دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره سی و ششم، خرداد و تیر ۱۴۰۱
شماره شاپا: ۵۸۸-۲۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

نمایش گروهوار لی مضاعف

محمدرضا فرهنگ دوست[1*]، صادق مرآتی

[۱و۲] گروه ریاضی، دانشکده علوم، دانشگاه شیراز، کد پستی ۷۱۴۷۵-۴۴۷۷۶، شیراز، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۹/۱۱/۱۷ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۳/۰۱

چکیده

در این مقاله مفهوم VB-گروهوار دوگانه و نمایش گروهوارهای مضاعف را با استفاده از مفاهیم کلاف برداری در رسته گروهوارها یا گروهوار در رسته کلاف‌های برداری، معرفی می‌کنیم. هر VB-گروهوار دوگانه، به عنوان یک کلاف برداری دوگانه در رسته گروهوارهای لی است. منظور ما از یک کلاف برداری دوگانه یک خمینه با دو ساختار کلاف برداری بر روی دو خمینه دیگر است. مفهوم نمایش گروهوارهای لی مضاعف و چند ویژگی اساسی آن را به عنوان هم‌زنجیرهای کوهمولوژی هموار گروهوارها مطالعه می کنیم. می‌توانیم نشان دهیم که تناظر یک به یک بین نمایش از یک گروهوار لی مضاعف و دو عملگر درجه یک پیوسته که در همانی مدرج لایبنیتز صدق کرده، فضای هم‌زنجیرهای به هنجار را حفظ کرده و مربعشان صفر است، وجود دارد. چند ویژگی و چند مثال از VB-گروهوار دوگانه را مطالعه کرده و سپس نشان خواهیم داد هر نمایش از یک گروهوار لی مضاعف، یک ساختار VB-گروهوار دوگانه روی عمل گروهوارشان القا می‌کند.

واژه‌های کلیدی: گروهوار لی مضاعف، جبروار لی مضاعف، نظریه نمایش، کلاف برداری دوگانه.

* عهده‌دار مکاتبات: Email: farhang@shirazu.ac.ir

۱-مقدمه

VB-گروهوارها توسط Pradines در [1] معرفی شده است و نقش مهمی در نظریه گروهوارهای لی و گروهوارهای لی مضاعف ایفا می‌کند. Gracia-Saz و Mehta در [2] از این ساختار برای مطالعه نظریه نمایش گروهوارهای لی استفاده کرده‌اند.

نمایش طیف گسترده‌ای از ساختارهای لی به علت کاربردهای وسیع آن در ریاضی و فیزیک مورد استقبال محققان زیادی قرار گرفته است. ما بیشتر نمایش جبروارهای هوم-لی را معرفی و مطالعه کرده‌ایم. [3][4]

مفاهیم نمایش گروهوارهای لی مضاعف و VB-گروهوار دوگانه را شرح می‌دهیم. یک کلاف برداری دوگانه $A \leftarrow E \rightarrow B$ یک خمینه به همراه دو ساختار کلاف برداری روی دو خمینه A و B است. یک VB-گروهوار دوگانه را می‌توان به عنوان یک شی کلاف برداری دوگانه در رسته گروهوارهای لی تعریف نمود.

در ابتدا چند مفهوم از کوهمولوژی گروهوارهای لی را که توسط C. Arias Abad و M. Crainic در [5] مورد مطالعه قرار گرفته است را یادآوری می‌کنیم.

فرض کنید $G \rightrightarrows M$ یک گروهوار لی با نگاشت هدف t و نگاشت منبع s باشد. اگر $G^{(0)} = M$ و ی G باشد، یعنی

$$G^{(p)} = \{(g_1.\cdots.g_p): s(g_i) = t(g_{i+1}), \qquad i = 1,2,\cdots,p-1\}$$

یک عملگر هم‌مرز $\sigma: G^{(p)} \rightarrow G^{(p+1)}$ روی فضای توابع هموار حقیقی مقدار $C^{\infty}(G^{(p)})$ که با $C^p(G)$ نمایش می‌دهیم وجود دارد، به طوری که برای $p = 0$، اگر $g \in G$ و $f \in C^0(G) = C^{\infty}(M)$ آنگاه

$$\sigma f(g) = f(s(g)) - f(t(g)).$$

و برای $p > 0$

$$\sigma f(g_0.\cdots.g_p) = f(g_1.\cdots.g_p) + \sum_{i=1}^{p}(-1)^i f(g_0.\cdots.g_{i-1}g_i.\cdots.g_p) + (-1)^{p+1} f(g_0.\cdots.g_{p-1})$$

که $f \in C^p(G)$ و $(g_0.\cdots.g_p) \in G^{p+1}$.
می‌دانیم که $\sigma^2 = 0$ و مجتمع $(C^{\bullet}(G).\sigma)$ به عنوان کوهمولوژی گروهوارهای هموار شناخته می‌شود. برای کلاف برداری $E \rightarrow M$ فضای p-هم زنجیرهای گروهوار هموار با مقادیر در E به صورت

$$C^p(G;E) = \Gamma\left(\left(\pi_0^p\right)^* E\right)$$

تعریف می‌شود، به طوری که $\pi_0^p: G^{(p)} \rightarrow M$ برای $p = 0$ همانی است و $\pi_0^p(g_1.\cdots.g_p) = t(g_1)$ برای $p > 0$. [2] [5]

تعریف ۱-۱: هم-زنجیر E مقدار، به هنجار نامیده می‌شود، اگر در صورت همانی بودن حداقل یکی از مولفه‌هایش صفر شود.

برای کلاف‌های برداری E و F روی M فضای p-هم‌زنجیرهای تبدیل از E به F، به صورت زیر تعریف می‌شود

$$C^p(G;E \rightarrow F) := \Gamma\left(Hom\left(\left(\pi_p^p\right)^* E.\left(\pi_0^p\right)^* F\right)\right)$$

به طوری که $\pi_p^p: G^{(p)} \rightarrow M$ برای $p = 0$ همانی است و $\pi_p^p(g_1.\cdots.g_p) = s(g_p)$، برای $p > 0$.
به عبارت دیگر اگر $\omega \in C^p(G;E \rightarrow F)$ و $(g_1.\cdots.g_p) \in G^{(p)}$، آنگاه $\omega(g_1.\cdots.g_p)$ یک نگاشت خطی از $E_{s(g_p)}$ به $F_{t(g_1)}$ است.
به ازای هر p-هم‌زنجیر تبدیل

$$\omega \in C^p(G;E \rightarrow F)$$

و $\epsilon \in \Gamma(E) = C^0(G;E)$ یک p-هم زنجیر $\widehat{\omega}(\epsilon) \in C^p(G;F)$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

برای $p > 0$، خمینه $G^{(p)}$ شامل تمام p تایی‌های ترکیب شدنی از اعضا

$$\widehat{\omega}(\epsilon)(g_1.\cdots.g_p) = \omega(g_1.\cdots.g_p)\left(\epsilon_{s(g_p)}\right) \in F_{t(g_1)}.$$

گزاره ۱-۲: نگاشت $\epsilon \mapsto \widehat{\omega}(\epsilon)$ را می‌توان به یک همریختی $C(G)$-مدول یکتای

$$\widehat{\omega}: C^{\bullet}(G;E) \to C^{\bullet+p}(G;F)$$

گسترش داد.

فرض کنید ρ^E و ρ^F نمایش‌های G بر روی E و F (به ترتیب) باشند. یک دیفرانسیل روی $C(G;E \to F)$ به صورت زیر قابل تعریف است.

$$D\omega(g_0.\cdots.g_p) = \rho^F_{g_0} \circ \omega(g_1.\cdots.g_p) + \sum_{i=1}^{p}(-1)^i \omega(g_0.\cdots.g_{i-1}g_i.\cdots.g_p) + (-1)^{p+1}\omega(g_0.\cdots.g_{p-1}) \circ \rho^E_{g_p}$$

اگر $E \to M$ یک کلاف برداری باشد، یک رسته فریم $\mathcal{C}(E)$، رسته‌ای است که مجموعه اشیاء آن M و ریخت‌های آن، به ازای هر $x.y \in M$ نگاشت-های خطی از E_x به E_y است. رسته فریم یک رسته لی است که فریم گروهوار یک زیر رسته آن است.

مثال ۱-۳: گروهوار $G = S^2 \times S^2 \rightrightarrows S^2$ و کلاف برداری $E = TS^2$ را در نظر بگیرید. برای هر $(y.x) \in S^2 \times S^2$، نگاشت

$$\Delta_{(y.x)}: T_xS^2 \to T_yS^2$$

را به شکلی تعریف می‌کنیم که اگر x و y هم قطر باشند مقدار این نگاشت صفر باشد و در غیر این صورت به وسیله انتقال موازی در طول کوتاه ترین ژئوزیک از x به y، به همراه ضرب اسکالر در $(1 + \cos(d(x.y)))/2$ تعریف می‌شود. نگاشت $(y.x) \mapsto \Delta_{(y.x)}$، نگاشتی از G به $\mathcal{C}(G)$ است.

هر نگاشت هموار از G به $\mathcal{C}(E)$ را یک عمل کوازی می‌نامیم.

تعریف ۱-۴: دیاگرام زیر را در نظر بگیرید

$$\begin{tikzcd} \Gamma \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ G \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & M \end{tikzcd}$$

که $\Gamma \rightrightarrows E$ یک گروهوار لی (به همراه نگاشت‌های مبدا، مقصد ،ضرب ،همانی و وارون $\tilde{s}$، $\tilde{t}$، $\widetilde{m}$، $\tilde{1}$ و $\tilde{\imath}$، به ترتیب)، $G \rightrightarrows M$ یک گروهوار لی (به همراه نگاشت‌های مبدا، مقصد، ضرب، همانی و وارون s، t، m، 1 و i ، به ترتیب)، $\Gamma \to G$ یک کلاف برداری (با نگاشت تصویر و برش صفر $\tilde{q}$ و $\tilde{0}$)، $E \to M$ یک کلاف بردار (به ترتیب با نگاشت تصویر و برش صفر q و 0) باشد و

$$q\tilde{s} = s\tilde{q}$$

و

$$q\tilde{t} = t\tilde{q}.$$

این دیاگرام یک VB-گروهوار است اگر

الف. $(\tilde{s}.s)$ یک همریختی کلاف‌های برداری باشد.

ب. $(\tilde{t}.t)$ یک همریختی کلاف‌های برداری باشد.

پ. $(\tilde{q}.q)$ یک همریختی گروهوار لی باشد.

ت. برای هر $(\gamma_1.\gamma_2) \in \Gamma^{(2)}$ و $(\gamma_3.\gamma_4) \in \Gamma^{(2)}$ به طوری که $\tilde{q}(\gamma_1) = \tilde{q}(\gamma_3)$ و $\tilde{q}(\gamma_2) = \tilde{q}(\gamma_4)$ داشته باشیم

$$(\gamma_1 + \gamma_3)(\gamma_2 + \gamma_4) = \gamma_1\gamma_2 + \gamma_3\gamma_4.$$

مثال ۱-۵: اگر $G \rightrightarrows M$ یک گروهوار لی باشد. آنگاه گروهوار لی $TG \rightrightarrows TM$ یک ساختار VB-گروهوار تشکیل خواهد داد.

در حقیقت می‌توان نشان داد که مفاهیم VB-گروهوار، شی گروهوار لی در رسته کلاف‌های برداری و شی کلاف برداری در رسته گروهوارهای لی معادلند.

۲- گروهوار مضاعف

مربع

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "t_B"] \arrow[r, shift right, "s_B"'] \arrow[d, shift right, "t_C"'] \arrow[d, shift left, "s_C"] & B \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "t"] \\ C \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] & D \end{tikzcd}$$

را یک گروهوار مضاعف گوییم اگر در شرایط زیر صدق کند:

۱. نگاشت‌های هدف و منبع عمودی و افقی با یکدیگر جابه‌جا شوند. یعنی

$$s \circ s_B = s \circ s_C,$$
$$t \circ t_C = t \circ t_B,$$
$$t \circ s_C = s \circ t_B,$$
$$s \circ t_C = t \circ s_B.$$

۲. نگاشت‌های هدف و منبع بر روی ضرب‌ها پخش شوند. یعنی

$$s_B(\alpha_1 \cdot_C \alpha_2) = (s_B\alpha_1) \cdot (s_B\alpha_2),$$
$$t_B(\alpha_1 \cdot_C \alpha_2) = (t_B\alpha_1) \cdot (t_B\alpha_2),$$
$$s_C(\alpha_1 \cdot_B \alpha_3) = (s_C\alpha_1) \cdot (s_C\alpha_3),$$
$$t_C(\alpha_1 \cdot_B \alpha_3) = (t_C\alpha_1) \cdot (t_C\alpha_3),$$

که $\alpha_i \in A$ به طوری که $s_C\alpha_1 = t_C\alpha_2$ و $s_B\alpha_1 = t_B\alpha_3$.

۳. قانون مبادله برای هر $\alpha_{11}.\alpha_{12}.\alpha_{21}.\alpha_{22} \in A$، که برای $i = 1,2$، $s_B\alpha_{i1} = t_B\alpha_{i2}$ و $s_C\alpha_{1i} = t_C\alpha_{2i}$ برقرار باشد. یعنی

$$(\alpha_{11} \cdot_C \alpha_{12}) \cdot_B (\alpha_{21} \cdot_C \alpha_{22}) =$$
$$(\alpha_{11} \cdot_B \alpha_{21}) \cdot_C (\alpha_{12} \cdot_B \alpha_{22})$$

۴. نگاشت منبع-مضاعف $(s_B.s_C): A \to B\ {}_s\times_s C$ سابمرشن باشد.

ملاحظه ۲-۱: در تعریف گروهوار مضاعف در [6]، نگاشت منبع مضاعف باید علاوه بر سابمرشن بودن، پوشا نیز باشد. اما Stefanini در [7] نشان داد که این پوشا بودن نقش خاصی در تعریف گروهوار مضاعف بازی نمی‌کند.

تعریف ۲-۲: یک کوهمولوژی هموار گروهوار مضاعف برای گروهوار لی مضاعف بالا، دو کوهمولوژی هموار گروهوار به شکل زیر و به همراه

$$\begin{tikzcd} & C^\infty(C) \arrow[d] & & \\ C^\infty(B) \arrow[r] & C^\infty(A) \arrow[r] \arrow[d] & C^2_B(A) \arrow[r] & \cdots \\ & C^2_C(A) \arrow[d] & & \\ & \vdots & & \end{tikzcd}$$

دو عمل هم مرزی σ_B و σ_C است.

گزاره ۲-۳: فرض کنید E یک کلاف برداری دوگانه روی B و C باشد. یک ساختار $C_B(A)$-مدول راست روی $C_B(A.E)$ و یک ساختار $C_C(A)$-مدول راست روی $C_C(A.E)$ وجود دارد.

اثبات: کافی است برای $\omega \in C_I^p(A.E)$ و $f \in C_I^q(A)$، که $I \in \{B.C\}$ تعریف کنیم

الف. اگر $p.q > 0$، آنگاه

$$(\omega \star f)(g_1.\cdots.g_{p+q}) \coloneqq$$
$$\omega(g_1.\cdots.g_p)f(g_{p+1}.\cdots.g_{p+q}).$$

ب. اگر $p = 0$، آنگاه

$$(\omega \star f)(g_1.\cdots.g_q) \coloneqq$$
$$\omega(t(g_1))f(g_1.\cdots.g_q).$$

پ. اگر $q = 0$، آنگاه

$(\omega \star f)(g_1.\cdots.g_p) :=$
$\omega(g_1.\cdots.g_p) f\left(s(g_p)\right)$ □

۳- نمایش گروهوارهای مضاعف

اکنون مفهوم نمایش را برای گروهوارهای مضاعف تعریف خواهیم کرد.

تعریف ۳-۱: یک نمایش از گروهوار لی مضاعف (تعریف شده در بخش ۲) یک کلاف برداری دوگانه E روی B و C، به همراه همریختی گروهوارهای لی مضاعف $(\rho.Id_B.Id_C.Id_D)$ است که ρ نگاشتی از A به $Gl_B(E) \times Gl_C(E)$ است.

فرض کنید ρ یک نمایش از گروهوار لی مضاعف بر روی کلاف برداری دوگانه E باشد. می‌توان دو عملگر درجه ۱ Δ_B و Δ_C به ترتیب روی $C_B(A.E)$ و $C_C(A.E)$ تعریف کرد، به طوری که عمل آنها بر روی ۰-فرم‌ها، برای $I \in \{B.C\}$، $x \in \Gamma_I(E)$ و $g \in A$ به صورت زیر است

$$(\Delta_I x)(g) := \pi_I \circ \rho_g x_{s_I(g)} - x_{t_I(g)}.$$

و عمل آنها بر روی $p > 0$-فرم‌ها، $I \in \{B.C\}$، $\omega \in C_I(A.E)$ و $g_i \in A$ به صورت زیر است

$$\Delta_I \omega(g_0.\cdots.g_p) := (\pi_I \circ \rho)_{g_0} \omega(g_1.\cdots.g_p) + \sum_{k=1}^{p} (-1)^k \omega(g_0.\cdots.g_{k-1}g_k.\cdots.g_p) + (-1)^{p+1} \omega(g_0.\cdots.g_{p-1}).$$

به سادگی می‌توان نشان داد که $\Delta_B^2 = \Delta_C^2 = 0$.

لم ۳-۲: برای $I \in \{B.C\}$، عملگر Δ_I در این همانی لایبنیتز مدرج صدق می‌کند، یعنی برای هر $\omega \in C_I^p(A.E)$ و $f \in C_I^q(A.E)$.

$$\Delta_I(\omega \star f) = (\Delta_I \omega) \star f + (-1)^p \omega \star (\sigma_I f).$$

اثبات: فرض کنید $I \in \{B.C\}$ و $(g_0.g_1.\cdots.g_{p+q+1}) \in A^{(p+q+1)}$

$$\begin{aligned}
(\Delta_I(\omega \star f))(g_0.\cdots.g_{p+q}) &= (\pi_I \circ \rho)_{g_0}(\omega(g_1.\cdots.g_p) f(g_{p+1}.\cdots.g_{p+q})) \\
&+ \sum_{k=1}^{p} (-1)^k \omega(g_0.\cdots.g_{k-1}g_k.\cdots.g_p) \cdot f(g_{p+1}.\cdots.g_{p+q}) \\
&+ \sum_{k=p+1}^{p+q} (-1)^k \omega(g_0.\cdots.g_{p-1}) \cdot f(g_p.\cdots.g_{k-1}g_k.\cdots.g_{p+q}) \\
&+ (-1)^p \omega(g_0.\cdots.g_{p-1}) f(g_{p+1}.\cdots.g_{p+q}) \\
&- (-1)^p \omega(g_0.\cdots.g_{p-1}) f(g_{p+1}.\cdots.g_{p+q}) \\
&+ (-1)^{p+q+1} \omega(g_0.\cdots.g_{p-1}) f(g_p.\cdots.g_{p+q-1}) \\
&= (\Delta_I \omega)(g_0.\cdots.g_p) f(g_{p+1}.\cdots.g_{p+q}) \\
&+ (-1)^p \omega(g_0.\cdots.g_{p-1})(\sigma_I f)(g_p.\cdots.g_{p+q}).
\end{aligned}$$

کوهمولوژی مجتمع مضاعف

$$\begin{tikzcd}
 & \Gamma_C(E) \arrow[d] & & \\
\Gamma_B(E) \arrow[r] & C^\infty(A;E) \arrow[r] \arrow[d] & C^2_B(A;E) \arrow[r] & \cdots \\
 & C^2_C(A;E) \arrow[d] & & \\
 & \vdots & &
\end{tikzcd}$$

کوهمولوژی هموار گروهوار مضاعف برای گروهوار لی مضاعف A با مقدار در E است. اگر E کلاف برداری بدیهی $\mathbb{R} \times (B \times C)$ با نمایش بدیهی باشد، این تعریف با تعریف ۲-۲ یکی است.

لم ۳-۳: برای هر $I \in \{B.C\}$ فضای هم‌زنجیرهای به هنجار در $C_I(A.E)$ تحت عمل Δ_I بسته است. همچنین اگر $\omega \in C_I(A.E)$ و $f \in C_I(A)$ به هنجار باشند، $\omega \star f$ نیز به هنجار خواهد بود.

اثبات: فرض کنید $I \in \{B.C\}$ و $\omega \in C_I(A.E)$ یک p-هم‌زنجیر به هنجار باشد و $(g_0.g_1.\cdots.g_p) \in A^{p+1}$.

اگر $g_0 = 1_{t_I}(g_1)$، آنگاه

$$(\Delta_I\omega)(g_0.\cdots.g_p) = f(g_1.\cdots.g_p) - f(g_0g_1.\cdots.g_p) = f(g_1.\cdots.g_p) - f(g_1.\cdots.g_p) = 0.$$

اگر $0 < k < p$ و $g_k = 1_{t_I}(g_{k+1})$، آنگاه

$$(\Delta_I\omega)(g_0.\cdots.g_p) = (-1)^k\omega(g_0.\cdots.g_{k-1}g_k.\cdots.g_p) + (-1)^{k+1}\omega(g_0.\cdots.g_{k-1}g_k.\cdots.g_p) = 0.$$

اگر $g_p = 1_{s_I}(g_{p-1})$، آنگاه

$$(\Delta_I\omega)(g_0.\cdots.g_p) = (-1)^p\omega(g_0.\cdots.g_{p-1}) + (-1)^{p+1}\omega(g_0.\cdots.g_{p-1}) = 0$$

فرض کنید $\omega \in C_I(A.E)$ و $f \in C_I(A)$.

اگر $p.q > 0$ و برای $1 \le i \le p+q$، g_i همانی باشد. دو حالت داریم، اگر $1 \le i \le p$، آنگاه

$$(\omega \star f)(g_1.\cdots.g_{p+q}) = \omega(g_1.\cdots.g_p)f(g_{p+1}.\cdots.g_{p+q}) = 0 \cdot f(g_{p+1}.\cdots.g_{p+q}) = 0$$

اگر $p+1 \le i \le p+q$ آنگاه

$$(\omega \star f)(g_1.\cdots.g_{p+q}) = \omega(g_1.\cdots.g_p)f(g_{p+1}.\cdots.g_{p+q}) = \omega(g_1.\cdots.g_p) \cdot 0 = 0.$$

اگر $p = 0$ یا $q = 0$ نیز به همین ترتیب و با استفاده از تعریف اثبات می‌شود.□

بنابراین می‌توان گفت

قضیه ۳-۴: یک تناظر یک به یک بین نمایش‌های گروهوار لی A روی E و عملگرهای پیوسته درجه ۱ Δ_B و Δ_C، به ترتیب روی $C_B(A.E)$ و $C_C(A.E)$ که در این‌همانی لایبنیتز مدرج صدق کند، فضای هم‌زنجیرهای به هنجار را حفظ می‌کنند و $\Delta_B^2 = \Delta_C^2 = 0$ وجود دارد.

۴- VB-گروهوار دوگانه

VB-گروهوار دوگانه، به عنوان یک کلاف برداری دوگانه در رسته گروهوارهای لی است.

تعریف ۴-۱: یک VB-گروهوار دوگانه شامل سه گروهوار $\Gamma \rightrightarrows E$، $A \rightrightarrows B$ و $G \rightrightarrows M$ و کلاف‌های برداری دوگانه $B \leftarrow E \rightarrow M$ و $A \leftarrow \Gamma \rightarrow G$ که نمودار زیر را تشکیل می‌دهند.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "t_A"] \arrow[r, shift right, "s_A"'] & B \\
\Gamma \arrow[u, "\tilde{q}_A"] \arrow[d, "\tilde{q}_G"'] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & E \arrow[u, "q_B"'] \arrow[d, "q_M"] \\
G \arrow[r, shift left, "t_G"] \arrow[r, shift right, "s_G"'] & M
\end{tikzcd}$$

مثال ۴-۲: اگر A گروهوار لی مضاعف تعریف شده در بخش ۲ باشد و E یک کلاف برداری دوگانه رو B و C. گروهوار لی مضاعف $\Gamma \rightrightarrows E$ دو ساختار VB-گروهوار بر روی $A \rightrightarrows B$ و $A \rightrightarrows C$ تشکیل می‌دهد، که ساختار VB-گروهوار دوگانه زیر را تشکیل می‌دهد.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & B \\
\Gamma \arrow[u, "\tilde{q}"] \arrow[d, "\tilde{q}"'] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & E \arrow[u, "q_B"'] \arrow[d, "q_C"] \\
A \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & C
\end{tikzcd}$$

مثال ۴-۳: فرض کنید A گروهوار لی مضاعف تعریف شده در بخش ۲ باشد و $E \to B$، $F \to C$ و $\Gamma \to A$ کلاف‌های برداری باشند. اگر Γ دارای دو ساختار گروهوار لی بر روی E و F باشد که $\Gamma \rightrightarrows E$ و $\Gamma \rightrightarrows F$ به ترتیب دو VB-گروهوار لی بر روی $A \rightrightarrows B$ و $A \rightrightarrows C$ باشند. آنگاه

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & B \\
\Gamma\times\Gamma \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & E\times F \arrow[u] \arrow[d] \\
A \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & C
\end{tikzcd}$$

یک VB-گروهوار دوگانه است.

قضیه ۴-۴: اگر Γ، VB-گروهوار مثال ۴-۲ باشد آنگاه برای هر $b\in B$ و $c\in C$،

$$E_b\cap E_c = s\left(\bigcup_{x\in s^{-1}(b)\cap s^{-1}(c)}\Gamma_x\right).$$

اثبات: فرض کنید $t\in E_b\cap E_c$ و $s(y)=t$. بنابراین

$$s_B\circ\tilde{q}(y)=q_B\circ s(y)=b$$

و

$$s_C\circ\ \tilde{q}(y)=q_C\circ s(y)=c.$$

بنابراین $\tilde{q}(y)\in s_B^{-1}(b)\cap s_C^{-1}(c)$. برعکس اگر $t\in s\left(\bigcup_{x\in s^{-1}(b)\cap s^{-1}(c)}\Gamma_x\right)$ آنگاه $x\in s^{-1}(b)\cap s^{-1}(c)$ هست که $\tilde{q}(y)=x$ و $t=s(y)$. آنگاه

$$q_B(t)=q_B\circ s(y)=s_B\circ\tilde{q}(y)= s_B(x)=b$$

و

$$q_C(t)=q_C\circ s(y)=S_C\circ\tilde{q}(y)= s_C(x)=c.$$

بنابراین $t\in E_b\cap E_c$.□

قضیه ۴-۵: فرض کنید Γ، VB-گروهوار دوگانه مثال ۴-۲ باشد، به ازای هر $g\in A$،

$$s(\Gamma_g)\subseteq E_{s_B(g)}\cap E_{s_C(g)}.$$

اثبات: فرض کنید $x\in s(\Gamma_g)$، بنابراین $\gamma\in\Gamma$ هست که $\tilde{q}(\gamma)=g$ و $s(\gamma)=x$. همچنین

$$s_B(g)=s_B\big(\tilde{q}(\gamma)\big)=q_B\big(s(\gamma)\big)=q_B(x).$$

و

$$s_C(g)=s_C\big(\tilde{q}(\gamma)\big)=q_C\big(s(\gamma)\big)=q_C(x).$$

بنابراین $s\in E_{s_B(g)}\cap E_{s_C(g)}$.□

بلافاصله می‌توان نتیجه گرفت

نتیجه ۴-۶: اگر Γ، VB-گروهوار مثال ۴-۲ باشد آنگاه به ازای هر $g\in A$، آنگاه

$$E_{s_B(g)}\cap E_{s_C(g)}\neq\emptyset.$$

قضیه ۴-۷: فرض کنید کلاف برداری دوگانه E یک نمایش از گروهوار لی مضاعف A باشد. گروهوار عمل متناظر با آن، یک VB-گروهوار لی دوگانه روی $A\rightrightarrows B$ و $A\rightrightarrows C$ است.

اثبات: کافی است تعریف کنیم

$$\Gamma=(A\times_B B)\times(A\times_C C).$$

Γ یک گروهوار لی بر روی $E\times E$ خواهد بود که در تعریف VB-گروهوار دوگانه روی $A\rightrightarrows B$ و $A\rightrightarrows C$ است.

فهرست منابع

[1] J. Pradines, Remarque sur le groupoıde cotangent de Weinstein-Dazord, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math.*, pp. 557-560, 1988.

[2] A. Garcia-Saz and R. A. Mehta., VB-groupoids and representation theory of Lie groupoids., *J. Symplect. Geom.*, vol. 15, no. 3, pp. 741-783, 2017.

[3] S. Merati and M. R. Farhangdoost, Representation up to homotopy of hom-Lie algebroids, *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, vol. 15, no. 5, pp. 1850074, 2018.

[4] S. Merati and M. R. Farhangdoost, Representation and central extension of hom-Lie algebroids, *J. Algebra Appl.*, vol. 17, no. 11, pp. 185219, 2018.

[5] C. A. Abad and M. Crainic., Representation up to homotopy and Bott's sequnce for Lie groupoids, *Adv. Math.*, vol. 248, pp. 416-452, 2013.

[6] K. C. H. Mackenzie., Double Lie algebroids and second-order geometry. I, *Adv. Math.*, vol. 94, no. 2, pp. 180-239, 1992.

[7] L. Stefanini., On the integration of LA-groupoids and duality for Poisson groupoids, *Travaux mathe'matiques. Fascicule XVII, Universite' du Luxembourg*, pp. 39-59, 2007.