

دسترسی در سایت <http://jnrm.srbiau.ac.ir>

سال هفتم، شماره سی و یکم، مرداد و شهریور ۱۴۰۰

شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X



پژوهش‌های نوین در ریاضی



دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

## انعکاس پذیری از عملگرهای کاون-داگلاس

علی ایلون کشکولی<sup>۱\*</sup>، زهرا فتاحی<sup>۲</sup>

<sup>(۲و۱)</sup> گروه ریاضی، دانشگاه یاسوج، یاسوج، ایران.

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۰۲/۲۱ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۰/۰۵/۰۶

### چکیده

فرض کنید  $H$  یک فضای هیلبرت،  $\Omega$  یک زیر مجموعه‌ی باز همبندی از صفحه‌ی مختلط  $\mathbb{C}$ ،  $n$  یک عدد صحیح مثبت و  $B_n(\Omega)$  یک کلاس کاون-داگلاس شامل عملگر خطی کراندار  $T$  روی  $H$  باشد. در این مقاله برای یک حالت خاصی از  $\Omega$ ، نشان می‌دهیم که اگر  $T \in B_n(\Omega)$  طوری باشد که مدل متعارف یک عملگر ون-نیومن گردد، آنگاه  $T$  انعکاس پذیر است. به علاوه، در این مطالعه فرض می‌کنیم که الحاقی از مدل متعارف متناظر با هسته‌ی برگمن تعمیم یافته‌ی  $K$ ، یک عملگر ون-نیومن باشد. ما می‌توانیم این را با فرضی که  $\|M_P\| \leq c\|P\|_\Omega$  یا  $\|M_P\| = c\|P\|_\Omega$ ، برای هر چند جمله‌ای  $P$  جایگزین کنیم. در حقیقت  $K$  یک هسته‌ی باز مولد برای فضای هیلبرت تابع هم-تحلیلی  $\mathcal{K}$  می‌باشد که ما می‌توانیم عملگر ضرب شده بوسیله‌ی  $\bar{Z}$  را روی آن تعریف کنیم. توجه به این نکته لازم است که اگر  $K$  یک تابع هسته‌ی اکیداً مثبت روی مجموعه‌ی  $\Lambda$  باشد آنگاه این هسته می‌تواند به یک فضای هیلبرت تابعی بر  $\Lambda$  با هسته‌ی باز مولد  $K$  گسترش یابد. لازم به یادآوری است که عملگر خطی کراندار  $T: H \rightarrow H$  را یک عملگر ون-نیومن گوئیم هرگاه جبر  $C^*$  تولید شده توسط  $T$  یک جبر ون-نیومن باشد. باید متذکر شد که در حالت کلی عملگرهایی از کلاس کاون-داگلاس انعکاس پذیر نیستند زیرا هر عملگری از این کلاس با الحاقی از عملگر ضربی غیر انعکاسی ضرب شده به وسیله‌ی  $\bar{Z}$  هم ارز یکانی است. ما نیازمند شرایط اضافی برای انعکاس پذیری  $T$  هستیم.

**واژه‌های کلیدی:** هسته‌ی برگمن، عملگر ون-نیومن، الحاق، هم ارز یکانی، عملگر ضربی.

## ۱- مقدمه

فرض کنید  $H$  یک فضای هیلبرت جدایی پذیر و  $B(H)$  جبری از همه عملگرهای خطی کراندار روی  $H$  باشد. برای یک زیر مجموعه‌ی باز همبند  $\Omega$  از  $\mathbb{C}$  و یک عدد صحیح مثبت  $n$ ، فرض کنید  $B_n(H)$  نمایش عملگرهای  $T$  در  $B(H)$  باشد به طوری که در شرایط زیر صدق کند:

$$(۱) \quad \Omega \subseteq \sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : T - \lambda \text{ ناپذیر نباشد}\}$$

$$(۲) \quad \text{ran}(T - \lambda) = H, \quad \Omega \text{ در } \lambda$$

$$(۳) \quad \bigcup_{\lambda \in \Omega} \ker(T - \lambda) = H$$

$$(۴) \quad \dim \ker(T - \lambda) = n, \quad \Omega \text{ در } \lambda$$

فضاهای  $B_n(\Omega)$  به وسیله‌ی کاون و داگلاس معرفی شده است [۲]. شرط (۱) و (۲) اطمینان ایجاد می‌کند که  $\Omega$  درون طیف نقطه‌ای از  $T$  قرار گرفته است و  $T - \lambda$  از راست معکوس پذیر است. هر عملگر در کلاس  $B_n(\Omega)$  هم ارز یکانی است با الحاقی از مدل متعارف متناظر با یک هسته‌ی برگمن تعمیم یافته‌ی  $K$  که به اختصار به صورت  $g.B.K.$  نوشته می‌شود [۳].

در حقیقت  $k$  یک هسته‌ی باز مولد برای یک فضای هیلبرت تابعی هم-تحلیلی  $\mathcal{K}$  می‌باشد که می‌توان عملگر  $M_{\bar{z}}$  ضرب شده به وسیله‌ی  $\bar{z}$  را روی آن تعریف کرد. عملگر  $M_{\bar{z}}^*$  عمل‌کننده روی  $K^*$  مدل متعارف متناظر با  $K$  نامیده می‌شود [۳، ۸، ۱۱، ۱۴].

لازم به ذکر است که اگر  $A \in B(H)$ ، آنگاه  $\text{Lat}(A)$  به وسیله‌ی شبکه‌ی همه‌ی زیر فضاهای پایایی از  $A$  تعریف می‌شود و  $\text{AlgLat}(A)$  جبر همه‌ی عملگرهای  $B$  در  $B(H)$  می‌باشد به طوری که  $\text{Lat}(A) \subset \text{lat}(B)$ .

عملگر  $A$  در  $B(H)$  انعکاسی گفته می‌شود اگر  $\text{AlgLat}(A) = W(A)$ ، که  $W(A)$  کوچکترین زیر جبری از  $B(H)$  شامل  $A$  و همانی  $I$  و در توپولوژی عملگر ضعیف بسته می‌باشد.

فضای هیلبرت  $H$  از توابع تحلیلی روی دامنه‌ی صفحه‌ی  $\Omega$  را در نظر بگیرید به طوری که برای هر  $\lambda \in \Omega$  تابع خطی  $e_\lambda$  از مقادیر در  $\lambda$  روی  $H$  کراندار باشد. به علاوه، فرض کنید  $H$  شامل توابع ثابت و ضرب شده به وسیله‌ی متغیر مستقل  $Z$  باشد. پیوستگی از مقادیر نقطه‌ای در طول قضیه‌ی نمایش ریس بیان می‌کند که برای هر  $\lambda \in \Omega$  یک تابع منحصر بفرد  $K_\lambda \in H$  وجود دارد به طوری که  $e_\lambda(f) = f(\lambda) = \langle f, K_\lambda \rangle$ ،  $f \in H$ .

فرض کنید برای  $1 \leq n \leq \infty$

$$L_n^2 = \{\xi = \{a_k\}_{k=1}^\infty : a_k \in \mathbb{C}, \sum_{k=1}^\infty |a_k|^2 < \infty\}$$

## ۲- مفاهیم پایه

برای مجموعه‌ی داده شده  $\Lambda$ ، یک فضای هیلبرت تابعی روی  $\Lambda$  فضای هیلبرتی است که زیر فضای خطی از  $\mathfrak{S}(L_n^2, \Lambda)$ ،  $1 \leq n \leq \infty$  می‌باشد، که  $\mathfrak{S}(L_n^2, \Lambda)$  فضای خطی از همه‌ی توابع  $L_n^2 -$  مقدار روی  $\Lambda$  است.

تابع هسته به صورت  $K: \Lambda \times \Lambda \rightarrow B(L_n^2)$  تعریف می‌شود به طوری که:

$$(۱) \quad K(\lambda, \mu) = K(\mu, \lambda)^*$$

(۲) برای هر عدد صحیح  $m \geq 1$  و هر خانواده‌ی  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m\} \subset \Lambda$  ماتریس عملگر  $m \times m$ ،  $K_m = (K(\lambda_i, \lambda_j))$ ،  $1 \leq i, j \leq m$  یک عملگر مثبت روی  $L_n^2 \otimes \mathbb{C}^m$  خواهد بود.

اگر ماتریس عملگر  $m \times m$ ،  $K_m$  در (۲) برای هر  $m \geq 1$  یک به یک باشد در این صورت گوییم  $K$  تابع هسته‌ی اکیداً مثبت است.

فرض کنید  $\mathcal{K}$  یک فضای هیلبرت تابعی روی  $\Lambda$  باشد. اگر برای هر

$$\lambda \in \Lambda, \xi \in L_n^2, K(\lambda, \cdot)\xi \in \mathcal{K} \text{ و } f \in \mathcal{K}$$

$$\langle f, K(\lambda, \cdot)\xi \rangle_{\mathcal{K}} = \langle f(\lambda), \xi \rangle$$

می‌باشد فضای هیلبرت تابعی هم-تحلیلی روی  $\Lambda$  نامیده می‌شود.

**تعریف ۲-۱:** تابع هسته‌ی  $K: \Lambda \times \Lambda \rightarrow \mathcal{B}(L_{\mathbb{N}}^2)$  شبه تحلیلی نامیده می‌شود اگر  $K(\cdot, \cdot)$  در متغیر اول تحلیلی بوده و در متغیر دوم هم-تحلیلی باشد.

**تعریف ۲-۲:** فرض کنید  $K$  یک تابع هسته‌ی شبه تحلیلی روی  $\Lambda$  باشد و  $H_p(\lambda, K)$  ماتریس عملگر مثبت  $(p+1) \times (p+1)$  باشد که درایه‌ی  $(m, n)$  آن به صورت

$$\frac{\partial^m}{m! \partial z^m} \frac{\partial^n}{n! \partial \bar{z}^n} K(\lambda, \lambda), \quad 0 \leq m, n \leq p$$

است. می‌گوئیم تابع هسته‌ی  $K$  ناتبهگون است اگر  $H_p(\lambda, K)$  برای هر  $\lambda \in \Lambda$  و برای هر عدد صحیح مثبت  $p$  یک به یک باشد.

**تعریف ۲-۳:** هر تابع هسته‌ی شبه تحلیلی ناتبهگون  $K$  بر  $\Lambda$  را هسته‌ی برگمن تعمیم یافته گوئیم اگر  $M_{\bar{z}} \in B(\mathcal{K}_K)$  و برای هر  $\lambda \in \Lambda$  برد  $M_{\bar{z}}^* - \lambda$  بسته باشد و

$$\text{ran } K(\lambda, \cdot) = \ker(M_{\bar{z}}^* - \lambda).$$

فرض کنید  $K$  یک تابع هسته‌ی شبه تحلیلی ناتبهگون روی  $\Lambda$  باشد. آنگاه یک فضای هیلبرت تابعی هم - تحلیلی  $\mathcal{K}_K$  روی  $\Lambda$  وجود دارد به طوری که تابع هسته‌ی ناتبهگون  $K$  روی  $\Lambda$  یک هسته‌ی باز مولد برای  $\mathcal{K}_K$  می‌باشد.

### ۳- نتیجه اصلی

فرض کنید  $T \in B_n(\Omega)$  که  $T$  با الحاقی از مدل متعارف متناظر با هسته‌ی برگمن تعمیم یافته‌ی  $K$  برای یک فضای هیلبرت تابعی هم-تحلیلی  $\mathcal{K}$  هم

آنگاه گوئیم  $\mathcal{K}$  دارای هسته‌ی مولد  $K$  در  $\lambda$  می‌باشد. ثابت می‌شود که هسته‌ی مولد  $K$  یکتا است (۳). اگر  $K$  یک تابع هسته‌ی اکیداً مثبت روی  $\Lambda$  باشد، آنگاه این هسته می‌تواند به یک فضای هیلبرت تابعی بر  $\Lambda$  با هسته‌ی مولد  $K$  گسترش یابد. برای مشاهده‌ی این مطلب، فرض کنید  $\mathcal{D}(\Lambda)$  یک زیر فضای خطی از  $\mathfrak{S}(\Lambda, L_{\mathbb{N}}^2)$  شامل همه‌ی توابع به صورت

$$f = \sum_{i=1}^k K(\lambda_i, \cdot) \xi_i, \quad \lambda_i \in \Lambda, \xi_i \in L_{\mathbb{N}}^2,$$

باشد. اگر  $g = \sum_{i=1}^m K(\lambda_i, \cdot) \eta_i$  تابع دیگری در  $\mathcal{D}(\Lambda)$  باشد و

$$\langle f, g \rangle = \left\langle \sum_{i,j=1}^m K(\lambda_i, \lambda_j) \xi_i, \eta_j \right\rangle$$

واضح است که  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  یک ضرب داخلی روی  $\mathcal{D}(\Lambda)$  می‌باشد. به علاوه یک دنباله‌ی کوشی در  $\mathcal{D}(\Lambda)$  همگرای نقطه‌ای است و تمم  $\mathcal{K}_K$  از  $\mathcal{D}(\Lambda)$  نسبت به  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  یک زیر فضای خطی از  $\mathfrak{S}(\Lambda, L_{\mathbb{N}}^2)$  می‌باشد. همچنین با توجه به ساختار  $\mathcal{K}_K$  مشخص می‌شود که  $K$  یک هسته‌ی مولد برای  $\mathcal{K}_K$  است. اگر  $K$  یک تابع هسته‌ی اکیداً مثبت باشد که معمولاً یک هسته‌ی باز مولد برای فضای هیلبرت تابعی  $\mathcal{K}$  بر  $\Lambda$  می‌باشد، آنگاه  $\mathcal{K}_K = \mathcal{K}$ .

فرض کنید  $\Lambda$  یک زیر مجموعه از  $\mathbb{C}$  و هر فضای هیلبرت تابعی روی  $\Lambda$  تحت نگاشت ضربی  $f: \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$  با ضابطه  $f(z) = \bar{z}$  پایا باشد. تحدیدی از این نگاشت برای چنین فضای هیلبرت تابعی با  $M_{\bar{z}}$  نمایش داده می‌شود.

فرض کنید  $\bar{\mathcal{U}}(\Lambda, L_{\mathbb{N}}^2)$  نمایش مجموعه‌ای از توابع هم - تحلیلی  $L_{\mathbb{N}}^2 -$ مقدار روی دامنه‌ی  $\Lambda$  در صفحه باشد. این مجموعه تحت نگاشت ضرب به وسیله‌ی  $\bar{z}$  پایا است. همه‌ی فضاهای هیلبرت تابعی روی  $\Lambda$  تحت  $M_{\bar{z}}$  پایا خواهد بود. یک فضای هیلبرت تابعی روی  $\Lambda$  که زیر فضای خطی از  $\bar{\mathcal{U}}(\Lambda, L_{\mathbb{N}}^2)$

متناظر با هسته‌ی برگمن تعمیم یافته، عملگر ون- نیومن باشد، آنگاه  $T$  انعکاس پذیر است.

**برهان:** می‌دانیم که  $T$  با الحاقی از عملگر  $M_{\bar{z}}^*$  بر  $\mathcal{K}$  هم ارز یکانی است.

اگر  $X \in \text{Alg Lat}(T)$ ، آنگاه  $\text{Lat}(T) \subseteq \text{Lat}(X)$ . یعنی اگر  $X \in \text{Alg Lat}(M_{\bar{z}})$ ، آنگاه  $\text{Lat}(M_{\bar{z}}) \subseteq \text{Lat}(X)$ .

از آن جایی که یک پیمای تک بعدی از  $\xi(\lambda, \cdot)K(\lambda, \cdot)$  تحت  $M_{\bar{z}}^*$  پایا است، پس تحت  $X^*$  هم پایا است در نتیجه  $\xi(\lambda, \cdot)K(\lambda, \cdot) = \overline{\varphi(\lambda)}K(\lambda, \cdot)$ . بنابراین برای هر  $f \in \mathcal{K}$  و  $\lambda \in \Omega$

$$\langle Xf, \xi(\lambda, \cdot)K(\lambda, \cdot) \rangle = \langle f, \xi(\lambda, \cdot)K(\lambda, \cdot) \rangle \\ = \langle f, \overline{\varphi(\lambda)}K(\lambda, \cdot) \rangle = \varphi(\lambda)f(\lambda).$$

پس برای بعضی از ضربگرهای  $\varphi$  داریم  $X = M_{\varphi}$ . چون  $\mathcal{K}$  یک فضای هیلبرت تابعی است پس  $X\mathcal{K} \subseteq \mathcal{K}$  در نتیجه  $XI = \varphi \in \mathcal{K}$ .

از طرف دیگر، برای هر  $\lambda \in \Omega$ ،  $\varphi(\lambda) \in \sigma(X)$ . پس  $\|\varphi(\lambda)\| \leq \|X\|$  و در نتیجه  $\varphi \in H^{\infty}(\Omega)$ . فرض کنید برای  $0 < t < 1$  داشته باشیم.

$G = \{z: t < |z| < 1\}$  و مجموعه‌ی  $M$  را به صورت زیر در نظر می‌گیریم؛

$$M = \left\{ f \in \mathcal{K}: \int_{|z|=r} z^n f(z) dz = 0, n \geq 0 \right\}$$

که در آن  $t < r < 1$ . واضح است که  $M \in \text{Lat}(M_{\bar{z}}) \subseteq \text{Lat}(X)$  و  $X = M_{\varphi}$ ، بنابراین  $M \in \text{Lat}(M_{\varphi})$ . توجه کنید که  $M_{\varphi}I = \varphi \in M$  زیرا  $I \in M$  همچنین،  $H^{\infty}(\Omega) \subseteq H^{\infty}(G)$  بنابراین  $\varphi \in H^{\infty}(G)$  و می‌توان  $\varphi$  را به صورت  $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$  نوشت که  $\varphi_1$  یک تابع تحلیلی کراندار روی  $U$  و  $\varphi_2$  یک تابع تحلیلی کراندار روی  $\{z: |z| > t\}$  می‌باشد که در بینهایت صفر است.

ارز یکانی است. در این بخش شرایط کافی روی الحاقی از مدل متعارف برای نشان دادن انعکاس پذیری عملگر  $T$ ، ارائه می‌گردد.

یادآوری می‌کنیم که زیر مجموعه‌ی فشرده‌ی  $K$  از  $\mathbb{C}$  را یک مجموعه طیفی برای عملگر  $T \in B(H)$  گوئیم، اگر  $\sigma(T) \subseteq K$ ،  $\|f(T)\| \leq \max\{|f(z)|: z \in K\}$  برای هر تابع گویای  $f$  با قطب‌های خارج از  $K$ .

لازم به ذکر است که عملگر خطی کراندار  $T: H \rightarrow H$  را یک عملگر ون-نیومن گوئیم هرگاه جبر  $C^*$  تولید شده توسط  $T$  یک جبر ون-نیومن باشد. ساراسون ثابت کرد که عملگرهای نرمال، انعکاسی هستند [۷]. بوسیله‌ی ددنس نشان داده شده است که هر ایزومتري انعکاسی است [۴].

همچنین الین و تامسن نشان داده‌اند که عملگرهای زیرنرمال، انعکاسی هستند [۶]. برکوئسی، فیلیاس، لانگسام و پیرسی نشان داده‌اند که عملگرهای (BCP) انعکاسی هستند [۱]. به وسیله‌ی ددنس و فیلمر عملگرهای انعکاسی روی یک فضای با بعد متناهی مورد بررسی قرار گرفته‌اند [۵]. انعکاس پذیری از انتقال‌های وزندار دوطرفه مطالعه و بررسی شده است [۹، ۱۱]. همچنین بعضی از شرایط کافی برای انعکاس پذیری عملگرهای ضربی روی فضاهای دیریشله تحقیق شده‌اند به خصوص که فضاهای باناخ توابع تحلیلی روی صفحه مورد بررسی قرار گرفته است [۱۰، ۱۲].

هدف ما در این قسمت مطالعه‌ی انعکاس پذیری  $T \in B_n(\Omega)$  می‌باشد که در آن  $\Omega$  یک دامنه‌ی کراندار است. گوی باز واحد در صفحه مختلط را با  $U$  نمایش می‌دهیم.

**قضیه ۳-۱:** فرض کنید  $K$  یک هسته‌ی برگمن تعمیم یافته بر دامنه‌ی  $\Omega \subseteq U$  شامل طوق  $G$  باشد به طوری که  $\partial U \subseteq \bar{\Omega} \cap \bar{G}$ . اگر مدل متعارف

چند جمله‌ای  $P$  جایگزین کنیم. باید اشاره کنیم که عملگرهایی از کلاس کاون-داگلاس در حالت کلی انعکاس‌پذیر نیستند زیرا هر عملگری از این کلاس هم‌ارز یکانی با الحاقی از عملگر غیر انعکاسی ضرب شده به وسیله  $\bar{z}$  است. ما نیازمند شرایط اضافی برای انعکاس‌پذیری  $T$  هستیم.

اکنون برای تمام  $|z| > t$  می‌توان نوشت:

$$\varphi_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} C_n z^n$$

چون  $\varphi \in M$ ، پس

$$\int_{|z|=r} z^n (\varphi_1(z) + \varphi_2(z)) dz = 0, \quad n \geq 0$$

در نتیجه

$$C_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} Z^{n-1} \varphi_2(z) dz = 0, \\ n = 1, 2, \dots$$

پس  $\varphi = \varphi_1 \in H^\infty(U)$  و  $\varphi_2 = 0$  چون  $U$  یک دامنه کاراتودوری است بنا به قضیه فارل-رابل-شیلدز یک دنباله کراندار یکنواخت  $P_n$  از چند جمله‌ای‌ها موجود است که به طور نقطه وار به  $\varphi$  در  $U$  همگرا است.

از آن جایی که  $T$  یک عملگر ون-نیومن است پس برای  $d > 0$ ،  $\|p_n(T)\| \leq \|P_n\|_\Omega \leq d$  چون گوی یکه‌ای از  $B(\mathcal{K})$  در توپولوژی ضعیف عملگرها فشرده است، با در نظر گرفتن زیر دنباله‌ای در صورت لزوم، در آن برای بعضی  $A$  در  $B(\mathcal{K})$  داریم  $P_n(T) \rightarrow A$

فرض کنید  $f = \sum_{i=1}^n K(\lambda_i, \cdot) \xi_i$  در  $\mathcal{D}(\Omega)$  باشد، در این صورت  $P_n(T)f = \sum_{i=1}^n P_n(\lambda_i) K(\lambda_i, \cdot) \xi_i$  به طور ضعیف به  $Af$  و در نرم به  $\sum_{i=1}^n \varphi(\lambda_i) K(\lambda_i, \cdot) \xi_i$  همگرا است. با تعریف  $M_\varphi(f)$  و این واقعیت که  $\mathcal{K}$  در  $\mathcal{D}(\Omega)$  چگال است نتیجه می‌گیریم که  $A = M_\varphi$ .

در نتیجه  $X = M_\varphi \in W(T)$  و این نشان می‌دهد که  $T$  انعکاس‌پذیر است.

**نتیجه ۳-۲:** در قضیه‌ی قبل فرض کردیم که الحاقی از مدل متعارف متناظر با هسته‌ی برگمن تعمیم یافته یک عملگر ون-نیومن می‌باشد. ما می‌توانیم آن را به وسیله‌ی فرضی که  $\|M_p\| \leq C\|P\|_\Omega$  یا  $\|M_p\| = \|p\|_\Omega$  برای هر

## فهرست منابع

- [11] B. Yousefi and Y.N. Dehghan, Reflexivity on weighted Hardy spaces, Southeast Asian Bulletin of Mathematics, 28 (2004), 587-593
- [12] B. Yousefi, Multiplication operators on Hilbert spaces of analytic functions, Archiv der Mathematic, 83 (2004), 536-539
- [13] B. Yousefi and S. Foroutan, On the multiplication operators on spaces of analytic functions, Studia Mathematica, 168 (2) (2005), 187-191.
- [14] K. Zhu, operators in Cowen-Douglas classes, Hlinios J. Math. 44 (2000), 767-783
- [1] H. Bercovici, C. Foias, J. Langsam, and C. Pearcy, (BCP)- operators are reflexive, Mich. Math. J.29 (1982), 371-379
- [2] M. J. Cowen and R. G. Douglas, Complex geometry and operator theory, Acta Math. 141 (1978), 187-261.
- [3] R. Curto and N. Salinas, Generalized Bergman kernels and the Cowen-Douglas theory, Amer. J. Math. 106 (1984), 447-448.
- [4] J. A. Deddens, Every isometry is reflexive, Proc. Amer. Math. Soc. 28 (1971), 509-512.
- [5] J. A. Deddens and P. A. Fillmore, Reflexive linear transformations, Linear Algebra and Appl. 10 (1975), 89-93.
- [6] R. Olin and J. Thomson, Algebras of subnormal operators, J. Functional Anal. 37 (1980), 271-301
- [7] D. Sarason, Invariant subspaces and unstarred operator algebras, Pasific J. Math. 17 (1966), 511-517
- [8] K. Seddighi, Von Neumann operators in  $B_1(\Omega)$ , Thesis, University of Indiana, 1981.
- [9] K. Seddighi and B. Yousefi, On the reflexivity of operators on function spaces, Proc. Math, Soc. 116 (1992), 45-52.
- [10] B. Yousefi, K. Seddighi and K. Hedayatian, On reflexivity of the multiplication operators on Dirichlet spaces, Math Japonica, 38 (1993), 1189-1194.