آنها به ترتیب در شکل‌های (۸) و (۹) ارائه شده‌اند.



شکل۸: نمودار دوره بازگشت توام T_{XY}



شکل۹: نمودار دوره بازگشت توام T'_{XY}

اشکال شماره (۸) و (۹)، نمودار تابع توزیع دوره بازگشت توام T_{XY} و T'_{XY}، رکود قرض‌الحسنه را بر حسب سال نمایش می‌دهد. به‌طوری‌که در آن هر چه قدر شدت و مدت بیشتر باشد دوره بازگشت رکود قرض‌الحسنه برحسب سال طولانی‌تر خواهد شد و بالعکس. به عنوان مثال، اگر هر چه مدت رکود کمتر و شدت آن کمتر نیز باشد، دوره بازگشت رکود قرض‌الحسنه به سمت سال کمتر (به عنوان مثال ۲ ساله) میل خواهد نمود و هر چه قدر مدت و شدت رکود قرض‌الحسنه بیشتر باشد این دوره بازگشت طولانی‌تر و به سمت تعداد سال‌های بیشتری میل خواهد کرد (مثلا ۵ ساله و ۱۰ ساله و غیره).

۵. نتیجه‌گیری

توابع مفصل را می‌توان برای تعیین ساختار وابستگی متغیرهای تصادفی همبسته به کار گرفت. نتایج به دست آمده در این تحقیق بیانگر آن است که توابع مفصل ابزار مفیدی برای تعیین توزیع توام و ساختار وابستگی متغیرهای همبسته رکود هستند. در این مطالعه توزیع‌های دومتغیره توابع مفصل یک پارامتری مورد بحث و بررسی قرار گرفت اما می‌توان تکنیک‌های مطرح شده را برای توزیع‌ها چند متغیره نیز به کار گرفت مثلاً در این تحقیق می‌توان شدت مدت نرخ سود سپرده به عنوان یک تحقیق چند متغیره در نظر گرفت.

فهرست منابع

۱. قدیری اصلی، باقر،۱۳۶۶، کلیات علم اقتصاد. تهران: نشر سپهر. کتابخانه ومرکز اسناد علمی دانشگاه صنعتی امیرکبیر (شهید صبوری).

۲. توانایان فرد،حسن،۱۳۶۱، مکتب‌های اقتصادی، تهران: دانشگاه تهران، کتابخانه دانشکده جغرافیا.

۳. ماجدی، علی گلریز، حسن، ۱۳۷۷، پول و بانک از نظریه تا سیاست گذاری.تهران: انتشارات بانک مرکزی جمهوری اسلامی ایران، موسسه عالی بانکداری ایران.

۴. اثنی عشری، ابوالقاسم؛ ۱۳۸۸، برآورد تابع تقاضای پول درسپرده‌های قرض الحسنه بانکهای ایران، فصلنامه پژوهش‌ها و سیاست‌های اقتصادی، سال هفتم، شماره ۵۱، صص:۹۳-۱۰۴.

۵. غیاث،م،۱۳۹۳، مقدمه‌ای برروش شبیه سازی مونت کارلو، فصلنامه عملی-ترویجی بسپارش، سال چهارم، شماره۱، صص:۶۷-۷۷

۶. Cherubini, Umberto, Elisa Luciano, and Walter Vecchiato. *Copula methods in finance*. John Wiley & Sons, ۲۰۰٤.

۷. Chen, Lu, and Shenglian Guo. *Copulas and its application in hydrology and water resources*. Springer Singapore, ۲۰۱۹.

۸. Hofert, Marius, et al. *Elements of copula modeling with R*. Springer International Publishing, ۲۰۱۸.

۹. Badakhshan Farahabadi, Fazel, Kianoush Fathi Vajargah, and Rahman Farnoosh. "Dimension Reduction Big Data Using Recognition of Data Features Based on Copula Function and Principal Component Analysis." *Advances in Mathematical Physics* ۲۰۲۱ (۲۰۲۱).

۱۰. Nelsen, Roger B. *An introduction to copulas*. Springer Science & Business Media, ۲۰۰۷.

۱۱. Alsina, Claudi, Berthold Schweizer, and Maurice J. Frank. *Associative functions: triangular norms and copulas*. World Scientific, ۲۰۱۰.

۱۲. A.Wellner ,J, and D.Perlman, M,Squaring the Circle and Cubing the Sphere: circular and spherical copula, Department of statistical University of Washington ۳۰ December ۲۰۱۰

۱۳. Bee,M,Simulating Copula- based distribution and estimation tail probabilities by means of adaptive, Importance Sampling ,۳/۲۰۱۰

۱۴. Di Roma, B, and Tupini, V, ‘Applying Copula Function to risk managment’,۱۸-۱۱٤ Roma,Italy.

۱۵. Fortiana, J, Simulation of High- Dimensinal t-student Copulas with a Given Block Correlation Matrix, A procedure for simulation with contracted copulas, May ۲۰۰۷.

۱۶. Malgrat, M , Pricing of a ”worst of” option using a copula method Royal Institute of Technology School of Engineering Sciences WPS(Depr):٤/۲۰۱

۱۷. Roy, I, ‘Estimation of Portfolio Value at risk using Copula’, Department of Economic and policy Research, April ۲۰۱۱.

۱۸. Yan, J, ‘Enjoy the Joy of copulas: with a packing copula’, Journal of Statistical Software, October ۲۰۰۷,Valume ۲۱ Issue ٤.