دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
دوره ششم، شماره بیست و سوم، فروردین و اردیبهشت ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات
پژوهش‌های نوین در ریاضی

نکاتی در خصوص پایداری احاطه گر رومن علامتدار در گرافها

مهدی امرایی[۱]، محمد مقاصدی[۱*]

(۱) گروه ریاضی، واحد کرج، دانشگاه آزاد اسلامی، کرج، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۷/۰۸/۰۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۸/۰۵/۲۸

چکیده

فرض کنید G یک گراف ساده و متناهی از مرتبه n با مجموعه رئوس $V(G)$ است. یک مجموعه $S \subseteq V(G)$ یک مجموعه احاطه گر از G است هرگاه هر رأسی که در S نباشد، همسایه یک رأس در S باشد. عدد احاطه گری G که با $\gamma(G)$ نمایش داده می شود برابر می نیمم اندازه تمام مجموعه های احاطه گری در G است. یک مجموعه احاطه گر از اندازه $\gamma(G)$ یک $\gamma(G)$- مجموعه نامیده می شود. یک تابع احاطه گر رومن علامتدار تام(STRDF) روی گراف Gیک تابع مانند $f : V(G) \to \{-1,1,2\}$ است به شرط آنکه الف) $\sum_{x\in N(v)} f(x) \geq 1$ برای هر $x \in V(G)$ ($N(v)$ مجموعه ی همسایه های v) ، ب) هر رأس u با ویژگی $f(u) = -1$ مجاور با حداقل یک رأس v با $f(v) = 2$ است. وزن یک STRDF برای تابع f برابر $\sum_{v\in V(G)} f(v)$ تعریف می شود. عدد احاطه گر رومن علامتدار تام برای G را که با $\gamma_{stR}(G)$ نمایش می دهیم برابر می نیمم وزن تمام STRDF ها روی G است. عدد پایداری احاطه گر رومن علامتدار تام در گراف G که آن را با $st_{\gamma stR}(G)$ نمایش می دهیم برابر با می نیمم تعداد رأسهایی است که حذف آنها عدد احاطه گر رومن علامتدار تام را تغییر دهد. در این مقاله روی این مفهوم متمرکز می شویم و عدد پایداری احاطه گر رومن علامتدار تام را برای برخی از خانواده گرافها شامل گرافهای دوبخشی ، گراف های کامل، دورها و مسیرها محاسبه می کنیم.

واژه های کلیدی: احاطه گری، تابع احاطه گر رومن علامتدار تام، عدد احاطه گری علامتدار تام، عدد پایداری احاطه گری رومن علامتدار تام.

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: maghasedi@kiau.ac.ir

۱- مقدمه

فرض کنید $G=(V(G),E(G))$ یک گراف ساده از مرتبه n با مجموعه رئوس $V(G)$ و مجموعه یالهای $E(G)$ باشد. همسایگی باز یک رأس مانند v را مجموعه ی $N(v)=\{u|uv\in E\}$ و همسایگی بسته آن را مجموعه ی $N[v]=N(v)\cup\{v\}$ ، در نظر می گیریم. درجه رأس v در G را با $\deg_G(v)$ و $\Delta(G)$، $\delta(G)$ به ترتیب ماکسیمم درجه و می نیمم درجه بین تمام رئوس G است. گراف کامل با n رأس را با K_n، دور با n رأس را با C_n و مسیر با n رأس را با P_n، نمایش می دهیم. یک گراف r- بخشی G، گرافی است ، که می توان رئوس آنرا به r مجموعه نا تهی افرازکرد بطوریکه درهرمجموعه ی افراز رئوس دوبدو غیرمجاورباشند . برای اعداد مثبت $p_1,...,p_r$، گراف r- بخشی کامل $K_{p_1,...,p_r}$ گرافی r- بخشی با افراز $V_1,...,V_r$ از $V(G)$ است به طوریکه $|V_i|=p_i$، برای $1\le i\le r$ و هر دو رأس متعلق به دو مجموعه ی افراز متفاوت، با هم مجاوراند. گراف دوبخشی کامل از مرتبه $m+n$ با مجموعه های افرازها از اندازه های m و n را با $K_{m,n}$ نمایش می دهیم. یک مجموعه $S\subseteq V(G)$ یک مجموعه احاطه گر گوییم،هرگاه برای هر رأس که در S نباشد حداقل با یکی از رأس های S مجاور باشد. عدد احاطه گر G را که با $\gamma(G)$ نمایش داده، آنرا می نیمم اعضای تمام مجموعه های احاطه گر در G تعریف می کنیم. منظور از یک $\gamma(G)$- مجموعه، مجموعه ی احاطه گری از اندازه ی $\gamma(G)$ است. مفهوم پایداری احاطه گری در گراف توسط باور در[۲] معرفی شده است. پایداری احاطه گر یک گراف G می نیمم تعداد رأسهایی است که حذف آنها عدد احاطه گری را تغییر دهد، پایداری احاطه گری گراف G را با $st_\gamma(G)$ نمایش می دهند. آهنگر و همکاران [۳] یک تابع احاطه گر رومن علامتدار (STRDF) روی گراف G را تابع ی مانند $f:V(G)\to\{-1,1,2\}$ تعریف کرده اند، بطوریکه برای هر راس مانند v از G، $\sum_{u\in N(v)} f(u)\ge 1$ و بعلاوه برای هر رأس u با $f(u)=-1$ راسی مجاور با آن مانند v موجود باشد بطوریکه $f(v)=2$. وزن یک تابع احاطه گر رومن علامتدار f روی گراف G را $\sum_{v\in V(G)} f(v)$ تعریف کرده و آنرا با $\omega(f)$ نمایش می دهیم . عدد احاطه گر رومن علامتدار تام ازگراف G را می نیمم وزن تمام توابع احاطه گر رومن علامتدار روی G تعریف می‌کنیم و آنرابا $\gamma_{stR}(G)$ نمایش می دهیم. یک $\gamma_{stR}(G)$- تابع را یک STRDF روی G از وزن $\gamma_{stR}(G)$ در نظر می گیریم. برای هر تابع STRDF، مانند f روی G قرار می‌دهیم: $V_i=V_i(f)=\{v\in V(G)|f(v)=i\}$، که $i=-1,1,2$. بنابراین اگر برای هر i ، $V_i\neq\emptyset$ آنگاه تابع STRDF، روی G می تواند به صورت (V_{-1},V_1,V_2) افرازی از $V(G)$ مشخص کند. عدد احاطه گر رومن علامتدار تام برای همه گرافهای بدون رأس ایزوله خوش تعریف است زیرا $f:V(G)\to\{-1,1,2\}$ با $f(v)=1$ برای هر $v\in V(G)$ یک STRDF است. بنابراین در این مقاله فرض بر این است که $\delta(G)\ge 1$.

از نتایج زیر در ادامه این مقاله استفاده شده است.

قضیه ۱-۱: ([1]) فرض کنیم n و p اعدادی طبیعی باشند. در این صورت:

i) $\gamma_{stR}(K_{1,n-1})=3,\quad n\ge 2$ ،

ii) $$\gamma_{stR}(K_{p,p})=\begin{cases}2 & p\neq 3\\ 4 & p=3\end{cases}.$$

قضیه ۱-۲ : ([1])

$$\gamma_{stR}(K_n)=3,\qquad n\ge 3 .$$

قضیه ۱-۳ : ([1]) برای هر n طبیعی:

$$\gamma_{stR}(P_n)=\begin{cases}\frac{n}{2} & n\equiv 0 \pmod 4\\ \left\lceil\frac{n+1}{2}\right\rceil & o.w\end{cases},$$

و برای $n\ge 3$:

$$\gamma_{stR}(C_n)=\begin{cases}\frac{n}{2} & n\equiv 0 \pmod 4\\ \frac{n+3}{2} & n\equiv 1,3 \pmod 4\\ \frac{n+6}{2} & n\equiv 2 \pmod 4\end{cases}.$$

۲- نتایج اصلی

دراین بخش عدد پایداری احاطه گر رومن علامتدار تام برای بعضی از خانواده از گراف ها را پیدا می کنیم .

قضیه ۲-۱:

$$st_{\gamma stR}(K_n)=n-2, \quad n\geq 4.$$

اثبات: بنابر قضیه ۱-۲، برای $n\geq 3$ ، $\gamma_{stR}(K_n)=3$ و با حذف یک رأس، گراف تبدیل به K_{n-1} می شود که همچنان عدد احاطه گر رومن علامتدار تام آن ۳ است و با حذف رئوس تا زمانی که تعداد رئوس به ۲ کاهش نیابد همچنان مقدار عدد احاطه گر رومن علامتدار تام برابر ۳ خواهد بود پس باید به حذف رئوس تا رسیدن به ۲ رأس ادامه دهیم (یعنی حذف $n-2$ رأس) که در این حالت گراف تبدیل به K_2 شده و مقدار عدد احاطه گر رومن علامتدار تام آن عدد ۲ خواهد شد لذا مقدار عدد احاطه گر رومن علامتدار تام کاهش یافته بنابراین برای $n\geq 4$ ، $st_{\gamma stR}(K_n)=n-2$.

لم ۲-۲: معادله $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ برای $x_i\in\{-1,1,2\}$ و $n\geq 2$ همواره دارای جواب است.

اثبات:

اگر $n=2$ کافی است قرار دهیم $x_1=1$ و $x_2=-1$.

اگر $n=3$، قرار می‌دهیم $x_1=2, x_2=-1$ و $x_3=-1$.

اکنون فرض کنیم $n\geq 4$. اگر n زوج باشد آنگاه قرار می دهیم $x_i=1$, برای $i=1,2,\dots,\frac{n}{2}$ و $x_j=-1$ برای $j=\frac{n}{2}+1,\dots,n$.و اگر n فرد باشد و $n\geq 5$ آنگاه $n-3$ زوج است، بنابراین بر اساس حالت قبلی $x_1+x_2+\cdots+x_{n-3}=0$ دارای جواب است و کافی که $x_{n-2}=2$, $x_{n-1}=-1$ و $x_n=-1$ در نظر بگیریم که این مطلب را تمام می کند.

لم ۲-۳ :

برای هر $n,m\geq 1$، $\gamma_{stR}(K_{n,m})\geq 2$.

اثبات: فرض کنید $V_1=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ و $V_2=\{v_1,v_2,\dots,v_m\}$ دو بخش گراف $K_{n,m}$ باشند. برای هر $1\leq i\leq n$ ، $N(u_i)=V_2$ و برای هر $1\leq j\leq m$ ، $N(v_j)=V_1$ لذا بنابر تعریف STRDF داریم:

$$\sum_{v\in N(u_i)} f(v)\geq 1 \Rightarrow f(u_1)+\dots+f(u_n)\geq 1$$

و

$$\sum_{v\in N(v_j)} f(v)\geq 1 \Rightarrow f(v_1)+\dots+f(v_m)\geq 1$$ در

نتیجه :

$$\omega(f)=\sum_{i=1}^{n} f(u_i)+\sum_{j=1}^{m} f(v_j)\geq 2$$

بنابراین $\gamma_{stR}(K_{n,m})\geq 2$.

قضیه ۲-٤ :

$$\gamma_{stR}(K_{n,m})=\begin{cases}3 & n=1, m\geq 4\\ 2 & n=2, m\geq 4\\ 3 & n=3, m\geq 4\\ 2 & n\geq m\geq 4\end{cases}$$

اثبات: فرض کنید $V_1=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ و $V_2=\{v_1,v_2,\dots,v_m\}$ دو بخش گراف $K_{n,m}$ باشند. بدیهی است نشان گذاری به هر نحوی که باشد آنگاه $f(u_1)+\dots+f(u_n)\geq 1$ و $f(v_1)+\dots+f(v_m)\geq 1$.

حالت اول: فرض کنیم $n=1$ و $m\geq 4$ ، اگر $f(u_1)=1$ آنگاه برای هر $1\leq j\leq m$ ، $f(v_j)=1$ لذا $\omega(f)=m+1\geq 5$ واگر $f(u_1)=2$ با تعریف $f(v_1)=2$، $f(v_2)=-1$ و $f(v_3)+\dots+f(v_m)=0$ آنگاه $\omega(f)=3$ بنابراین براساس لم ۲-۳، $\gamma_{stR}(K_{1,m})=3$.

حالت دوم: $n=2, m\geq 4$ ، f را به صورت زیرتعریف می کنیم:

$f(u_1)=2$، $f(u_2)=-1$ و $f(v_1)=2$، $f(v_2)=-1$ و $f(v_3)+\dots+f(v_m)=\circ$

.بدیهی است که f یک STRDF است و $\omega(f)=2$ و لذا بر اساس لم ۲-۳، $\gamma_{stR}(K_{2,m})=2$.

حالت سوم: $n=3,m\geq 4$، را به صورت زیر تعریف می‌کنیم: $f(u_1)=2$، $f(u_2)=-1$ و $f(u_3)=2$ وبرای V_2 از نشان گذاری حالت دوم استفاده می کنیم لذا $\omega(f)=3$ و لذا $\gamma_{stR}(K_{n,m})\leq 3$ اما براساس لم ۲-۳ $\gamma_{stR}(K_{n,m})\geq 2$، لذا $\gamma_{stR}(K_{n,m})=2$ یا $\gamma_{stR}(K_{n,m})=3$. اما $f(u_1)+f(u_2)+f(u_3)\geq 1$ و تنها حالت های ممکن به شرح زیر است :

$$f(u_1)=1, f(u_2)=1, f(u_3)=1$$
$$f(u_1)=2, f(u_2)=-1, f(u_3)=1$$
$$f(u_1)=2, f(u_2)=2, f(u_3)=1$$
$$f(u_1)=2, f(u_2)=2, f(u_3)=2$$

که با توجه به ساختار گراف و شرایط نشان گذاری $f(u_1)+f(u_2)+f(u_3)\geq 2$ لذا در این حالت $\gamma_{stR}(K_{n,m})\geq 3$ پس $\gamma_{stR}(K_{n,m})=3$.

حالت چهارم: $n\geq m\geq 4$ ، با تعریف نشان گذاری f به فرم

$f(u_1)=2$، $f(u_2)=-1$ و
$f(u_3)+\dots+f(u_m)=\circ$ و
$f(v_1)=2$، $f(v_2)=-1$ و
$f(v_3)+\dots+f(v_m)=\circ$،

که f یک STRDF و $\omega(f)=2$ ، بر اساس لم ۲-۳ ، $\gamma_{stR}(K_{n,m})=2$.

تبصره۲-۵ : موارد زیر براحتی قابل استحصال است:

$\gamma_{stR}(K_{1,1})=2$ ، $\gamma_{stR}(K_{1,2})=3$ ،
$\gamma_{stR}(K_{1,3})=3$ ، $\gamma_{stR}(K_{2,2})=2$ ،
$\gamma_{stR}(K_{2,3})=3$ و $\gamma_{stR}(K_{3,3})=4$.

قضیه ۲-٦ :

$$st_{\gamma stR}(K_{n,m})=\begin{cases}1 & n\leq 3, m\geq 4\\ m-3 & n\geq m\geq 4\end{cases}$$

اثبات: فرض کنید $V_1=\{u_1,u_2,\dots,u_n\}$ و $V_2=\{v_1,v_2,\dots,v_m\}$ دو بخش گراف $K_{n,m}$ باشند.اگر $n=1, m\geq 4$ با حذف تنها رأس بخش V_1 ، m رأس ایزوله باقی می ماند یعنی گراف تبدیل به $\overline{K_m}$ می شود که بنابرتعریف باید هر رأس را با ۱ نشان گذاری کنیم لذا $\gamma_{stR}(\overline{K}_m)=m\geq 4$، یعنی در این حالت با حذف یک رأس عدد احاطه گری گراف تغییر کرد لذا $st_{\gamma stR}(K_{1,m})=1$.

اگر $n=2, m\geq 4$، بنابر قضیه ۲-۴ ، $\gamma_{stR}(K_{2,m})=2$، حال با حذف یک رأس از بخش V_1 گراف تبدیل به $K_{1,m}$ می شود که باتوجه به قضیه ۲-۴ ، $\gamma_{stR}(K_{1,m})=3$ یعنی در این حالت با حذف یک رأس عدد احاطه گری گراف تغییر کرد لذا در این حالت نیز $st_{\gamma stR}(K_{2,m})=1$.

اگر $n=3, m\geq 4$ ، بنابر قضیه ۲-۴ ، $\gamma_{stR}(K_{3,m})=3$. اکنون با حذف یک رأس از بخش V_1 گراف تبدیل به $K_{2,m}$ می شود که باتوجه به قضیه ۲-۴ ، $\gamma_{stR}(K_{2,m})=2$ یعنی در این حالت نیزبا حذف یک رأس عدد احاطه گری گراف تغییر کرد لذا در این حالت نیز $st_{\gamma stR}(K_{3,m})=1$.

اینک فرض کنیم $n\geq m\geq 4$، بنابر قضیه قبل $\gamma_{stR}(K_{n,m})=2$، اکنون بر اساس قضیه ۲-۴ ، حذف رئوس تا زمانی که $n,m\geq 4$ عدد احاطه گری گراف تغییر نمی یابد، حال اگر از بخش V_2 که دارای تعداد رئوس کمتر مساوی با بخش دیگر است تعداد $m-3$ رأس را حذف کنیم گراف تبدیل به $K_{n,3}$ می شود که بر اساس قضیه ۲-۶ ، عدد احاطه گری آن۳ است. یعنی در این حالت با حذف $m-3$ رأس عدد احاطه گری گراف تغییر کرد و همچنین با حذف تعداد کمتر از $m-3$ ، این عدد تغییر نمی کند. لذا در این حالت $st_{\gamma stR}(K_{n,m})=m-3$.

قضیه ۲-۷ : برای هر $n\geq 3$:

$$st_{\gamma stR}(C_n)=\begin{cases}2 & n\equiv 3 \pmod 4\\ 1 & o.w\end{cases}$$

اثبات: با استفاده از قضیه ۱-۳ چهار حالت در نظر می گیریم.

الف) اگر $n \equiv \circ (\mod 4)$ آنگاه $n = 4t$ و $\gamma_{stR}(C_n) = \frac{n}{2}$، با حذف یک رأس از C_n، گراف تبدیل به P_{n-1} می شود لذا، $n-1 \equiv 3 (\mod 4)$ پس

$$\gamma_{stR}(P_{n-1}) = \left\lceil \frac{4t-1+3}{2} \right\rceil = 2t+1 = \frac{n}{2}+1$$

پس با حذف یک رأس عدد احاطه گر رومن علامتدار تام برای این گراف تغییر می کند لذا در این حالت $st_{\gamma stR}(C_n) = 1$.

ب) حالت دوم وقتی $n \equiv 1 (\mod 4)$ آنگاه $n = 4t+1$ و $\gamma_{stR}(C_n) = \frac{n+3}{2}$، با حذف یک رأس از C_n، گراف تبدیل به P_{n-1} می شود و $n-1 \equiv \circ (\mod 4)$ پس

$$\gamma_{stR}(P_{n-1}) = \left\lceil \frac{4t}{2} \right\rceil = 2t = \frac{n-1}{2}$$

پس در این حالت نیز با حذف یک رأس عدد احاطه گر رومن علامتدار تام برای این گراف تغییر می کند لذا در این حالت نیز $st_{\gamma stR}(C_n) = 1$.

ج) حالت سوم وقتی $n \equiv 2 (\mod 4)$ آنگاه $n = 4t+2$ و لذا $\gamma_{stR}(C_n) = \frac{n+6}{2}$، با حذف یک رأس از C_n، گراف تبدیل به P_{n-1} می شود پس $n-1 \equiv 1 (\mod 4)$ بنابراین :

$$\gamma_{stR}(P_{n-1}) = \left\lceil \frac{4t+1+3}{2} \right\rceil = 2t+2 = \frac{n-2}{2}+2 = \frac{n+2}{2}$$

پس در این حالت نیز با حذف یک رأس عدد احاطه گر رومن علامتدار تام برای این گراف تغییر می کند لذا در این حالت نیز $st_{\gamma stR}(C_n) = 1$.

د) حالت چهارم زمانی که $n \equiv 3 (\mod 4)$ آنگاه $n = 4t+3$ و لذا $\gamma_{stR}(C_n) = \frac{n+3}{2}$، با حذف یک رأس از C_n، گراف تبدیل به P_{n-1} می شود پس $n-1 \equiv 2 (\mod 4)$ لذا:

$$\gamma_{stR}(P_{n-1}) = \left\lceil \frac{4t+2+3}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{4t+5}{2} \right\rceil = 2t+3 = \frac{n-3}{2}+3 = \frac{n+3}{2}$$

بنابراین در این حالت با حذف یک رأس عدد احاطه گر رومن علامتدار تام برای این گراف تغییری نمی کند لذا در این حالت دو رأس کنارهم را حذف می کنیم که گراف تبدیل به P_{n-2} می شود.

بنابراین:

$$\gamma_{stR}(P_{n-2}) = \left\lceil \frac{4t+3+1}{2} \right\rceil = 2t+2 = \frac{n-3}{2}+2 = \frac{n+1}{2}$$

پس عدد احاطه گر رومن علامتدار تام برای این گراف با حذف دو رأس تغییر می کند لذا در این حالت $st_{\gamma stR}(C_n) = 2$.

قضیه ۲-۸: برای $n \geq 3$، $st_{\gamma stR}(P_n) = 1$.

اثبات: با استفاده از قضیه ۱-۳ چهار حالت را در نظر می گیریم.

الف) اگر $n \equiv \circ (\mod 4)$ آنگاه $\gamma_{stR}(P_n) = \frac{n}{2}$.

با حذف یک برگ از P_n، گراف تبدیل به P_{n-1} می شود لذا:

$$\gamma_{stR}(P_{n-1}) = \left\lceil \frac{4t-1+3}{2} \right\rceil = 2t+1 = \frac{n}{2}+1$$

و با حذف یک رأس عدد احاطه گر رومن علامتدار تام برای این گراف تغییر می کند بنابراین در این حالت $st_{\gamma stR}(P_n) = 1$.

ب) اگر $n \equiv 1 (\mod 4)$ آنگاه $\gamma_{stR}(P_n) = \frac{n+3}{2}$. با حذف یک برگ از P_n ، گراف تبدیل به P_{n-1} می شود پس $n-1 \equiv \circ (\mod 4)$ بنابراین :

$$\gamma_{stR}(P_{n-1}) = \frac{4t}{2} = 2t = \frac{n-1}{2}$$

پس در این حالت نیز با حذف یک رأس عدد احاطه گر رومن علامتدار تام برای این گراف تغییر می کند لذا در این حالت نیز $st_{\gamma stR}(P_n) = 1$.

ج) اگر $n \equiv 2 (\mathrm{mod}\, 4)$ آنگاه $\gamma_{stR}(P_n) = \frac{n+4}{2}$. پس با حذف یک برگ از P_n، گراف تبدیل به P_{n-1} می شود. بنابراین $n-1 \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$:

$$\gamma_{stR}(P_{n-1}) = \left\lceil \frac{4t+1+3}{2} \right\rceil = 2t+2 = \frac{n-2}{2} + 2 = \frac{n+2}{2}$$

پس در این حالت نیز با حذف یک رأس عدد احاطه گر رومن علامتدار تام برای این گراف تغییر می کند لذا در این حالت نیز $st_{\gamma stR}(P_n) = 1$.

د) $n \equiv 3 (\mathrm{mod}\, 4)$ در این حالت یک رأس از درجه دو را حذف می کنیم بنابراین P_n تبدیل به دو مسیر P_x و P_y می شود که $x + y = n-1$. راس را چنان انتخاب می کنیم که :

$x \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$ ، لذا و $y \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$ ، لذا $\gamma_{stR}(P_x) = \frac{x+3}{2}$ ، $\gamma_{stR}(P_y) = \frac{y+3}{2}$ و بنابراین:

$$\gamma_{stR}(P_x) + \gamma_{stR}(P_y) = \frac{x+3}{2} + \frac{y+3}{2} = \frac{x+y+6}{2} = \frac{n+5}{2}$$

پس عدد احاطه گر رومن علامتدار تام برای این گراف تغییر می‌کند .پس $st_{\gamma stR}(P_n) = 1$. واین اثبات را تمام می-کند.■

فهرست منابع

~[1] L. Volkmann, *Signed total Roman in graphs*, J. Combin. Optim. ۳۲ (۲۰۱۶), ۸۵۵-۸۷۱.

[2] D. Bauer, F. Harary, J. Nieminen, C. Suffel, *Domination alteration sets in graphs*, Discrete Math. ٤۷ (۱۹۸۳), ۱٥۳-۱٦۱.

[3] H. A. Ahangar, M. A. Hening, C. Lowenstein ,Y. Zhao, V. Samodivkin**,** *Signed Roman domination in graphs***,** Journal of Combinatorial Optimization ۲۷(۲) (۲۰۱٤), ۲٤۱-۲٥٥**.**

[4] S. M. Sheikholeslami, L. Volkmann, *Signed Roman domination in digraphs*, J. Comb. Optim**. ۳۰(۳) (۲۰۱۵) .**

[5] M. Amraee, N. Jafari Rad and M. Maghasedi, *Roman domination stability in graphs*, Math. Reports **۲۱(۲)** (۲۰۱۹).

[6] N. Jafari Rad, A. Hansberg and L. Volkmann, *Vertex and edge critical Roman domination in graphs*, Utilitas Mathematica **۹۲ (۲۰۱۳), ۷۳-۸۸**.

[7] E. J. Cokkayne, P. A. Dreyer Jr., S. M. Hedetniemi and S. T. Hedetniemi, *Roman domination in graphs,* Discrete Math. **۲۷۸ (۱-۳) (۲۰۰۱), ۱۱-۲۲**.