دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هفتم، شماره سی و دوم، مهر و آبان ۱۴۰۰
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات　　　　پژوهش‌های نوین در ریاضی

هر دنباله غیر صعودی از اعداد نا منفی می تواند منحنی همگرایی روش DGMRES باشد

ملیحه صفرزاده[۱]، حسین صادقی گوغری[۲*]

[(۱و۲)] گروه ریاضی، واحد کرمان، دانشگاه آزاد اسلامی، کرمان، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۱۱/۱۷　　تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۰۶/۰۲

چکیده

بررسی همگرایی روش‌های زیر فضای کرایلف یکی از مو ضوعات مورد علاقه در زمینه جبر خطی عددی است. با توجه به اینکه روش $DGMRES$ یک روش زیر فضای کرایلف بوده و در زمینه همگرایی آن کارهای زیادی انجام نشده است. در این مقاله به این موضوع پرداخته خواهد شد. ما نشان می‌دهیم که برای هر دنباله غیر صعودی از اعداد نا منفی $f(0) \geq f(1) \geq \cdots \geq f(m-1) > f(m) = \cdots = f(n) = 0$ مجموعه $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m, 0, \dots, 0\}$ از اعداد مختلط و همین طور عدد دلخواه $\alpha \leq n-m$ می‌توان دستگاه معادلات خطی منفرد $n \times n$، $Ax = b$ با اندیس α و مجموعه $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m, 0, \dots, 0\}$ به عنوان طیف ماتریس A را طوری ساخت که اگر از روش $DGMRES$ برای حل این دستگاه استفاده شود، با فرض $\|A^\alpha r_0\|_2 = f(0)$، برای $k = 1, \dots, m-1$ نرم بردار مانده مرحله k- ام، $\|A^\alpha r_k\|_2 = f(k)$ شود، که در آن $r_0 = b - Ax_0$ بردار مانده آغازین می‌باشد. سعی ما در این کار ساخت کامل ماتریس ضرایب دستگاه (دستگاه‌های) مورد نظر است.

واژه‌های کلیدی: دستگاه معادلات خطی منفرد، شاخص، معکوس درازین، بردار مانده.

*. عهده دار مکاتبات: Email:hsadeghi31@yahoo.com (hsadeghi@iauk.ac.ir)

۱. مقدمه

فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. اندیس ماتریس A را با $ind(A)$ نشان می‌دهیم که برابر با اندازه بزرگترین بلوک ژوردان متناظر با مقدار ویژه صفر ماتریس A است. واضح است که اگر ماتریس A نامنفرد باشد آنگاه $ind(A) = 0$ و اگر ماتریس A نرمال و منفرد باشد آنگاه $ind(A) = 1$.

فرض کنید $b \in \mathbb{C}^n$، دستگاه معادلات خطی $\mathrm{Ax} = \mathrm{b}$ را منفرد گوییم هرگاه ماتریس ضرایب A منفرد باشد به عبارت دیگر $ind(A) > 0$.

فرض کنید $ind(A) = \alpha$. در این صورت $\mathbb{C}^n$ را می‌توان به صورت جمع مستقیم فضای برد ماتریس A^α و فضای پوچ ماتریس A^α نوشت [1].

ماتریس A^D را معکوس درازین ماتریس A گوییم هرگاه شرایط زیر را دارا باشد [2].

$$A^{\alpha+1}A^D = A^\alpha \ , A^D A A^D = A^D \ , AA^D = A^D A$$

در صورتی که ماتریس A نامنفرد باشد $A^D = A^{-1}$. ماتریس A^D را می‌توان به صورت یک چند جمله‌ای بر حسب ماتریس A بیان کرد [2].

فرض کنید $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$، $v \in \mathbb{C}^n$ و $k,n \in \mathbb{Z}^+$

$$\mathcal{K}_k(B,v) = span\{v, Bv, \dots, B^{k-1}v\}$$

را زیر فضای کرایلف k- ام تولید شده توسط B و v می‌نامیم.

اولین بار سعد[2] در مقاله‌ای که در سال ۱۹۸۱ به چاپ رساند از زیر فضای کرایلف برای حل دستگاه معادلات خطی در حالت خاص استفاده کرد [2]. از مهمترین روش‌های زیر فضای کرایلف، روش GMRES است که اولین بار توسط سعد و شولتز[3] در سال ۱۹۸۶ ارائه شد [3].

این روش، در صورتی که ماتریس ضرایب دستگاه نامنفرد باشد خوش تعریف خواهد بود.

سیدی[4] در سال ۲۰۰۱ یک پیاده‌سازی شبیه روش GMRES برای حل دستگاه معادلات خطی منفرد ارائه داده است[4] . این روش از نظر پایداری عددی و اقتصادی بودن از دیدگاه محاسباتی و میزان حافظه مصرفی شبیه روش GMRES است و چون دنباله ساخته شده در این روش به جوابی از دستگاه خطی منفرد که بر حسب معکوس درازین ماتریس ضرایب دستگاه بیان می‌شود همگراست سیدی این روش را DGMRES نامید.

هرگاه اندیس ماتریس ضرایب دستگاه معادلات خطی صفر باشد روش DGMRES همان روش GMRES است.

روش‌های زیر فضای کرایلف یکی از قدرتمندترین روش‌های تصویری برای حل دستگاه معادلات خطی می‌باشند. ویژگی‌های شاخص این روش‌ها از قبیل حجم ذخیره‌سازی پایین و جواب تقریبی خوب باعث شده که این روش‌ها از مقبولیت گسترده‌ای در میان گرایش‌های مختلف علوم و مهندسی برخوردار شوند.

یکی از مهمترین مباحث مربوط به روش‌های زیر فضای کرایلف، آنالیز همگرایی این روش‌هاست. روش‌های زیر فضای کرایلف به صورت یک روش تکراری در نظر گرفته شده و زمانی همگرا می‌شوند که نرم بردار مانده به اندازه کافی کوچک باشد.

روش GMRES بعد از حداکثر n تکرار که n ابعاد ماتریس ضرایب دستگاه است به جواب دقیق دستگاه همگراست. در زمینه همگرایی GMRES کارهای زیادی شده است که می‌توان به مقالات زیر اشاره کرد. در سال ۲۰۰۴ لیسن و استراکوس[5] همگرایی روش GMRES را برای ماتریس‌های سه قطری تپلیتز بررسی کردند [5]. در سال ۲۰۰۴ لیسن وتیچی[6] با معرفی کرانهای $worse -$

[2] Saad
[3] Schultz
[4] Sidi
[5] Liesen and Strakos
[6] Tichy

GMRES و Ideal − GMRES، آنها را در مورد ماتریس‌های نرمال مورد بررسی قرار دادند [6] . بعلاوه آنها در سال ۲۰۰۵ با تمرکز بر مدل خاص انتقال – انتشار، شرایط مرزی دیریکله و با استفاده از تبدیلات متعامد به یک ماتریس بلوکی قطری با بلوک‌های نامتقارن سه قطری تپلیتز به بیان همگرایی GMRES پرداخته‌اند [7]. در سال ۲۰۰۹ لی و ژانگ [7] نرخ همگرایی روش GMRES را برای دستگاه‌های سه قطری تپلیتز محاسبه کردند و نشان دادند که وقتی بردار سمت راست، ستون اول یا آخر ماتریس همانی باشد فرمول بدست آمده بسیار ساده‌تر از نمونه‌های موجود آن است [8]. در مورد همگرایی روش $DGMRES$ کارهای زیادی انجام نشده است و ما به دو موردی که در این زمینه کار شده است اشاره می‌کنیم. گرین بام[8] و همکاران در سال ۲۰۱۸ کران بالای نرم بردارهای مانده در روش $DGMRES$ را مورد بررسی قرار داده و آنرا با نرم بردار مانده روش $GMRES$ بکار برده شده برای بخش نامنفرد ماتریس ضرایب دستگاه مقایسه کرده‌اند[9] .

صفرزاده و سالمی در همان سال ۲۰۱۸ ضمن معرفی $index\ numerical\ range$ رابطه این مفهوم جدید را با همگرایی $DGMRES$ بررسی کردند [10].

ما در این مقاله، کاری که گرین بام برای روش GMRES انجام داده است را به روش $DGMRES$ تعمیم می‌دهیم. گرین بام در [11]، نشان داد که هر دنباله غیر صعودی از اعداد نامنفی را می‌توان نرم بردارهای مانده برای الگوریتم GMRES در حل بعضی از دستگاه‌های معادلات خطی در نظر گرفت، او در این مقاله سعی کرده ماتریس ضرایب دستگاه معادلات خطی نامنفرد $Ax = b$ را به شکلی تعیین کند که نرم بردار های مانده روش $GMRES$ برای این دستگاه همان دنباله اعداد نامنفی شود.

[7] Li and Zhang

[8] Greenbuam

۲. روش GMRES برای ماتریس‌های منفرد (DGMRES)

روش‌های تصویری برای حل دستگاه‌های معادلات خطی منفرد، با بردار دلخواه x_0 به عنوان بردار آغازین، دنباله‌-ای از بردارهای $x_1, x_2, x_3, \ldots$ را به صورت زیر تولید می‌کنند:

$x_k = x_0 + q_{k-1}(A) r_0,$ که $r_0 = b - Ax_0$ و $q_{k-1}(\lambda)$ یک چند جمله‌ای از درجه $k-1$ به صورت زیر است:

$$q_{k-1}(\lambda) = \sum_{i=1}^{k-\alpha} c_i \lambda^{\alpha+i-1}, \quad \alpha = ind(A).$$

فرض کنید

$$p_k(\lambda) = 1 - \lambda q_{k-1}(\lambda) = 1 - \sum_{i=1}^{k-\alpha} c_i \lambda^{\alpha+i}$$

در این صورت داریم:

$$r_{k-\alpha} = b - Ax_{k-\alpha} = [I - Aq_{k-1}(A)]r_0 = p_k(A) r_0$$

که $p_k(0) = 1$ و برای هر $i = 1,2,\ldots,\alpha$، داریم $p_k^{(i)}(0)=0$. با توجه به مطالب فوق، دو خانواده از چندجمله‌ای‌ها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P_k^{\alpha} = \{p \in P_k : p^{(i)}(0) = 0, i = 1, \ldots, \alpha\},$$

که P_k، چند جمله‌ای‌های از در جه کوچکتر یا مساوی k می‌باشد و

$$P_k^{\alpha}(0) = \{p \in P_k^{\alpha} : p(0) = 1\},$$

به آسانی می‌توان نشان داد که $A^D = A^{\alpha} p(A)^{\alpha+1}$، پس $A^D b = A^{\alpha} p(A)^{\alpha+1} b \in R(A^{\alpha})$.

فرض کنید $b = \hat{b} + \tilde{b}$ که $\hat{b} \in R(A^{\alpha})$ و $\tilde{b} \in N(A^{\alpha})$ چون $\hat{b} \in R(A^{\alpha})$ می‌توان نشان

داد که $A^Db\in R(A^\alpha)$ جواب دستگاه $Ax=\hat b$ است [2].

قضیه ۱: [12]، فرض کنید $x_0=\hat x_0+\tilde x_0$ بطوری که $\hat x_0\in R(A^\alpha)$ و $\tilde x_0\in N(A^\alpha)$ آنگاه

$$x_{k-\alpha}=A^Db+p_k(A)(\hat x_0-A^Db)+\tilde x_0$$
$$=\hat x_{k-\alpha}+\tilde x_{k-\alpha}$$

با توجه به قضیه بالا اگر $x_0=0$ یا $x_0\in R(A^\alpha)$ آنگاه $\tilde x_{k-\alpha}=\tilde x_0=0$. تعریف می‌کنیم:

$$\hat e_{k-\alpha}=\hat x_{k-\alpha}-A^Db, k=\alpha,\alpha+1,\alpha+2,\cdots$$

بنا بر قضیه قبل، داریم:

$$x_{k-\alpha}=A^Db+p_k(A)(\hat x_0-A^Db)+\tilde x_0$$
$$=A^Db+p_k(A)\hat e_0$$

بنابراین

$$\hat e_{k-\alpha}=\hat x_{k-\alpha}-A^Db=p_k(A)\hat e_0.$$

در صورتی که با افزایش مقدار k، $\hat e_{k-\alpha}$ کوچک شود A^Db تقریب مناسبی برای $\hat x_{k-\alpha}$ خواهد بود.

از طرفی چون

$$\hat e_0=\hat x_0-A^Db\in R(A^\alpha)$$

برای بررسی رفتار $\hat e_{k-\alpha}$ ، کافیست اثر $p_k(A)$ روی $R(A^\alpha)$ را بررسی کنیم. در نتیجه کافیست نشان دهیم وقتی که k افزایش می یابد اثر $p_k(A)$ روی $R(A^\alpha)$ کوچک می‌شود.

همچنین چون $r_{k-\alpha}=p_k(A)r_0$ بنابراین

$$\hat r_{k-\alpha}=p_k(A)\hat r_0$$

در نتیجه $\hat r_{k-\alpha}$ مشابه $\hat e_{k-\alpha}$، به وسیله اثر $p_k(A)$ روی $R(A^\alpha)$ مشخص می‌شود. بنابراین اگر اثر $p_k(A)$ روی $R(A^\alpha)$ کوچک شود بردارهای $\hat r_{k-\alpha}$ و $\hat e_{k-\alpha}$ نیز کوچک خواهند شد.

از طرفی چون

$$\hat r_0=\hat b-A\hat x_0=-A(\hat x_0-A^Db)=-A\hat e_0$$
$$\hat r_{k-\alpha}=p_k(A)\hat r_0=-Ap_{k-\alpha}(A)\hat e_0=-A\hat e_{k-\alpha}$$

حال این سوال پیش می‌آید که آیا با کوچک کردن بردار $\hat r_{k-\alpha}$ بردار $\hat e_{k-\alpha}$ نیز کوچک می‌شود؟ چون A منفرد است به این سوال به راحتی نمی‌توان پاسخ داد. برای پاسخ به این سوال چون $\hat r_{k-\alpha}\in R(A^\alpha)$، تمام محاسبات را در $R(A^\alpha)$ انجام می‌دهیم. فرض کنید $\hat A$ تحدید A به روی $R(A^\alpha)$ باشد بنابراین $\hat A$ نامنفرد است.

فرض کنید $m=\dim R(A^\alpha)$ و $\sigma_1\ge\sigma_2\ge\cdots\ge\sigma_m>0$ مقادیر منفرد ماتریس $\hat A$ باشند. بنابر قضیه تجزیه SVD، ماتریس‌های یکانی U و V وجود دارد به‌طوری که $\hat A=U\Sigma V^*$ و $\Sigma=diag(\sigma_1,\cdots,\sigma_m)$. بنابراین

$$\left\|\hat A\ \hat e_{k-\alpha}\right\|_2^2=\|U\Sigma V^*\hat e_{k-\alpha}\|_2^2=\sum_{j=1}^m(\sigma_j(V^*\hat e_{k-\alpha})_j)^2\ge\sigma_m^2\|\hat e_{k-\alpha}\|_2^2$$

که $(V^*\hat e_{k-\alpha})_j$ مولفه j -ام بردار $V^*\hat e_{k-\alpha}$ است.

در نتیجه

$$\|r_{k-\alpha}\|_2=\|A\hat e_{k-\alpha}\|_2=\left\|\hat A\ \hat e_{k-\alpha}\right\|_2\ge\sigma_m\|\hat e_{k-\alpha}\|_2.$$

بنابر رابطه بالا، هرگاه $\hat r_{k-\alpha}$ به صفر میل کند آنگاه بردار $\hat e_{k-\alpha}$ نیز به صفر میل خواهد کرد. بطور مشابه می‌توان نشان داد که:

$$\|\hat r_{k-\alpha}\|_2\ge\sigma_m\|\hat e_{k-\alpha}\|_2.$$

و همچنین به ازای $k=\alpha,\alpha+1,\alpha+2,\ldots$ داریم:

$$\left\|\hat A^{k-\alpha}\ \hat r_{k-\alpha}\right\|_2\ge\sigma_m^{(k-\alpha)}\|\hat r_{k-\alpha}\|_2,$$

که $\sigma_m^{(k-\alpha)}$ کوچکترین مقدار منفرد ماتریس $\hat A^{k-\alpha}$ است. ازطرفی چون $\hat r_{k-\alpha}\in R(A^\alpha)$ داریم:

$\|A^{\alpha}\, r_{k-\alpha}\|_2 = \left\|\hat{A}^{\alpha}\, \hat{r}_{k-\alpha}\right\|_2 \geq$
$\sigma_m^{(\alpha)} \|\, \hat{r}_{k-\alpha}\|_2.$

بنابراین کافیست وقتی که k بزرگ می‌شود $A^{\alpha}\, r_{k-\alpha}$ کوچک شود. درنتیجه اگر $A^{\alpha}\, r_{k-\alpha} \to 0$ آنگاه $\hat{r}_{k-\alpha} \to 0$.
به طور خلاصه داریم:

$$A^{\alpha}\, r_{k-\alpha} \to 0 \Longrightarrow \hat{r}_{k-\alpha} \to 0 \Longrightarrow \hat{e}_{k-\alpha} \to 0.$$

مشابه روش‌های تصویری برای دستگاه‌های نامنفرد، زیر فضای قیود W را با بعد مناسب طوری انتخاب می‌کنیم تا بردار $A^{\alpha}\, r_{k-\alpha}$ بر هر بردار در W عمود باشد. چون چند جمله‌ای

$$p_k(\lambda) = 1 - \sum_{i=1}^{k-\alpha} c_i \lambda^{\alpha+i},$$

$k-\alpha$ مجهول c_i دارد، بنابراین $dim(W) = k-\alpha$.
فرض کنید V ماتریسی با ستون‌های $A^{\alpha} r_0$ ، $\cdots$ ، $A^{k-1} r_0$ باشد یعنی

$$V = [A^{\alpha} r_0 \cdots A^{k-1} r_0]$$

و $c = (c_1, \cdots, c_{k-\alpha})^T$ در نتیجه

$$x_{k-\alpha} = x_0 + q_{k-1}(A) = x_0 + \sum_{i=1}^{k-\alpha} c_i\, A^{\alpha+i-1} r_0 = x_0 + Vc$$
$$r_{k-\alpha} = p_k(A) r_0 = r_0 + \sum_{i=1}^{k-\alpha} c_i A^{\alpha+i} r_0 \quad = r_0 - AVc$$

اگر ماتریسی که ستون‌های آن همان پایه فضای W است را دوباره با W نشان دهیم در این صورت چون $A^{\alpha}\, r_{k-\alpha}$ بر W عمود است، داریم $W^* A^{\alpha}\, r_{k-\alpha} = 0$. بنابراین $W^* A^{\alpha}(r_0 - Vc) = 0$ و در نتیجه

$$W^* A^{\alpha} r_0 = W^* A^{\alpha+1} V c.$$

در صورتی که $det(W^* A^{\alpha+1} V) \neq 0$، خواهیم داشت

$$c = (W^* A^{\alpha+1} V)^{-1} W^* A^{\alpha} r_0$$

بنابراین

$$x_{k-\alpha} = x_0 + Vc = x_0 + V(W^* A^{\alpha+1} V)^{-1} W^* A^{\alpha} r_0$$

حال به بررسی شرایطی که تحت آن $det(W^* A^{\alpha+1} V) \neq 0$ می‌پردازیم.

تعریف ۲: [13]، فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ و $b \in \mathbb{C}^n$. چند جمله‌ای $p \in P_k$ را چند جمله‌ای مینیمال ماتریس A نسبت به بردار b گوئیم اگر k کوچکترین عددی باشد که $p(A)b = 0$.
در ادامه، مفهوم چندجمله ای مینیمال یک ماتریس با توجه به یک بردار، تعمیم داده می‌شود.

تعریف ۴: [14]، فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ و $ind(A) = \alpha$. در این صورت چند جمله‌ای $p \in P_k^{\alpha}$ را چند جمله‌ای مینیمال α- ناقص ماتریس A نسبت به بردار $\hat{u} \in R(A^{\alpha})$ گوئیم اگر k کوچکترین عددی باشد که $p(A)\hat{u} = 0$
قضیه زیر، وجود و منحصر بفردی چندجمله‌ای مینیمالα -ناقص ماتریس A را نشان می‌دهد.

قضیه ۵: [14]، فرض کنید $A \in C^{n\times n}$ و $ind(A) = \alpha$. آنگاه چند جمله‌ای مینیمال $\alpha-$ ناقص ماتریس A نسبت به بردار $\hat{u} \in R(A^{\alpha})$ موجود و منحصر به فرد است. همچنین اگر p این چند جمله‌ای باشد به طوری که $deg(p) = k$، در این صورت $q \leq k \leq q+\alpha$ که q درجه چند جمله‌ای مینیمال A نسبت به $\hat{u}$ است.
قضیه بعدی بیان می‌کند که جواب معکوس درازین $A^D b$ را می‌توان بر حسب x_0 و ترکیب خطی بردارهای $A^{\alpha} r_0$ ، ... ، $A^{k-1} r_0$ نوشت.

قضیه ۶: [14]، فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ و $ind(A) = \alpha$. هرگاه p چند جمله‌ای مینیمال -

α ناقص ماتریس A نسبت به بردار $\hat{e}_0$ از درجه k باشد، آنگاه $p(\lambda)=1-\sum_{i=1}^{k-\alpha}\hat{c}_i\lambda^{\alpha+i}$، که $\hat{c}_i$ منحصر بفردند و

$$A^D b+\hat{x}_0=x_0+\sum_{i=1}^{k-\alpha}\hat{c}_i A^{\alpha+i-1}r_0.$$

قضیه ۷: [14]، فرض کنید $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ با $ind(A)=\alpha$، p چند جمله‌ای مینیمال α - ناقص A نسبت به بردار $\hat{e}_0$ از درجه k و $x_k=x_0+\sum_{i=1}^{k-\alpha}\hat{c}_i A^{\alpha+i-1}r_0$ باشد. اگر دترمینان ماتریس $W^*A^{\alpha+1}V$ مخالف صفر باشد، آنگاه
$x_{k-\alpha}=A^D b+\hat{x}_0$

قضیه ۸: [4]، در حالتی که $W=A^{\alpha+1}V$، بردار $x_{k-\alpha}$ برای تمام $k\le k_0$ که k_0 درجه چند جمله ای مینیمال α -ناقص A نسبت به بردار $\hat{e}_0$ است، موجود و منحصر به فرد است.

در حالتی که W را $A^{\alpha+1}V$ انتخاب کنیم چون $W^*A^{\alpha+1}Vc=W^*A^{\alpha}r_0$ پس
$$(A^{\alpha+1}V)^*A^{\alpha+1}Vc=(A^{\alpha+1}V)^*A^{\alpha}r_0,$$

و به کمک معادلات نرمال مسئله کمترین مربعات داریم:

$$\min_{c_1,\dots,c_{k-\alpha}}\|A^{\alpha}(AVc-r_0)\|_2=\min_{x_{k-\alpha}\in x_0+K_{k-\alpha}(A,A^{\alpha}r_0)}\|A^{\alpha}r_{k-\alpha}\|_2$$

بنابراین به طور خلاصه:

$$DGMRES\quad find\ x_{k-\alpha}\in x_0+\mathcal{K}_{k-\alpha}(A,A^{\alpha}r_0)$$
$$s.t\ \ \|A^{\alpha}r_{k-\alpha}\|_2=\min_{x\in x_0+K_{k-\alpha}(A,A^{\alpha}r_0)}\|A^{\alpha}(b-Ax)\|_2=\min_{p\in P_k^{\alpha}(0)}\|p(A)A^{\alpha}b\|_2$$

۳. الگوریتم $DGMRES$

الگوریتم $DGMRES$ اولین بار توسط سیدی در [4] ارائه شده است. اما نسخه کامل‌تر آن برای پیاده‌سازی مثال‌ها از منبع [9] آورده شده است.

فرض کنید $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ با $ind(A)=\alpha$ و $b\in\mathbb{C}^n$. در بخش قبل دیدیم چون ماتریس A^D یک چند جمله‌ای برحسب A است روش $DGMRES$ با استفاده از روش‌های زیر فضای کرایلف جواب $A^D b$، دستگاه منفرد $Ax=b$ را تقریب می‌زند.

فرض کنید x_0 حدس اولیه و $r_0=b-Ax_0$ بردار مانده متناظر با آن باشد. قرار می‌دهیم $v_1=\beta^{-1}A^{\alpha}r_0$ که $\beta=\|A^{\alpha}r_0\|_2$، روش $DGMRES$ برای $k=\alpha+1,\dots$ جواب‌های تقریبی $x_{k-\alpha}$،
$$x_{k-\alpha}\in x_0+span\{v_1,Av_1,\dots,A^{k-\alpha-1}v_1\}$$

به شرط این که $\|A^{\alpha}(b-Ax_{k-\alpha})\|_2$ کمترین مقدار باشد، را پیدا می‌کند.

برای انجام این کار، ابتدا به کمک الگوریتم آرنولدی یک پایه‌ی متعامد یکه برای زیر فضای کرایلف
$$span\{v_1,Av_1,\dots,A^{k-1}v_1\}$$

می‌سازیم. پایه متعامد یکه‌ی حاصل را ستون‌های ماتریس زیر در نظر می‌گیریم:
$$V_k=[v_1,\dots,v_k]$$

با توجه به الگوریتم آرنولدی برای ماتریس V_k و ماتریس بالا هسنبرگی $H_{k+1,k}$ با ابعاد $(k+1)\times k$، رابطه زیر برقرارست:

$$AV_k=V_{k+1}H_{k+1,k}\qquad(۱)$$

چون جواب تقریبی $x_{k-\alpha}$ متعلق به فضای آفین
$$x_{k-\alpha}\in x_0+span\{v_1,Av_1,\dots,A^{k-\alpha-1}v_1\}$$

می‌باشد پس $x_{k-\alpha}=x_0+V_{k-\alpha}\xi$، که با تعیین ξ این جواب تقریبی مشخص می‌شود. با توجه به مطالب بخش قبل داریم:
$$r_{k-\alpha}=b-Ax_{k-\alpha}=r_0-AV_{k-\alpha}\xi,$$

و

$$A^{\alpha}r_{k-\alpha} = A^{\alpha}r_0 - A^{\alpha+1}V_{k-\alpha}\xi.$$

بنا به رابطه (۱) داریم:

$$\begin{aligned} A^{\alpha}r_{k-\alpha} &= A^{\alpha}r_0 - A^{\alpha}V_{k-\alpha+1}H_{k-\alpha+1,k-\alpha}\xi \\ &= A^{\alpha}r_0 - A^{\alpha-1}V_{k-\alpha+2}H_{k-\alpha+2,k-\alpha+1}H_{k-\alpha+1,k-\alpha}\xi \\ &\ \ \vdots \\ &= A^{\alpha}r_0 - V_{k+1}\widehat{H}_{k+1,k-\alpha}\xi \end{aligned}$$

که

$$\widehat{H}_{k+1,k-\alpha} = H_{k+1,k}H_{k,k-1}\cdots H_{k-\alpha+1,k-\alpha}.$$

چون $A^{\alpha}r_0 = V_{k+1}(\beta e_1)$ که $e_1 = (1,0,\dots,0)^T$
پس

$$A^{\alpha}r_{k-\alpha} = V_{k+1}\left(\beta e_1 - \widehat{H}_{k+1,k-\alpha}\xi\right) \qquad (۲)$$

بنابراین بردار ξ باید به گونه‌ای انتخاب شود که $\|A^{\alpha}r_{k-\alpha}\|_2$ مینیمم شود که با حل مسئله کمترین مربعات

$$\min_{\xi}\left\|\beta e_1 - \widehat{H}_{k+1,k-\alpha}\xi\right\|_2$$

می‌توان بردار ξ را بدست آورد. چون $x_{k-\alpha} - x_0$ ترکیب خطی $k-\alpha$ بردار اول در الگوریتم آرنولدی است برای تعیین این ترکیب خطی به $k+1$ بردار اول در الگوریتم آرنولدی و ماتریس‌های بالا هسنبرگی متناظر $H_{k+1,k}, H_{k,k-1}, \dots$ نیاز داریم. به محض اینکه مجموعه‌ای از بردارهای مستقل خطی فضای کرایلف ساخته شود به طوری که $h_{k+1,k} = 0$ داریم:

$$AV_k = V_kH_k$$

بنابراین برای $0 \le l \le \min\{k-1,\alpha\}$، $A^{\alpha}r_{k-l}$ به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} A^{\alpha}r_{k-l} &= A^{\alpha}r_0 - A^{\alpha-l+1}V_k\hat{H}_{k,k-l}\xi \\ &= A^{\alpha}r_0 - V_kH_k^{\alpha-l+1}\hat{H}_{k,k-l}\xi \\ &= V_k(\beta e_1 - H_k^{\alpha-l+1}\hat{H}_{k,k-l}\xi) \end{aligned}$$

که برای تعیین ξ باید مسئله کمترین مربعات $k\times(k-l)$ با ماتریس ضرایب $H_k^{\alpha-l+1}\hat{H}_{k,k-l}$ حل شود.

این الگوریتم بسیار شبیه *GMRES* برای حل دستگاه معادلات خطی نامنفرد است که در جدول (۱) آورده شده است. با توجه به رابطه (۲) شخص می‌تواند رابطه

$$\|A^{\alpha}r_{k-\alpha}\|_2 = \left\|\beta e_1 - \widehat{H}_{k+1,k-\alpha}\xi\right\|_2$$

را بدون محاسبه واقعی $x_{k-\alpha}$ زیر نظر داشته باشد. بنابراین تنها محاسبه $x_{k-\alpha}$ تازمانی که این نرم تا زیر یک تلورانس مطلوب کاهش یابد، لازم است. توجه کنید که اگر α الگوریتم جدول (۱) بزرگتر از اندیس A باشد، پس الگوریتم، جواب $A^{\alpha+1}x = A^{\alpha}b$ را پیدا می‌کند، در حالیکه اگر α کوچکتر از اندیس A باشد الگوریتم سعی دارد دستگاه خطی $A^{\alpha+1}x = A^{\alpha}b$ را حل کند که ممکن است سازگار نباشد.

۴. ساخت مسئله ایی با منحنی همگرایی معلوم و همین طور مقادیر ویژه مقرر شده

ما در این مقاله به همگرایی روش DGMRES می-پردازیم و به این سوال که آیا برای هر دنباله غیر صعودی از اعداد نامنفی می‌توان ماتریس ضرایب دستگاه (دستگاه‌های) معادلات خطی منفردی یافت که این دنباله، نرم‌های بردارهای مانده آنها تولید شده توسط روش DGMRES باشد؟ پاسخ می‌دهیم.

قضیه ۹: فرض کنید $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ با $\alpha = ind(A)$ و $b \in \mathbb{C}^n$. در این صورت هرگاه دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ با الگوریتم DGMRES حل شود، آنگاه

$$A^{\alpha}r_{\alpha+m} = A^{\alpha}r_{\alpha+m+1} = \cdots = A^{\alpha}r_n = 0$$

که $m = dimR(A^{\alpha})$.

برهان: چون $\alpha = ind(A)$ بنابر تجزیه ژوردان

$$A = S\begin{bmatrix} B & \\ & N \end{bmatrix} S^{-1}$$

که ماتریس $B \in \mathbb{C}^{m\times m}$ نامنفرد و ماتریس N پوچ توان با $\alpha = ind(N)$ است. بنابراین

$$A^\alpha = S\begin{bmatrix} B^\alpha & \\ & O \end{bmatrix} S^{-1}$$

در نتیجه $m = \dim R(A^\alpha) \le n - \alpha$.

بنابر الگوریتم DGMRES تقریب $x_{k-\alpha}$ از جواب دستگاه معادلات خطی $Ax = b$ در مرحله k-ام متعلق به فضای آفین $x_\circ + \mathcal{K}_{k-\alpha}(A, A^\alpha r_\circ)$ که $\mathcal{K}_{k-\alpha}(A, A^\alpha r_\circ) = span\{A^\alpha r_\circ, \dots, A^{k-1} r_\circ\}$

و $r_\circ = b - Ax_\circ$. بنابراین $x_{k-\alpha} = x_\circ + v$ که $v \in \mathcal{K}_{k-\alpha}(A, A^\alpha r_\circ)$

و بردار مانده مرحله k-ام

$$A^\alpha r_{k-\alpha} = A^\alpha(b - Ax_{k-\alpha}) = A^\alpha r_\circ - A^{\alpha+1}v = A^\alpha r_\circ - u$$

که $u = A^{\alpha+1}v \in \mathcal{K}_{k-\alpha}(A, A^\alpha r_\circ)$.

فرض کنید $\{w_1, \dots, w_{k-\alpha}\}$ پایه متعامد یکه برای زیر فضای کرایلف $\mathcal{K}_{k-\alpha}(A, A^\alpha r_\circ)$ باشد. چون $m \le n - \alpha$، داریم:

$$A^{\alpha+1}\mathcal{K}_m(A, A^\alpha r_\circ) = span\{w_1, \dots, w_m\}$$

در این صورت نرم بردار مانده $A^\alpha r_{k-\alpha}$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\|A^\alpha r_{k-\alpha}\|_2 = \min_{u \in A^{\alpha+1}\mathcal{K}_{k-\alpha}(A, A^\alpha r_\circ)} \|A^\alpha r_\circ - u\|_2$$

بنابر خاصیت مینیمم بالا، می‌توان نشان داد که:

$$< A^\alpha r_0, w_j >^2 = \| A^\alpha r_{\alpha+j-1} \|_2^2 - \| A^\alpha r_{\alpha+j} \|_2^2, \quad j = 1, \dots, m \qquad (۳)$$

که در رابطه (۳)، $r_\alpha = r_0$ در نظر گرفته شده است. فرض کنید W ماتریسی باشد که ستون‌های آن $\{w_1, \dots, w_m\}$ باشد. بنابراین

$$W^* A^\alpha r_0 = \begin{bmatrix} w_1^* \\ \vdots \\ w_m^* \end{bmatrix} A^\alpha r_0 = \begin{bmatrix} < A^\alpha r_0, w_1 > \\ \vdots \\ < A^\alpha r_0, w_m > \end{bmatrix}$$

در نتیجه

$$\begin{aligned} 0 &= \| A^\alpha r_{\alpha+m-1} \|_2^2 - < A^\alpha r_0, w_m > - \| A^\alpha r_{\alpha+m} \|_2^2 \\ &= \| A^\alpha r_{\alpha+m-1} \|_2^2 - < A^\alpha r_0, w_m > - < A^\alpha r_0, w_m > - \| A^\alpha r_{\alpha+m} \|_2^2 \\ &\vdots \\ &= \| A^\alpha r_{\alpha+m-1} \|_2^2 - < A^\alpha r_0, w_m > - \cdots - < A^\alpha r_0, w_1 > - \| A^\alpha r_{\alpha+m} \|_2^2 \end{aligned}$$

چون $m = dimR(A^\alpha)$ بنابراین $\{w_1, \dots, w_m\}$ یک پایه متعامد یکه برای فضای $R(A^\alpha)$ است. از طرفی چون $A^\alpha r_0 \in R(A^\alpha)$ پس

$$A^\alpha r_0 = \sum_{i=1}^m < A^\alpha r_0, w_i > w_i \qquad (۴)$$

اگر نرم ۲ بردار معادله (۴) را حساب کنیم خواهیم داشت

$$\|A^\alpha r_0\|_2^2 = \sum_{i=1}^m < A^\alpha r_0, w_i >^2$$

در نتیجه $A^\alpha r_{\alpha+m} = 0$. چون برای $j = m+1, \dots, n$، $< A^\alpha r_0, w_j > = 0$ بنابراین برای هر $j = m+1, \dots, n$، داریم $A^\alpha r_{\alpha+j} = 0$ که این اثبات را کامل می‌کند.

در اینجا قصد داریم در قالب قضیه زیر به سوال طرح شده در ابتدای بخش پاسخ دهیم.

قضیه ۱۰: فرض کنید دنباله نزولی

$$f(0) \ge f(1) \ge \cdots \ge f(m-1) > f(m) = \cdots = f(n) = 0,$$

مجموعه $\{\lambda_1, \dots, \lambda_m, 0, \dots, 0\}$ از اعداد مختلط و

عدد دلخواه $\alpha \le n-m$ داده شده است. در این صورت ماتریس $A \in C^{n\times n}$ با $\alpha = ind(A)$ و مقادیر ویژه غیر صفر λ_1 ... λ_m وجود دارد به طوری که اگر الگوریتم $DGMRES$ برای دستگاه خطی $Ax=b$ با بردار مانده اولیه $A^\alpha r_0$ که $\| A^\alpha r_0 \|_2 = f(0)$ بکار برده شود آنگاه برای $k=\alpha+1, \alpha+2, \dots, \alpha+m-1$ خواهیم داشت:

$\| A^\alpha r_{k+\alpha} \|_2 = f(k).$

برهان. چون λ_1 ... λ_m مقادیر غیر صفری هستند در این صورت **مقدار** a_0 در چند جمله‌ای
$p(z) = (z-\lambda_1) \dots (z-\lambda_m) = z^m - \sum_{j-0}^{m-1} a_j z^j$

غیر صفر است. تعریف می‌کنیم:

$g(k) = \sqrt{(f(k-1))^2 - (f(k))^2};$
$k = 1, \dots, m-1$

فرض کنید $V = \{v_1, \dots, v_m\}$ پایه متعامد یکه دلخواهی برای $\mathbb{C}^m$ و $V_m = [v_1 \dots v_m]$ ماتریسی باشد که ستون‌های آن عناصر V هستند. چون ماتریس V_m نامنفرد و $g(m) = f(m-1)$، پس دستگاه معادلات خطی $V_m^* y = (g(1), \dots, g(m))^t$ دارای جواب منحصر بفرد $y = b' \in C^m \backslash \{0\}$ است. همچنین می‌توان ماتریس V_m را به گونه‌ای انتخاب کرد که $\| b' \|_2 = f(0)$. چون $b' \neq 0$ بنابراین بردارهای $W = \{b', v_1, \dots, v_{m-1}\}$ مستقل خطی اند در نتیجه W پایه ای برای $\mathbb{C}^m$ است. فرض کنید W_m ماتریسی باشد که ستونهای آن عناصر W هستند. عملگر $\mathcal{B}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{gathered}\mathcal{B}: C^m \longrightarrow C^m \\ b' \longrightarrow v_1 \\ v_1 \longrightarrow v_2 \\ \vdots \\ v_{m-2} \longrightarrow v_{m-1} \\ v_{m-1} \longrightarrow a_0 b' + a_1 v_1 + \cdots + a_{m-1} v_{m-1}\end{gathered}$$

در این صورت ماتریس نمایش $\mathcal{B}$ در پایه W ماتریس همراه زیر با چند جمله ای مشخصه $p(z)$ است.

$$[\mathcal{B}]_W = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ 1 & \cdots & 0 & a_1 \\ & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & 1 & a_{m-1} \end{bmatrix}$$

اگر قرار دهیم $B = W[\mathcal{B}]_W W^{-1}$ در این صورت λ_1 ... λ_m مقادیر ویژه ماتریس B هستند. از طرفی چون $b' \neq 0$ و ماتریس B^α نامنفرد است، بردار ناصفر $\hat{b}$ وجود دارد به طوریکه $b' = B^\alpha \hat{b}$. تعریف می‌کنیم:

$b = \begin{bmatrix} \hat{b} \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n, A = \begin{bmatrix} B & \\ & N \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$

که $N \in \mathbb{C}^{n-m\times n-m}$ هر ماتریس پوچ توان با $ind(N) = \alpha$ است. در این صورت

$A^\alpha b = \begin{bmatrix} B^\alpha & \\ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{b} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b' \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^n$

بنابراین $\|A^\alpha b\|_2 = f(0)$.
همچنین تعریف می‌کنیم $V_n = \begin{bmatrix} V_m \\ 0 \end{bmatrix}$ که با ضرب ترانهاده مزدوج آن در رابطه بالا خواهیم داشت:

$V_n^* A^\alpha b = V_m^* b' = \begin{bmatrix} < b', v_1 > \\ \vdots \\ < b', v_m > \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g(1) \\ \vdots \\ g(m) \end{bmatrix}.$

حال اگر دستگاه معادلات خطی $Ax=b$ را با روش $DGMRES$ با بردار آغازین $x_0 = 0$ حل کنیم برای $k = \alpha+1, \dots, \alpha+m-1$ داریم
$\|A^\alpha r_{k-\alpha}\|_2 = f(k-\alpha+1).$

فرض کنید $E_1 \subset E_2 \subset \cdots \subset E_m$ دنباله‌ای از زیر فضاهای $\mathbb{C}^m$، با شرط
$\dim(E_j) = j,\ j = 1, \cdots, m$

$\hat{b} \in \mathbb{C}^m$ و $\mathcal{W} = \{w_1, \dots, w_m\}$ پایه متعامد یکه‌ای برای E_m باشد به طوری که

$$span\{w_1, \dots, w_j\} = \mathrm{E}_j,\ j = 1, \dots, m$$

و همین طور W را ماتریس بردارهای $\mathcal{W}$ در نظر می‌گیریم یعنی $W = [w_1 \dots w_m] \in \mathbb{C}^{m\times m}$. فرض کنید $\mathcal{B}$ هر عملگر خطی نامنفرد روی E_m و ماتریس B ماتریس نمایش $\mathcal{B}$ در پایه استاندارد باشد. بنا به قضیه ۱-۳ [11] $<\hat{b}, w_m> \neq 0$، اگر وتنها اگر $B\mathcal{K}_j(B, \hat{b}) = E_j; j = 1, \dots, m$ و عملگر $\mathcal{B}$ در پایه $\mathcal{W}$ به صورت $R\hat{H}$ است که R ماتریس بالا مثلثی نامنفرد و

$$\hat{H} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \frac{1}{<\hat{b}, w_m>} \\ 1 & \ddots & \vdots & \frac{<\hat{b}, w_1>}{<\hat{b}, w_m>} \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & \frac{<\hat{b}, w_{m-1}>}{<\hat{b}, w_m>} \end{bmatrix}$$

با توجه به تعاریف بالا و قضیه ۲-۳ [11] قضیه زیر نتیجه می‌شود.

قضیه ۱۰: دنباله نامنفی و غیر نزولی از اعداد

$$f(0) \geq f(1) \geq \dots \geq f(m-1) > f(m) = \dots = f(n) = 0$$

و عدد دلخواه $\alpha \leq n - m$ مفروض است. در این صورت بردار مانده $A^{\alpha} r_{k+\alpha}$ در هر مرحله از روش $DGMRES$ برای حل دستگاه $Ax = b$ با $ind(A) = \alpha$ در شرط

$$\|A^{\alpha} r_{k+\alpha}\|_2 = \mathrm{f(k)}; \mathrm{k} = 1, \dots, m$$

صدق می‌کند اگر و تنها اگر

$$\mathrm{A} = \mathrm{B} \oplus \mathrm{N}$$

که

$$B = WR\hat{H}W^*$$

هر ماتریس پوچ توان با اندیس N و α باشد و بردار $b = \begin{pmatrix} \hat{b} \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ که $W^*\hat{b} = \begin{pmatrix} g(1) \\ \vdots \\ g(m) \end{pmatrix}$ و $g(1)$، ... و $g(m)$ در قضیه قبل تعریف شده‌اند.

DGMRES for the Drazin inverse solution of $Ax = b$, index of A is α
Given an initial $\beta = \left\Vert A^{\alpha} r_0 \right\Vert_2$ guess x_0, compute $r_0 = b - Ax_0$ and $A^{\alpha} r_0$.
Set and $v_1 = \beta^{-1} A^{\alpha} r_0$.
For k = 1, 2, ...
Construct the next Arnoldi vector:
Set $v_{k+1} = Av_k$.
For $j = 1, \ldots, k$
Compute $h_{jk} = v_j^{*} v_{k+1}$.
Replace $v_{k+1} \leftarrow v_{k+1} - h_{jk} v_j$.
Compute $h_{k+1,k} = \left\Vert v_{k+1} \right\Vert_2$.
If $h_{k+1,k} = 0$, set a flag;
Otherwise set $v_{k+1} = v_{k+1}/h_{k+1,k}$.
If $k > \alpha$ and flag not set,
Form $\hat{H}_{k+1,k-\alpha} = \Pi_{j=0}^{\alpha} H_{k+1-j,k-j}$.
Solve the least squares problem
$\hat{H}_{k+1,k-\alpha}\xi = \beta e_1$ for ξ.
Set $x_{k-a} = x_0 + V_{k-a}\xi$.
Compute $r_{k-a} = b - Ax_{k-a}$ and $A^{\alpha} r_{k-a}$.
If $\left\Vert A^{\alpha} r_{k-a} \right\Vert_2$ sufficiently small, then terminate;
Otherwise, continue.
If flag is set, form the final iterates and terminate:
Let $\widetilde{k} = \min\{\alpha, k-1\}$.
For $l = \tilde{k}, \tilde{k} - 1, \ldots, 0$
Form $\hat{H}_{k,k-l} = H_k^{\alpha-l+1} \Pi_{j=0}^{l-1} H_{k-j,k-j-1}$.
Solve the least squares problem $\hat{H}_{k,k-l}\xi \approx \beta e_1$ for ξ.
Set $x_{k-l} = x_0 + V_{k-l}\xi$.
Compute $r_{k-l} = b - Ax_{k-l}$ and $A^{\alpha} r_{k-l}$.

جدول ۱: الگوریتم روش *DGMRES*

فهرست منابع

[1] S. Campbell and C. J. Meyer, Generalized Inverses of Linear Transformations, Pitman, London, San Francisco, Melbourne, 1979.

[2] Y. Saad, "Krylov subspace methods for solving large unsymmetric linear systems," *Mathematics of Computation,* vol. 37, pp. 105-126, 1981.

[3] Y. Saad and M. H. Schultz, "GMRES: a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems," *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing,* vol. 7, p. 856–869, 1986.

[4] A. Sidi, "DGMRES: A GMRES-type algorithm for Drazin-inverse solution of singular nonsymmetric linear systems," *Linear Algebra and its Applications,* vol. 335, p. 189–204, 2001.

[5] J. Liesen and Z. Strakos, "Convergence of GMRES for Tridiagonal Toeplitz Matrices," *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications,* vol. 26, no. 1, p. 233–251, 2004.

[6] J. Liesen and P. Tichý, "The worst-case GMRES for normal matrices," *BIT Numerical mathematics,* vol. 44, no. 1, pp. 79-98, 2004.

[7] J. Liesen and Z. Strakos, "GMRES Convergence Analysis for a Convection-Diffusion Model Problem," *SIAM Journal on Scientific Computing,* vol. 26, no. 6, pp. 1989-2009, 2005.

[8] R. C. Li and W. Zhang, "The rate of convergence of GMRES on a tridiagonal toeplitz linear system. II," *Linear Algebra and its Applications,* vol. 431, no. 12, pp. 2425-2436, 2009.

[9] A. Greenbaum, F. Kyanfar and A. Salemi, "On the convergence rate of DGMRES," *Linear Algebra and its Applications,* vol. 552, pp. 219-238, 2018.

[10] M. Safarzadeh and A. Salemi, "DGMRES and index numerical range of matrices," *Journal of Computational and Applied Mathematics,* vol. 335, pp. 349-360, 2018.

[11] A. Greenbaum, V. Pták and Z. Strakoš, "Any Nonincreasing Convergence Curve is Possible for GMRES," *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications,* vol. 17, no. 3, p. 465–469, 1996.

[12] Y. Saad, Iterative Methods for Sparse Linear Systems, Philadelphia: SIAM, 2003.

[13] J. J. Climent, M. Neumann and A. Sidi, "A semi-iterative method for singular linear systems with arbitrary index," *Journal of Computational and Applied Mathematics,* vol. 87, no. 1, pp. 21-38, 1997.