دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هشتم، شماره سی و نهم، آذر و دی ۱۴۰۱
شماره شاپا: ۲۵۸۸X-۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

مطالعه‌ی خاصیت (شبه-)مورفیک برای حلقه‌های توسیع‌های بدیهی

نجمه دهقانی[۱]، مجتبی صداقت‌جو[۲*]

[(۱و۲)] گروه ریاضی، دانشکده مهندسی سیستم‌های هوشمند و علوم داده، دانشگاه خلیج فارس، بوشهر، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۴۰۰/۰۶/۲۵ تاریخ پذیرش مقاله: ۱۴۰۱/۰۳/۱۱

چکیده

فرض کنید R یک حلقه و M یک $R \quad R$ دو مدول باشد. R شبه-مورفیک چپ نامیده می‌شود هرگاه به ازای هر $a \in R$، عناصر $b, c \in R$ موجود باشند به طوری که $l_R(a) = Rb$ و $l_R(c) = Ra$ (منظور از $l_R(x)$، پوچساز چپ x در R است). همچنین R مورفیک چپ نامیده می‌شود اگر در تعریف فوق بتوان عناصر b و c را مساوی اختیار کرد. در این مقاله، شرایطی را بررسی می‌کنیم که توسیع بدیهی $R \quad M$ از حلقه‌ی R توسط مدول M دارای خاصیت (شبه-)مورفیک می‌باشد. مثال‌هایی ارائه می‌دهیم که نشان می‌دهند خاصیت (شبه-) مورفیک از $R \quad M$ به حلقه‌ی R و مدول M منتقل نمی‌شود و برعکس. لذا شرایط لازم و کافی متعددی را برای (شبه-) مورفیک بودن $R \quad M$ به‌دست می‌آوریم. به عنوان مثال، نشان می‌دهیم خاصیت شبه-مورفیک چپ برای $R \quad M$ نتیجه می‌دهد که M_R بخش‌پذیراست. علاوه بر این، ثابت می‌کنیم اگر $R \quad M$ شبه-مورفیک چپ باشد و $x \in M$ چنان موجود باشد که $l_R(x) = ۰$ یا $r_R(x) = ۰$، آن‌گاه $_RM$ دوری است. به ویژه، اگر R یک حلقه‌ی جابجایی باشد آن‌گاه$R \quad M$ و R نیز مورفیک است. علاوه بر این، در حالتی که M به عنوان R-مدول چپ (راست) آزاد باشد نیز (شبه-)مورفیک بودن $R \quad M$ را بررسی می‌کنیم. نتیجتاً، قضیه‌ی زیر که ماحصل اصلی این مقاله است را به‌دست می‌آوریم: اگر R دامنه (نه لزوماً جابجایی) و $_RM$ آزاد باشد آنگاه $R \quad M$ (شبه-) مورفیک چپ است اگر و تنها اگر R حلقه‌ی بخشی و $_RR \quad _RM$. به عنوان کاربردی از این قضیه، نتیجه‌ای که توسط لی و ژو و همچنین توسط وَن آن به همراه همکارانش، به ترتیب در سال‌های ۲۰۰۷ و ۲۰۱۶، در مورد فضاهای برداری ثابت شد، به‌دست می‌آید.

واژه‌های کلیدی: پوچساز، دو مدول، توسیع بدیهی، شبه-مورفیک، مورفیک.

* عهده‌دار مکاتبات: Email: sedaghat@pgu.ac.ir

۱- مقدمه

در این مقاله، منظور از R، حلقه‌ای یکدار، شرکت‌پذیر و ناجابجایی می‌باشد مگر خلاف آن فرض شود. ابتدا به معرفی برخی از نمادهایی که در این مقاله مورد استفاده قرار می‌گیرند می‌پردازیم. فرض کنید M یک R-مدول چپ باشد. نمادهای $N \subseteq M$ و $N \leq M$ به ترتیب به معانی N زیرمجموعه‌ی M و N زیرمدول M می‌باشند. علاوه براین اگر X و Y دو R-مدول چپ باشند آن‌گاه مجموعه‌ی تمام R-همریختی‌های از X به Y را با نماد $Hom_R(X,Y)$ نمایش می‌دهیم و در حالتی که $X = Y$، از نماد $End_R(X)$ استفاده می‌کنیم. اگر $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از R-مدول‌های چپ باشند آن‌گاه مجموع و حاصل‌ضرب مستقیم این خانواده، به ترتیب با نمادهای $\bigoplus_{i\in I} M_i$ و $\prod_{i\in I} M_i$ نشان داده می‌شوند. اگر X زیرمجموعه‌ای از R باشد آن‌گاه منظور از $r_R(X)$ و $l_R(X)$ به ترتیب پوچسازهای راست و چپ X در R می‌باشد. به وضوح اگر R حلقه‌ای جابجایی باشد آن‌گاه پوچسازهای راست و چپ مجموعه‌ی X در R، با یکدیگر برابرند و لذا در این حالت از نماد $ann_R(X)$ استفاده می‌کنیم. همچنین تعداد اعضای مجموعه‌ی X با نماد $|X|$ نمایش داده می‌شود و منظور از . ، عدد اصلی مجموعه‌ی اعداد طبیعی می‌باشد. علاوه بر این، حلقه‌ی R را دامنه گویند هرگاه به ازای هر دو عنصر x و y از R، $xy = 0$ نتیجه دهد $x = 0$ یا $y = 0$. دامنه‌ی جابجایی R را دامنه‌ی صحیح گویند.

حلقه‌ی R را منظم فن‌نویمان[2](یا به اختصار منظم) گویند هرگاه به ازای هر $a \in R$، عنصر $r \in R$ موجود باشد به گونه‌ای که $a = ara$. این حلقه‌ها نخستین بار توسط فن‌نویمان در سال ۱۹۳۶ [۱]، هنگامی که وی در حال تحقیق و مطالعه بر روی جبرهای فن‌نویمان و همچنین C-جبرها بود شکل گرفتند. به دنبال آن، اهرلیچ[۲]، حلقه‌ی R را منظم یکه[3] نامید هرگاه به ازای هر $a \in R$، عنصر یکه‌ی $u \in R$ موجود باشد به طوری که $a = aua$. به وضوح هر حلقه‌ی منظم یکه، منظم است و همچنین ثابت شده که در حالت جابه‌جایی این دو مفهوم بر یکدیگر منطبق‌اند. اهرلیچ در قضیه‌ی ۱ از[۳]، ثابت کرد اگر M یک R-مدول چپ و $\alpha: M \to M$ یک R-همریختی باشد آن‌گاه $\alpha \in End_R(M)$ منظم یکه است اگر و تنها اگر $Ker\alpha \quad M/_{Im\alpha}$. لذا اگر در این قضیه قرار دهید $M = R$ آن‌گاه می‌دانیم که عنصر $a \in R$ موجود است به طوری که $Im\alpha = Ra$ و $Ker\alpha = l_R(a)$. بنابراین α منظم یکه است اگر و تنها اگر $l_R(a) \quad R/_{Ra}$. توجه کنید این امر بیانگر دوگان قضیه‌ی اول همریختی است. یادآوری می‌کنیم طبق قضیه‌ی اول همریختی، به ازای هر $a \in R$، همواره داریم

$$R/_{l_R(a)} \quad Ra.$$

لذا نیکلسون و کمپس[۴]، عناصری از حلقه‌ی R که در دوگان قضیه‌ی اول همریختی صدق می‌کنند را مورفیک چپ[4] نامیدند. همچنین حلقه‌هایی که تمام عناصر آن‌ها دارای این خاصیت هستند را مورفیک چپ نامیدند. به راحتی دیده می‌شود که R مورفیک چپ است اگر و تنها اگر به ازای هر $a \in R$، عضوی مانند $b \in R$ موجود باشد به طوری که $l_R(a) = Rb$ و $l_R(b) = Ra$. به دنبال آن، کامیلو و نیکلسون[۵]، مفهوم مورفیک را توسعه داده و حلقه‌هایی مانند R را در نظر گرفتند که شرط زیر برای آن برقرار باشد:

$$\{Ra \quad |a \in R\} = \{l_R(a) \quad |a \in R\}.$$

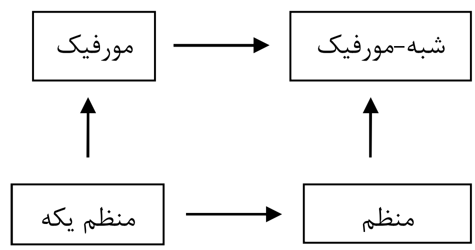
---

[2] Von-Neumann regular

[3] Unit-regular

[4] Left morphic

آن‌ها این دسته از حلقه‌ها را شبه-مورفیک[5] چپ نام‌گذاری کردند. به عبارت دیگر R شبه-مورفیک چپ است هرگاه به ازای هر $a \in R$، عناصر $b, c \in R$ موجود باشند به گونه‌ای که $Ra = l_R(b)$ و $l_R(a) = Rc$. حلقه‌های (شبه-) مورفیک راست نیز به طور مشابه تعریف می‌شوند. همچنین حلقه‌ی R را (شبه-)مورفیک گویند هرگاه (شبه-) مورفیک راست و چپ باشد. واضح است که هر حلقه‌ی مورفیک، شبه-مورفیک است. همچنین با توجه به مطالب بیان شده، ارتباط مستقیم بین حلقه‌های منظم (منظم یکه) و (شبه-) مورفیک وجود دارد. ثابت شده است که هر حلقه‌ی منظم، شبه-مورفیک و هر حلقه‌ی منظم یکه مورفیک است. جهت درک بهتر، ارتباط این حلقه‌ها با یکدیگر را در دیاگرام زیر خلاصه می‌کنیم:



توجه کنید روابط موجود در سطرها و ستون‌های دیاگرام فوق در حالت کلی برگشت پذیر نمی‌باشند. به عنوان مثال حلقه‌ی ۴ ، مورفیک است در حالی که منظم نیست. جهت مشاهده‌ی جزئیات بیشتر در این زمینه به منابع [۵] و [۶] مراجعه نمایید. علاوه بر این، طبق گزاره‌ی ۵ از [۴]، حلقه‌ی R منظم یکه است اگر و تنها اگر R منظم و مورفیک چپ (راست) باشد. همچنین نتیجه‌ی ۴ از [۵]، بیان می‌کند که در مورد حلقه‌های جابجایی، مفاهیم مورفیک و شبه-مورفیک بر هم منطبق‌اند. لذا در حالت جابجایی، سطرهای موجود در دیاگرام فوق برگشت‌پذیرند. لازم به ذکر است که مفاهیم مورفیک و شبه-مورفیک ازحلقه‌ها به مدول‌ها نیز تعمیم داده شده است که در بخش ۲ به بیان آن خواهیم پرداخت و همچنین در این خصوص می‌توان به [۷] نیز مراجعه نمود.

مسائل مختلفی پیرامون حلقه‌های (شبه-)مورفیک مطرح شده که تعدادی از آن‌ها به صورت جزئی و کامل مورد مطالعه قرار گرفته‌اند و برخی نیز به صورت سوال باز باقی مانده‌اند. همچنین با استناد به منابع [۸]، [۹]، [۱۰]، [۱۱]، [۱۲]،[۱۳] و[۱۴]، این حلقه‌ها در مطالعه و مشخص‌سازی حلقه‌هایی همچون نوتری[6]، نیم‌ساده‌ی آرتینی[7] و کامل[8] مورد مطالعه قرار گرفته‌اند.

طبق مثال ۲ از [۶]، حاصل‌ضرب حلقه‌های مورفیک چپ و منظم، شبه-مورفیک چپ است. در ادامه این سوال مطرح می‌شود:

«آیا حلقه‌ی شبه-مورفیکی وجود دارد که نه مورفیک و نه منظم باشد و نه حاصل‌ضربی از این دو نوع حلقه باشد؟»

در راستای پاسخ به سوال فوق، خاصیت (شبه-) مورفیک برای حلقه‌ی $R[x]/(x^{n+1})$، به ازای $n \geq ۱$، مورد توجه قرار گرفت که در این خصوص، به عنوان مثال می‌توان به منابع [۸]، [۱۱] و [۱۲] مراجعه کرد. همچنین لی و ژو در [۱۳]، مثالی ارائه دادند که نشان می‌دهد پاسخ سوال فوق مثبت است. علاوه بر این در قضیه‌ی ۱۱ از [۱۳]، مشخص سازی‌ای برای حلقه‌های منظم یکه به این صورت به‌دست آوردند که: به ازای عدد طبیعی $n \geq ۱$، حلقه‌ی R منظم یکه است اگر و تنها اگر $R[x]/(x^{n+1})$ مورفیک باشد. به دنبال آن،

---

[5] Quasi-morphic

[6] Noetherian

[7] Semisimple Artinian

[8] Perfect

خاصیت (شبه-) مورفیک برای حلقه‌ی چند جمله‌ای‌های کج $R[x,\sigma]/(x^{n+۱})$، نیز مورد مطالعه و تحقیق قرار گرفته است. توجه کنید منظور از σ، همریختی حلقه‌ای روی R و همچنین $n \geq ۱$ می‌باشد. جهت مشاهده‌ی جزئیات بیشتر به [۱۵] مراجعه نمایید.

یکی دیگر از انواع توسیع‌های حلقه‌ای مهم و پرکاربرد توسیع بدیهی از یک حلقه توسط یک مدول می‌باشد. فرض کنید M یک R R دومدول[9] باشد. منظور از توسیع بدیهی[10] از حلقه‌ی R توسط مدول M که با نماد R M نمایش داده می‌شود، در واقع همان حاصل‌ضرب دکارتی $R \times M$ می‌باشد با این تفاوت که جمع روی این حلقه، همان جمع مؤلفه‌ای در نظر گرفته می‌شود در حالی که ضرب آن متفاوت از ضرب مؤلفه‌ای است. در بخش ۲ از این مقاله، به طور کامل در مورد جزئیات و ساختار این حلقه توضیح خواهیم داد. این دسته از حلقه‌ها به طور گسترده جهت یافتن مثال‌های نقض در نظریه‌ی حلقه‌ها کاربرد دارند. در این خصوص به عنوان مثال، می‌توان به منابع[۱۶] و [۱۷] اشاره کرد. همچنین در دیگر زمینه‌های مختلف تحقیقاتی همچون نظریه هم-همولوژی[11]، نظریه نمایش[12] و نظریه رسته‌ها[13] کاربرد دارند. در [۱۸] نیز ساختار برخی از ایده‌آل‌های مهم این حلقه‌ها مشخص شده است.

توجه کنید این حلقه‌ها با حلقه‌ی چندجمله‌ای‌ها ارتباط مستقیم دارند. به سادگی دیده می‌شود $R[x]/(x^۲)$ R R. لذا با توجه به مطالب گفته شده، سوالی به صورت زیر مطرح می‌شود:

سوال: *فرض کنید M یک R Rدو مدول باشد. چه وقت حلقه‌ی توسیع بدیهی R M دارای خواص مورفیک و یا شبه-مورفیک است؟*

چن و ژو در [۸]، سوال فوق را در مورد توسیع بدیهی R R بررسی کرده‌اند. به عنوان مثال ثابت کردند اگر R حلقه‌ای نیم‌ساده باشد آن‌گاه R R مورفیک است. همچنین طبق نتیجه‌ی ۹ از [۸]، حلقه‌ی n n مورفیک است اگر و تنها اگر n حاصل‌ضربی از اعداد اول متمایز باشد.

لذا مطالعات صورت گرفته در این راستا باعث ایجاد انگیزه‌ای برای ما شد که در این مقاله به بررسی هر چه بیشتر این امر بپردازیم که به طور کلی چه ارتباطی بین (شبه-)مورفیک بودن حلقه‌ی R M و همچنین (شبه-)مورفیک بودن حلقه‌ی R و دو مدول M وجود دارد. ابتدا مثال‌هایی ارائه می‌دهیم که نشان می‌دهند ممکن است حلقه‌ی R مورفیک چپ و راست باشد و همچنین مدول‌های $_RM$ و M_R نیز هر دو مورفیک باشند در حالی که توسیع بدیهی R M شبه-مورفیک نباشد و به طور مشابه برعکس. در میان نتایج به‌دست آمده، به عنوان نمونه، ثابت خواهیم کرد که اگر R M مورفیک چپ باشد و عنصر $x \in M$ چنان موجود باشد که $l_R(x) = ۰$ آن‌گاه $_RR$ $_RM$. همچنین خاصیت (شبه-)مورفیک برای توسیع بدیهی از یک حلقه توسط یک مدول آزاد را نیز بررسی می‌کنیم. در این راستا، به عنوان مثال، ثابت می‌کنیم اگر R یک دامنه و M یک دو مدول روی R باشد به طوری که به عنوان R-مدول چپ آزاد باشد آن‌گاه R M مورفیک است اگر و تنها اگر R M شبه-مورفیک باشد اگر و تنها اگر R حلقه‌ی بخشی و $_RR$ $_RM$. لازم به ذکر است که این نتیجه، تعمیم گزاره‌های ۱۱ و ۲.۱ به ترتیب از مراجع [۱۲] و [۱۴] می‌باشد.

---

9 Bimodule
10 Trivial extension
11 Co-homology
12 Representation theory
13 Category theory

۲- حلقه‌های توسیع‌های بدیهی و برخی ویژگی‌های آن‌ها

در این بخش به معرفی هر چه بیشتر حلقه‌های توسیع‌های بدیهی و همچنین برخی از ویژگی‌ها و قضایای مرتبط با آن‌ها که در این مقاله مورد نیاز هستند می‌پردازیم.

تعریف ۲-۱. فرض کنید R یک حلقه و M یک R R دو مدول باشد. حاصل‌ضرب دکارتی $R \times M$ را در نظر بگیرید. عمل جمع روی این مجموعه را همان جمع مؤلفه‌ای تعریف کنید و ضرب بین دو عنصر دلخواه (r,x) و (s,y) از $R \times M$ را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$(r,x)(s,y) = (rs, ry + xs).$$

واضح است که مجموعه‌ی $R \times M$ همراه با اعمال جمع و ضرب فوق به یک حلقه تبدیل می‌شود که آن را با نماد $R \quad M$ نمایش می‌دهند.
توجه کنید عناصر همانی تحت جمع و ضرب این حلقه به ترتیب (۰,۰) و (۱,۰) می‌باشند. به راحتی دیده می‌شود که R با زیرحلقه‌ای از $R \quad M$ و همچنین M با زیرگروهی از $R \quad M$ یکریخت می‌باشند. لذا این حلقه را «توسیع بدیهی ازحلقه‌ی R توسط مدول M» و یا به اختصار حلقه‌ی توسیع بدیهی می‌نامند. اکنون در زیر به بیان چند نکته قابل توجه می‌پردازیم. لازم به ذکر است در سراسر این مقاله، R یک حلقه‌ی یکدار نابدیهی و M یک R R دو مدول ناصفر است. لذا در نتایج زیر از ذکر این مطلب، به دلیل جلوگیری از تکرار، خودداری شده است.

نکته ۲-۲. (۱) به سادگی می‌توان دید که حلقه‌ی $R \quad M$ جابجایی است اگر و تنها اگر R حلقه‌ای جابجایی باشد.

(۲) با اثباتی سر راست دیده می‌شود که عناصر وارون‌پذیر در حلقه‌ی $R \quad M$ دقیقاً زوج مرتب‌هایی هستند که مولفه‌ی اول آن‌ها در R وارون‌پذیر باشند.

(۳) قابل توجه است که حلقه‌های توسیع‌های بدیهی با حلقه‌های ماتریسی و همچنین حلقه‌های چند جمله‌ای، ارتباط مستقیم دارند. به این صورت که حلقه‌ی توسیع بدیهی $R \quad M$ با زیرحلقه‌ی $\left\{\begin{pmatrix} r & m \\ 0 & r \end{pmatrix} \mid r \in R, m \in M\right\}$ از حلقه‌ی ماتریس‌های بالا مثلثی $\begin{pmatrix} R & M \\ 0 & R \end{pmatrix}$ یکریخت است.

در ادامه به ارتباط بین حلقه‌ی توسیع بدیهی $R \quad R$ با حلقه‌های چند جمله‌ای می‌پردازیم. لذا، ابتدا چند مطلب را یادآوری می‌کنیم. فرض کنید $\sigma: R \to R$ یک همریختی حلقه‌ای باشد. حلقه‌ی چند جمله‌ای‌های کج[14] $R[x,\sigma]$ مجموعه‌ی تمام چند جمله‌ای‌های چپ به شکل

$$a_0 + a_1 x + \quad + a_n x^n$$

با ضرایب $a_0, a_1, \quad, a_n$ در R تعریف می‌شود. جمع این حلقه بر طبق معمول و ضرب آن با استفاده از رابطه‌ی $xr = \sigma(x)r$، برای هر $r \in R$ تعریف می‌شود. حال منظور از $R \quad R$ دو مدول $\sigma(R)$ در واقع همان حلقه‌ی R می‌باشد با این تفاوت که ضرب R-مدولی راست آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\forall a \in \sigma(R),\ \ \forall r \in R, \quad ar = a\sigma(r).$$

توجه کنید ساختار R-مدولی چپ آن همان ساختار مدول ${}_RR$ می‌باشد. اکنون به بیان قضیه‌ای از [۸]، می‌پردازیم که حلقه‌های توسیع بدیهی و حلقه‌های چند جمله‌ای را به هم مرتبط می‌سازد.

[14] Skew polynomial rings

قضیه۲-۳ (بخش ۲،[۸]) از فرض کنید R یک حلقه باشد. در این صورت موارد زیر برقرارند.

(الف) $R[x]\big/(x^{۲}) \quad R \quad R$.

(ب) $R[x,\sigma]\big/(x^{۲}) \quad R(\sigma) \quad R$.

در ادامه به برخی نتایج به‌دست آمده در مورد (شبه-)مورفیک بودن حلقه‌ی توسیع بدیهی $R \quad R$ می‌پردازیم که در بخش بعدی مقاله به آن‌ها نیاز خواهیم داشت.

قضیه۲-۴ (قضیه‌ی ۱۹، [۸] و نتیجه‌ی ۲.۳، [۱۴]) اگر R یک حلقه و $R \quad R$ (شبه-)مورفیک چپ باشد آن‌گاه R نیز (شبه-)مورفیک چپ است.

قضیه‌ی زیر که از منبع [۱۳] گرفته شده است حلقه‌های منظم یکه را با استفاده از مفهوم مورفیک مشخص‌سازی می‌کند.

قضیه۲-۵ (قضیه‌ی ۱۱، [۱۳]) فرض کنید R یک حلقه و $n \geq 1$. در این صورت حلقه‌ی $R[x]\big/(x^{n+۱})$ مورفیک است اگر و تنها اگر R منظم یکه باشد.

نتیجه ۲-۶. فرض کنید R یک حلقه باشد. حلقه‌ی $R \quad R$ مورفیک است اگر و تنها اگر R منظم یکه باشد.

اثبات. بنابر قضیه‌ی۲-۳، داریم:

$$R[x]\big/(x^{۲}) \quad R \quad R.$$

اکنون کافی است قضیه‌ی ۲-۵ را به کار ببرید.□

قضیه ۲-۷(قضیه‌ی ۴،[۱۳]) اگر R حلقه‌ای منظم باشد آن‌گاه به ازای هرعدد صحیح $n \geq ۰$، حلقه‌ی $R[x]\big/(x^{n+۱})$، شبه- مورفیک است.

توجه کنید عکس قضیه‌ی ۲-۷، به عنوان یک سوال باز مطرح است. (سوال ۱ از [۱۳] را ببینید.)

نتیجه۲-۸. اگر R حلقه‌ای منظم باشد آن‌گاه $R \quad R$ شبه-مورفیک است.

اثبات. این نتیجه از قضایای ۲-۷ و ۲-۳پیروی می‌کند. □

فرض کنید $\sigma: R \to R$ یک همریختی حلقه‌ای باشد. با در نظر گرفتن قضیه‌ی ۲-۳، قضیه‌ی زیر نشان می‌دهد که چه وقت حلقه‌ی $R(\sigma) \quad R$ شبه-مورفیک چپ است. همچنین این قضیه که در مرجع [۱۳] اثبات شده است تعمیمی از قضیه‌ی ۵.۲ می‌باشد.

قضیه۲-۹ (نتیجه‌ی۱۶،[۱۳]) فرض کنید R حلقه‌ای منظم و $\sigma: R \to R$ همریختی حلقه‌ای باشد طوری که به ازای هر عنصر $e^2 = e \in R$، داشته باشیم $\sigma(e) = e$. در این صورت حلقه‌ی $R[x,\sigma]\big/(x^{۲})$ شبه-مورفیک چپ است.

گزاره۲-۱۰ (گزاره‌ی ۲.۴،[۱۴]) فرض کنیدR یک دامنه و M یک $R \quad R$ دو مدول باشد. حلقه‌ی $S = R \quad M$ را در نظر بگیرید. در این صورت حلقه‌ی $S \quad S$ شبه-مورفیک چپ نیست.

این بخش را با بیان قضیه‌ای از مرجع [۸]، که دقیقاً مشخص می‌کند به ازای گروه آبلی G، حلقه‌ی G چه وقت مورفیک است، به پایان می‌رسانیم.

قضیه۲-۱۱ (قضیه‌ی۱۴، [۸] و مثال۱۲،[۴])
(۱) فرض کنید G یک گروه آبلی باشد. حلقه‌ی G مورفیک است اگر و تنها اگر / G.

(۲) به ازای هر عدد طبیعی $n \geq ۲$، حلقه‌ی n مورفیک است.
قابل توجه است که قضیه‌ی فوق برای حالتی که R دامنه‌ی ایده‌آل اصلی جابجایی (PID) باشد نیز قابل تعمیم است (قضیه‌ی ۱۴از [۱۲]).

۳- نتایج اصلی

اکنون به بررسی این امر می‌پردازیم که به طور کلی چه وقت توسیع بدیهی $R \quad M$ دارای خاصیت مورفیک و یا شبه-مورفیک است. لذا این بخش به بیان نتایج اصلی به‌دست آمده در این راستا اختصاص دارد.
ابتدا سوالی که پیش می‌آید این است که «آیا خاصیت (شبه-)مورفیک از حلقه‌ی $R \quad M$ به حلقه‌ی R و مدول‌های M_R یا $_RM$ منتقل می‌شود و یا برعکس؟» برای پاسخ دادن به این سوال، نیاز داریم که ابتدا اشاره‌ای به مفهوم (شبه-)مورفیک برای مدول‌ها داشته باشیم. در [۱۴]، مفهوم شبه-مورفیک به صورت زیر از حلقه‌ها به مدول‌ها تعمیم داده شده است.

تعریف۳-۱. فرض کنید R یک حلقه و M یک R-مدول چپ باشد. مدول $_RM$ را شبه-مورفیک گویند هرگاه به ازای هر R-همریختی مانند $f \in End_R(M)$، همریختی‌های $g,$ از حلقه‌ی $End_R(M)$ موجود باشند به گونه‌ای که شرایط زیر برقرار باشند:

$$Imf = Kerg,$$
$$Kerf = Im \;.$$

اگر درتعریف فوق، بتوان R-همریختی‌های g و را مساوی اختیار کرد آن‌گاه R-مدول M را مورفیک گویند[۷]. همچنین به راحتی دیده می‌شود که R-مدول M مورفیک است اگر و تنها اگر به ازای هر همریختی $f \in End_R(M)$، داشته باشیم $M/_{Imf} \quad Kerf$. علاوه بر این با توجه به مطالب بیان شده در مورد حلقه‌های (شبه-) مورفیک درمی‌یابیم که حلقه‌ی R (شبه-)مورفیک چپ است اگر و تنها اگر $_RR$ (شبه-)مورفیک باشد.
اکنون به بیان لم زیر جهت استفاده در نتایج بعدی، می‌پردازیم.

لم۳-۲. فرض کنید R یک حلقه و $\{M_i\}_{i\in I}$ خانواده‌ای از R-مدول‌های چپ باشد به طوری که به ازای هر $i \neq j$، داشته باشیم $Hom_R(M_i, M_j) = ۰$. در این صورت $\bigoplus_{i\in I} M_i$ (شبه-) مورفیک است اگر و تنها اگر هر M_i (شبه-) مورفیک باشد.

اثبات. از آن‌جا که تکنیک اثبات مساله در هر دو حالت مورفیک و شبه-مورفیک مشابه یکدیگر می‌باشد بنابراین فقط اثبات حالت شبه-مورفیک را می‌نویسیم. فرض کنید $\bigoplus_{i\in I} M_i$ شبه-مورفیک باشد. نشان می‌دهیم هر کدام از M_i ها نیز دارای این خاصیت هستند. برای این منظور، $i \in I$ را به دلخواه در نظر می‌گیریم. همچنین فرض کنید $\alpha_i: M_i \to M_i$ یک R-همریختی دلخواه باشد. اکنونR-همریختی زیر را در نظر بگیرید:

$$\alpha \quad \iota_i\alpha_i\pi_i: \bigoplus_{i\in I} M_i \to \bigoplus_{i\in I} M_i$$

توجه کنید منظور از $\iota_i: M_i \to \bigoplus_{i\in I} M_i$ و $\pi_i: \bigoplus_{i\in I} M_i \to M_i$، به ترتیب، همان تکریختی و بروریختی‌های طبیعی می‌باشند. حال با توجه به شبه-مورفیک بودن $\bigoplus_{i\in I} M_i$، R-همریختی‌های $g, \quad : \bigoplus_{i\in I} M_i \to \bigoplus_{i\in I} M_i$ موجودند به طوری که $Im \quad = Ker\alpha$ و $Im\alpha = Kerg$.
اکنون طبق فرض مساله، به ازای هر $t \neq s$، داریم $Hom_R(M_t, M_s) = ۰$. لذا با توجه به این امر،

نتیجه می‌گیریم $(M_i) \subseteq M_i$ و همچنین $g(M_i) \subseteq M_i$. حال قرار دهید $_i = |_{M_i}$ و $g_i = g|_{M_i}$. با اثباتی سر راست دیده می‌شود که $Im\ _i = Ker\alpha_i$ و $Im\alpha_i = Kerg_i$. بنابراین M_i شبه-مورفیک است.

برای اثبات عکس، فرض کنید تمام M_iها شبه-مورفیک باشند. نشان می‌دهیم $\bigoplus_{i\in I} M_i$ نیز شبه-مورفیک است. برای این منظور فرض کنید $\alpha: \bigoplus_{i\in I} M_i \rightarrow \bigoplus_{i\in I} M_i$ یک R-همریختی دلخواه باشد. به ازای هر $i \in I$، به ترتیب، تکریختی‌ها و برویختی‌های طبیعی ι_i و π_i را در نظر بگیرید. قرار می‌دهیم $\alpha_i = \pi_i \alpha \iota_i$. به وضوح هر $\alpha_i: M_i \rightarrow M_i$ یک R-همریختی است. از آن‌جایی که طبق فرض، M_iها همگی شبه-مورفیک هستند لذا به ازای هر $i \in I$، همریختی‌های $g_i,\ _i \in End_R(M_i)$ موجودند به طوری که $Im\ _i = Ker\alpha_i$ و همچنین $Im\alpha_i = Kerg_i$.

اکنون قرار می‌دهیم $= \bigoplus_{i\in I}\ _i$ و $g = \bigoplus_{i\in I} g_i$. به وضوح داریم:

$, g \in End_R(\bigoplus_{i\in I} M_i).$

حال با اثباتی سر راست ثابت می‌شود که $Im\ = Ker\alpha$ و $Im\alpha = Kerg$. □

در ادامه با ارائه‌ی دو مثال، به سوالی که در ابتدای بخش ۳ مطرح کردیم پاسخ خواهیم داد. در واقع در مثال زیر نشان می‌دهیم که اگر R حلقه‌ای مورفیک و M یک دو مدول ناصفر روی R باشد به طوری که M_R و $_RM$ هر دو مورفیک باشند آن‌گاه حلقه‌ی توسیع بدیهی $R \quad M$ لزوماً شبه-مورفیک چپ (یا راست) نیست.

مثال ۳-۳. حلقه‌ی بخشی[15] D را در نظر بگیرید. قرار دهید $R = D \quad D$. می‌دانیم که

$\dim({}_DD) = ۱ = \dim(D_D)$ ..

لذا بنابر نتیجه‌ی ۳-۱۴(که در ادامه‌ی این بخش به آن خواهیم پرداخت)، در می‌یابیم که حلقه‌ی R مورفیک چپ و راست است در حالی که بنابر گزاره‌ی ۲-۱۲، حلقه‌ی توسیع بدیهی $R \quad R$ حتی شبه-مورفیک چپ هم نیست.

در مثال بعدی خواهیم دید که ممکن است حلقه‌ی توسیع بدیهی $R \quad M$ (شبه-)مورفیک باشد در حالی که حلقه‌ی R و مدول‌های M_R و $_RM$ هیچ کدام خاصیت (شبه-)مورفیک را ندارند.

مثال ۳-۴. حلقه‌ی توسیع بدیهی $S = \quad / \quad$ را در نظر بگیرید. بنابر قسمت (۱) از قضیه‌ی ۲-۱۱، S یک حلقه‌ی مورفیک جابجایی است. توجه کنید در لم ۱ از [۵]، این امر ثابت شده است که اگر R یک دامنه و شبه-مورفیک چپ باشد آن‌گاه R حلقه‌ی بخشی است. لذا نتیجه می‌شود که (شبه-)مورفیک نیست. اکنون ثابت می‌کنیم که گروه آبلی $/$ نیز شبه-مورفیک نیست. برای این منظور، به خلاف فرض کنید $/$ به عنوان - مدول شبه-مورفیک باشد. می‌دانیم که

$\bigoplus_{p\in P}\ _{p^\infty} \qquad / \ .$

توجه کنید که منظور از P، در واقع مجموعه‌ی تمام اعداد اول متمایز است. از آن‌جایی که به ازای هر دو عدد اول متمایز مانند p و q، داریم $Hom\ (\ _{p^\infty},\ _{q^\infty}) = ۰$، لذا بنابر لم ۲.۳، به ازای هر عدد اول p، گروه آبلی $_{p^\infty}$ نیز می‌بایست شبه-مورفیک باشد. حال همریختی گروهی $f:\ _{p^\infty} \rightarrow\ _{p^\infty}$ را با ضابطه‌ی $f(x) = px$ در نظر بگیرید. واضح است که $Kerf =\ _p$. لذا بنابر

[15] Division ring

شبه-مورفیک بودن گروه آبلی $_{p^\infty}$ ، همریختی گروهی $g: \ _{p^\infty} \to \ _{p^\infty}$ چنان موجود است که $Img = Kerf = \ _p$.

بنابراین $g \in Hom\left(\ _{p^\infty}, \ _p\right) = ۰$ و این امر یک تناقض است.

در ادامه به بررسی این امر می‌پردازیم که تحت چه شرایطی حلقه‌ی توسیع بدیهی $R \ \ M$ (شبه-)مورفیک است. در این خصوص به گزاره‌ی زیر توجه نمایید.

گزاره۳-۵. فرض کنید $R \ \ M$ مورفیک چپ باشد. در این صورت موارد زیر برقرارند:

(الف) اگر $x \in M$ و $r_R(x) = ۰$، آن‌گاه $l_R(x) = ۰$.

(ب) اگر $x \in M$ چنان موجود باشد که $l_R(x) = ۰$، آن‌گاه $R \ \ M = Rx$.

اثبات. فرض کنیم $S := R \ \ M$ مورفیک چپ باشد. با اثباتی سر راست دیده می‌شود که به ازای هر $m \in M$، همواره داریم:

$$l_S\left(\left(\cdot, m\right)\right) = l_R(m) \ \ M,$$
$$S\left(\cdot, m\right) = \cdot \ \ Rm.$$

(الف) فرض کنیم $x \in M$ و $r_R(x) = ۰$. از آن‌جا که S مورفیک چپ است لذا عنصر $(s, y) \in S$ موجود است به طوری که

$$l_S\left(\left(\cdot, x\right)\right) = S(s, y),$$
$$S\left(\cdot, x\right) = l_S((s, y)).$$

بنابراین $\left(\cdot, x\right)(s, y) = ۰$ و در نتیجه $s \in r_R(x) = ۰$. اکنون با توجه به نکته‌ای که در ابتدای اثبات به آن اشاره کردیم نتیجه می‌گیریم که:

$$l_R(x) \ \ M = l_S((0, x)) = S(0, y) = 0 \ \ Ry.$$

بنابراین از رابطه‌ی فوق نتیجه می‌گیریم $l_R(x) = ۰$.

(ب) فرض کنیم $x \in M$ و $l_R(x) = ۰$. طبق آن‌چه در روند اثبات قسمت (الف) دیدیم نتیجه می‌شود عنصری مانند $(s, y) \in S$ موجود است که $l_S\left(\left(\cdot, x\right)\right) = S(s, y)$ و همچنین $S\left(\cdot, x\right) = l_S((s, y))$. لذا نتیجه می‌گیریم:

$$S(s, y) = l_S\left(\left(\cdot, x\right)\right) = l_R(x) \ \ M = \cdot \ \ M.$$

بنابراین $s = ۰$ و در نتیجه:

$$\cdot \ \ Rx = S\left(\cdot, x\right) = l_S\left(\left(\cdot, y\right)\right) = l_R(y) \ \ M.$$

لذا از رابطه‌ی فوق، به وضوح به‌دست می‌آوریم.
$M = Rx \ \ R.$

مثال زیر نشان می‌دهد که در هر دو قسمت‌های (الف) و (ب) از گزاره‌ی ۳-۵، نمی‌توان شرط «شبه-مورفیک» را جایگزین شرط «مورفیک» کرد.

مثال۳-۶. فرض کنید V یک فضای برداری روی حلقه‌ی بخشی D باشد و $\dim({}_DV) =$. همچنین فرض کنید $\{v_۱, v_۲, \}$ پایه‌ای برای ${}_DV$ باشد. قرار می‌دهیم $R = End_D(V)$. توجه کنید R حلقه‌ای منظم است اما منظم یکه نیست زیرا بعد ${}_DV$ نامتناهی است. بنابراین طبق نتیجه ۲-۱۰، حلقه‌ی $R \ \ R$ شبه-مورفیک است در حالی که مورفیک چپ نیست. زیرا اگر $R \ \ R$ مورفیک چپ باشد آن‌گاه طبق قضیه‌ی ۲-۶ حلقه‌ی R باید مورفیک چپ باشد. توجه کنید گزاره‌ی ۵ از [۴]، بیان می‌کند که حلقه‌های مورفیک چپ و منظم

دقیقاً همان حلقه‌های منظم یکه هستند. لذا با توجه به این امر R باید منظم یکه باشد در حالی که این امر یک تناقض است. بنابراین حلقه‌ی $R \quad R$ حلقه‌ای شبه-مورفیک است که مورفیک(چپ) نیست. حال نشان می‌دهیم هر دو قسمت‌های (الف) و (ب) از گزاره‌ی فوق برای حلقه‌ی $R \quad R$ برقرار نیست.

(۱) نشان می‌دهیم قسمت (الف) از گزاره‌ی فوق با شرط شبه-مورفیک برقرار نیست. برای این منظور، تبدیل خطی f روی V را با ضابطه‌ی $f(v_i) = v_{i+1}$، به ازای هر $i \geq 1$، در نظر بگیرید. به وضوح f تبدیل خطی یک به یک است و در نتیجه $r_R(f) = 0$. در حالی که به سادگی می‌توان دید $l_R(f)$ ناصفر است.

(۲) در این قسمت، نشان می‌دهیم قسمت (ب) از گزاره‌ی ۳-۵، برای حالت شبه-مورفیک لزوماً برقرار نیست. برای این منظور تبدیل خطی $f: V \to V$ را با ضابطه‌ی $f(v_1) = v_1$ و به ازای هر $i \geq 2$، $f(v_i) = v_{i-1}$. از آن‌جا که f یک تبدیل خطی پوشاست لذا $l_R(f) = 0$. در حالی که با توجه به این امر که یکریختی نیست نتیجه می‌شود $R \neq Rf$.

نکته ۳-۷. توجه نمایید در ادامه، نتیجه‌ای مشابه گزاره‌ی ۵.۳، برای حالت شبه-مورفیک نیز اثبات خواهیم کرد (گزاره ۳-۱۰را ببینید). در گزاره‌ی ۳-۱۰، در واقع نشان می‌دهیم اگر $R \quad M$ شبه-مورفیک چپ باشد و عنصر $x \in M$ چنان موجود باشد که $l_R(x) = 0$، آن‌گاه ${}_RM$ دوری است در حالی که همان‌گونه که در قسمت (۲) از مثال قبل هم دیدیم، M به عنوان R-مدول چپ لزوماً توسط عنصر x تولید نمی‌شود.

اکنون کاربردی از گزاره‌ی ۳-۵ را در قالب نتیجه‌ی زیر بیان می‌کنیم.

نتیجه ۳-۸. فرض کنید R یک حلقه و F یک $R \quad R$ دو مدول باشد. اگر حلقه‌ی $R \quad F$ مورفیک چپ باشد آن‌گاه موارد زیر برقرارند:

(الف) اگر ${}_RF$ آزاد با پایه‌ی X باشد آن‌گاه $|X| = 1$.

(ب) اگر F_R آزاد باشد آن‌گاه ${}_RF$ نیز آزاد است.

اثبات. (الف) فرض کنید ${}_RF$آزاد و X پایه‌ای برای آن باشد. در این صورت، به ازای هر $x \in X$، داریم $l_R(x) = 0$. بنابراین طبق گزاره‌ی ۳-۵، $F = R$ و در نتیجه مجموعه‌ی تک عضوی $\{x\}$پایه برای ${}_RF$ است. لذا $|X| = 1$.

(ب) فرض کنید F_R آزاد باشد و Y پایه‌ای برای آن باشد. بنابراین به ازای هر $y \in Y$، $r_R(y) = 0$ و لذا مجدداً از گزاره‌ی ۳-۵، نتیجه می‌شود $l_R(y) = 0$. بنابراین $F = Ry$ و این نشان می‌دهد که $\{y\}$ پایه‌ای برای ${}_RF$ است. □

توجه کنید در نتیجه‌ی فوق، شرط «شبه-مورفیک» را نمی‌توان جایگزین شرط «مورفیک» کرد. برای این منظور به مثال زیر توجه نمایید.

مثال ۳-۹. فرض کنید V یک فضای برداری روی حلقه‌ی بخشی D با بعد باشد. در مثال ۳-۶، دیدیم که اگر $R = End_D(V)$، آن‌گاه $R \quad R$ حلقه‌ی شبه-مورفیک است که مورفیک نیست. توجه کنید این یک امر شناخته شده است که ${}_RR$ با R-مدول چپ $R \oplus R$ یکریخت است. در نتیجه به ازای هر عدد طبیعی $n \geq 1$، ${}_RR$ دارای پایه‌ای با n عضو است.

جهت درک بهتر، گزاره‌ی زیر را با گزاره‌ی ۳-۵ مقایسه نمایید.

گزاره ۳-۱۰. فرض کنید حلقه‌ی $R \quad M$ شبه-مورفیک چپ باشد. در این صورت اگر عنصر

$x \in M$ موجود باشد که $l_R(x) = ۰$ و یا $r_R(x) = ۰$، آن‌گاه $_RM$ دوری است.

اثبات. فرض کنید $S \quad R \quad M$ شبه-مورفیک چپ باشد. همچنین $x \in M$ را طوری در نظر بگیرید که $l_R(x) = ۰$ یا $r_R(x) = ۰$. لذا عناصر (r, m) و (s, n) از حلقه‌ی S چنان موجودند که:

$$l_S\left(\left(۰, x\right)\right) = S(s, n),$$
$$l_S((r, m)) = S\left(۰, x\right).$$

همان‌گونه که در ابتدای اثبات گزاره‌ی ۵.۳ نیز توضیح دادیم، با اثباتی ساده روابط زیر به‌دست می‌آیند:

$$S\left(۰, x\right) = ۰ \quad Rx,$$
$$l_S\left(\left(۰, x\right)\right) = l_R(x) \quad M.$$

اکنون حالتی را در نظر بگیرید که $r_R(x) = ۰$. از آن‌جا که $\left(۰, x\right)(r, m) = ۰$، نتیجه می‌شود $r \in r_R(x) = ۰$ و بنابراین روابط زیر را به‌دست می‌آوریم:

$$۰ \quad Rx = S\left(۰, x\right) = l_S\left(۰, m\right) = l_R(m) \quad M.$$

بنابراین از رابطه‌ی فوق نتیجه می‌شود $M = Rx$. لذا در این حالت اثبات تمام است. اکنون حالتی را در نظر بگیرید که $l_R(x) = ۰$. لذا به دست می‌آوریم:

$$S(s, n) = l_S\left(\left(۰, x\right)\right) = l_R(x) \quad M = ۰ \quad M.$$

لذا $s = ۰$. اکنون نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$۰ \quad M = l_S\left(\left(۰, x\right)\right) = S\left(۰, n\right) = ۰ \quad Rn.$$

با توجه به رابطه‌ی فوق، واضح است که $M = Rn$ دوری است. اثبات کامل است. □

نتیجه۳-۱۱. فرض کنید R یک حلقه‌ی جابجایی، M یک R-مدول و عنصر $x \in M$ چنان موجود باشد که $ann_R(x) = ۰$. در این صورت اگر $R \quad M$ (شبه-)مورفیک باشد آن‌گاه $R \quad M$ و R نیز (شبه-)مورفیک است.

اثبات. فرض کنید $R \quad M$ شبه-مورفیک باشد. ابتدا توجه کنید که طبق نتیجه‌ی ۴ از [۵]، هر حلقه‌ی جابجایی و شبه-مورفیک، حلقه‌ای مورفیک است. بنابر آن‌چه در اثبات گزاره‌ی ۳-۱۰، دیدیم نتیجه می‌شود $R \quad M = Rx$. اکنون شرط جابجایی بودن R ایجاب می‌کند که $R \quad R \quad M \quad R$. لذا $R \quad R$ (شبه-) مورفیک است و در نتیجه طبق قضیه‌ی ۲-۶، R نیز (شبه-) مورفیک است. □

نتیجه‌ی زیر نیز کاربردی از گزاره‌ی ۳-۱۰را نشان می‌دهد. همچنین جهت درک بهتر، این نتیجه را می‌توان با نتیجه‌ی ۳-۸ مقایسه کرد.

نتیجه ۳-۱۲. فرض کنید R یک حلقه و F یک $R \quad R$ دو مدول باشد به طوری که $R \quad F$ شبه-مورفیک چپ است. اگر یکی از مدول‌های F_R یا $_RF$ آزاد باشد آن‌گاه $_RF$ دوری است. همچنین اگر $_RF_R$ آزاد باشد و X پایه‌ای برای آن، آن‌گاه $|X| = ۱$.

اثبات. فرض کنید $R \quad F$ شبه-مورفیک چپ باشد. توجه کنید اگر $_RF$ یاF_R آزاد باشد آن‌گاه عنصری همچون $x \in M$ موجود است که به $r_R(x) = ۰$ یا $l_R(x) = ۰$. بنابراین طبق گزاره‌ی ۳-۱۰، $_RF$ دوری است. علاوه بر این، در حالتی که F به عنوان $R \quad R$ دو مدول آزاد باشد و X پایه‌ای برای آن، به وضوح به ازای هر $x \in X$، داریم $r_R(x) = l_R(x) = ۰$. از آن‌جا که $r_R(x) = ۰$ و همچنین با توجه به روند اثبات گزاره‌ی ۳-۱۰، داریم $F = Rx$. از طرفی دیگر، چون $l_R(x) = ۰$،

لذا $\{x\}$ پایه برای ${}_RF$ است و نتیجه می‌گیریم $|X| = ۱$.□

اکنون به بیان قضیه‌ی زیر که نتیجه‌ی اصلی این مقاله است می‌پردازیم. در واقع در این قضیه، مشخص می‌کنیم که اگر R یک دامنه (نه لزوماً جابجایی) و F یک دو مدول روی R باشد طوری که به عنوان R-مدول چپ آزاد است، آن‌گاه شرط لازم و کافی برای این‌که $R \quad F$ (شبه-) مورفیک چپ باشد چیست.

قضیه۳-۱۳. فرض کنید R دامنه و F یک $R \quad R$ دو مدول باشد به طوری که ${}_RF$آزاد است. شرایط زیر با یکدیگر معادلند:

(الف) $R \quad F$ مورفیک چپ است،

(ب) $R \quad F$ شبه-مورفیک چپ است،

(ج) R حلقه‌ی بخشی است و ${}_RR \quad {}_RF$.

اثبات. (الف) (ب). به واضح برقرار است.

(ب) (ج). فرض کنید $S \quad R \quad F$ شبه-مورفیک چپ باشد. همچنینپایه‌ی X را برای ${}_RF$ در نظر بگیرید. بنابر نتیجه‌ی ۳-۱۲، ${}_RF$ دوریست. لذا عنصر $y \in F$ چنان موجود است که $F = Ry$. بنابراین عناصر $x_۱, x_۲, \quad , x_n \in X$و $r_۱, r_۲, \quad , r_n \in R$ موجودند که

$$y = r_۱x_۱ + r_۲x_۲ + \quad r_nx_n.$$

لذا با توجه به این‌که R یک دامنه است، نتیجه می‌گیریم $l_R(y) = ۰$ و لذا ${}_RR \quad {}_RF$. اکنون کافی است ثابت‌کنیم R حلقه‌ای بخشی است. برای این منظور، عنصر ناصفر $a \in R$ را در نظر بگیرید. از آن‌جا که S شبه-مورفیک چپ است لذا عنصری همچون $(b, ry) \in S$ موجود است به طوری که $S(a,y) = l_S((b,ry)$ (توجه کنید $b, r \in R$). اکنون شرط $(a,y)(b,ry) = ۰$ ایجاب می‌کند که:

$$ab = ۰,$$
$$ary + yb = ۰.$$

بنابراین از روابط فوق نتیجه می‌شود $b = ۰$ و لذا $ary = ۰$. از آن‌جا که $l_R(y)=۰$ داریم $ar = ۰$ و در نتیجه $r = ۰$. لذا داریم:

$$S(a,y) = l_S\left(۰\right) = S$$

و این امر بیان می‌کند که عنصر a در R وارون‌پذیر چپ است. لذا اثبات کامل است.

(ج) (الف). فرض کنید R حلقه‌ای بخشی و ${}_RR \quad {}_RF$. بنابراین $dim({}_RF) = ۱$. برای اثبات مورفیک چپ بودن حلقه‌ی $S \quad R \quad F$، عنصر $(a,f) \in S$ را به دلخواه در نظر بگیرید. اکنون اگر $a = ۰$، آن‌گاه داریم:

$$l_S\left(\left(۰,f\right)\right) = l_R(f) \quad F = ۰ \quad F = ۰$$
$$Rf = S\left(۰,f\right).$$

لذا رابطه‌ی فوق بیانگر شبه-مورفیک چپ بودن عنصر $(a,f) \in S$ می‌باشد. حال اگر $a \neq ۰$، آن‌گاه $a \in R$ یکه است و در نتیجه طبق نکته‌ی ۲-۲ قسمت (۲)، درمی‌یابیم که (a,f) عنصر یکه‌ای از S است. لذا در این حالت نیز (a,f) شبه-مورفیک است. □

اکنون در ادامه نتایجی را به‌دست می‌آوریم که بیانگر کاربردی از قضیه‌ی ۳-۱۳می‌باشند. لازم به ذکر است که نتیجه‌ی ۳-۱۴که در زیر به آن اشاره می‌کنیم در واقع در مراجع [۱۲] و [۱۴] نیز اثبات شده است اما در اینجا آن را به عنوان نتیجه‌ی مستقیم قضیه‌ی فوق بیان می‌کنیم.

نتیجه **۳-۱۴.** فرض کنید D یک حلقه‌ی بخشی و V یک $D \quad D$ مدول باشد. حلقه‌ی $D \quad V$

(شبه-) مورفیک چپ است اگر و تنها اگر $dim(_DV) \le 1$.

اثبات. نتیجه‌ی مستقیم قضیه‌ی ۱۳.۳می‌باشد.□

نتیجه ۳-۱۵. فرض کنید R یک دامنه و M یک دو مدول روی R باشد. اگر عنصر $x \in M$ موجود باشد که $l_R(x) = 0$ آن‌گاه $R \quad M$ مورفیک چپ است اگر و تنها اگر R حلقه‌ای بخشی باشد و $_RR \quad {}_RM$.

اثبات. توجه کنید بنابر گزاره‌ی ۳-۵، $_RM$ آزاد است. لذا حکم از قضیه‌ی ۳-۱۳ پیروی می‌کند. □

یادآوری می‌کنیم R-مدول چپ M را تابدار[16] گویند هرگاه به ازای هر $x \in M$ و هر ایده‌آل چپ ناصفر I از R، داشته باشیم $l_R(x) \cap I \neq 0$. توجه کنید اگر R دامنه‌ی صحیح باشد، آن‌گاه R-مدول M تابدار است اگر و تنها اگر به ازای هر $x \in M$، $ann_R(x) \neq 0$.

نتیجه۳-۱۶. فرض کنید R دامنه‌ی صحیح باشد که میدان نیست. R -مدول M را در نظر بگیرید. اگر $R \quad M$ شبه-مورفیک باشد آن‌گاه M به عنوان R-مدول تابدار است.

اثبات. فرض کنید $R \quad M$ شبه-مورفیک باشد. چون R جابجایی است لذا $R \quad M$ مورفیک است. اکنون اگر عنصر $x \in M$ موجود باشد به طوری که $ann_R(x) = 0$، آن‌گاه نتیجه‌ی ۳-۱۵، ایجاب می‌کند که R میدان باشد و این امر با فرض مسأله در تناقض است. لذا به ازای هر $x \in M$، همواره داریم $ann_R(x) \neq 0$ و لذا R-مدول M تابدار است. □

در قضیه‌ی زیر، به طور کلی یکی دیگر از شرایط لازم برای شبه-مورفیک بودن حلقه‌ی $R \quad M$ را به‌دست می‌آوریم.

قضیه ۳-۱۷. فرض کنید R یک حلقه و M یک دو مدول روی R باشد. اگر $R \quad M$ شبه-مورفیک چپ (راست) باشد و عنصر ناصفر r از R موجود باشد چنان‌که $r_R(r) = 0$ ($l_R(r) = 0$)، آن‌گاه $Mr = M$ ($rM = M$).

اثبات. فرض کنید $S \quad R \quad M$ شبه-مورفیک چپ باشد. عنصر ناصفر $r \in R$ را چنان در نظر بگیرید که $r_R(r) = 0$. ثابت می‌کنیم $Mr = M$. به وضوح $Mr \subseteq M$. طبق فرض، می‌دانیم که عنصر $(s,m) \in S$ موجود است که $l_S((s,m)) = S(r,0)$بنابراین نتیجه می‌شود $(r,0)(s,m) = 0$ و لذا $s \in r_R(r) = 0$. حال عنصر دلخواه $y \in M$ را در نظر بگیرید. به وضوح $(0,y)(0,m) = 0$. لذا:

$$(0,y) \in l_S\left((0,m)\right) = S(r,0).$$

در نتیجه عنصر $(r_1,m_1) \in S$ چنان موجود است که:

$$(0,y) = (r_1,m_1)(r,0).$$

لذا$y = m_1 r \in Mr$ و در نتیجه $Mr \subseteq M$. توجه کنید اثبات در حالت شبه-مورفیک راست نیز به طور مشابه می‌باشد. □

قبل از بیان نتیجه‌ی زیر که کاربردی از قضیه‌ی فوق را نشان می‌دهد، جهت یادآوری خواننده، به بیان تعریف مدول بخش‌پذیر[17] می‌پردازیم. R-مدول چپ M را بخش‌پذیر گویند هرگاه به ازای هر $r \in R$ با شرط $r_R(r) = l_R(r) = 0$، داشته باشیم $rM = M$.

نتیجه ۳-۱۸. فرض کنید M یک دو مدول روی حلقه‌ی R باشد. در این صورت اگر $R \quad M$ شبه-

[16] Torsion

[17] Divisible

مورفیک چپ (راست) باشد آن‌گاه M_R ($_RM$) بخش‌پذیر است.

اثبات. به طور مستقیم از قضیه‌ی ۳-۱۷ نتیجه می‌شود. □

نتیجه ۳-۱۹. فرض کنید M یک دو مدول روی حلقه‌ی R باشد. اگر $R \quad M$ شبه- مورفیک باشد آن‌گاه مدول‌های M_R و $_RM$ بخش‌پذیر هستند.

اثبات. به نتیجه‌ی ۳-۱۸توجه نمایید.□

می‌دانیم که هر مدول تزریقی[18]، بخش‌پذیر است. اکنون با توجه به نتایج ذکر شده، سوالی که به ذهن می‌رسد این است که «آیا شرط شبه-مورفیک روی حلقه‌ی توسیع بدیهی $R \quad M$ نتیجه می‌دهد که حداقل یکی از مدول‌های M_R یا $_RM$ تزریقی هستند؟» این بخش را با ارایه‌ی مثال زیر که بیان می‌کند پاسخ این سوال منفی است به پایان می‌رسانیم.

مثال۳-۲۰. این مثال نشان می‌دهد که اگر حلقه‌ی توسیع بدیهی $R \quad M$ شبه-مورفیک باشد آن‌گاه لزومی ندارد که حداقل یکی از مدول‌های M_R و یا $_RM$ تزریقی باشند. برای این منظور، ابتدا توجه کنید بنابر مثال ۱۳.۸ از [۱۹]، حلقه‌ی منظم جابجایی مانند R موجود است طوری که R به عنوان مدول روی خودش تزریقی نیست. جهت راحتی و فهم بهتر خواننده، اشاره‌ای به ساختار این حلقه داریم. فرض کنید F یک میدان و K زیرمیدان محضی از F باشد. به ازای هر عدد طبیعی n، قرار دهید $F_n = F$ و $K_n = K$. اکنون حلقه‌ی $Q \quad \prod_{n\in} F_n$ را در نظر بگیرید. به وضوح Q یک حلقه‌ی جابجایی، منظم و خود تزریقی[19] است.

اکنون حلقه‌ی R را به صورت زیر در نظر بگیرید:

$$R = \{\{x_n\} \in Q \mid \exists t \in \quad , \forall n \geq t,\ x_n \in K_n\}.$$

توجه کنید که R حلقه‌ای جابجایی و منظم است در حالی که خودتزریقی نیست. برای مشاهده‌ی جزئیات این امر به مرجع ذکر شده مراجعه نمایید. اکنون بنابر نتیجه‌ی ۲-۱۰، می‌دانیم که حلقه‌ی توسیع بدیهی $R \quad R$، (شبه-)مورفیک است. در حالی که R به عنوان مدول روی خودش تزریقی نیست.

[18] Injective
[19] Self-injective

فهرست منابع

[1] J. von-Neumann, "ON REGULAR RINGS," *Proc. Nat. Acad. Sci.,* vol. 22, pp. 707-713, 1936.

[2] G. Ehrlich, "Unit regular rings," *Portugal. Math.,* vol. 27, pp. 209-212, 1968.

[3] G.Ehrlich, "UNITS AND ONE-SIDED UNITS IN REGULAR RINGS," *Trans.Amer.Math.Soc.,* vol. 216, pp. 81-90, 1976.

[4] W. K. Nicholson, E. S. Campos, "Rings with the dual of the isomorphism theorem," *J. Algebra,* vol. 271, pp. 391-406, 2004.

[5] W. K. Nicholson and V. Camillo , "Quasi-morphic rings," *J. Algebra Appl.,* vol. 6, no. 5, pp. 789-799, 2007.

[6] V. Camillo, W. K. Nicholson and Z. Wang,, "Left quasi-morphic rings," *J. Algebra Appl.,* vol. 7, pp. 725-733, 2008.

[7] W. K. Nicholson and E. S. Campos, "Morphic Modules," *Comm. Algebra,* vol. 33, pp. 2629-2647, 2005.

[8] J. Chen and Y. Zhou, "Morphic rings as trivial extensions," *Glasgow Math. J.,* vol. 47, pp. 139-148, 2005.

[9] J. Chen, Y. Li, Y. Zhou, "Morphic group rings," *J. Pure Appl. Algebra,* vol. 205, pp. 621-639, 2006.

[10] T. J. Doresey, "Morphic and principal-ideal group rings," *J. Algebra,* vol. 318,pp. 393-411, 2007.

[11] T. K. Lee and Y. Zhou, "A theorem on unit regular rings," *Canad. Math. Bull.,* vol. 53, no. 2, pp. 321-326, 2007.

[12] T. K. Lee and Y. Zhou, "Morphic rings and unit regular rings," *J. Pure Appl. Algebra,* vol. 210, no. 2, pp. 501-510, 2007.

[13] T. K. Lee and Y. Zhou, "Regularity and morphic property of rings," *J. Algebra,* vol. 322, pp. 1072-1085, 2009.

[14] L. V. An, T. G. Nam and N. S. Tung, "On quasi-mrphic rings and Related problems," *Southest Asian Bull. Math.,* vol. 40, pp. 23-34, 2016.

[15] N. Dehghani, "On (quasi-)morphic property of skew polynomial rings,"*Int. Electron. J. Algebra,* Published Online: 12 April 2022

[16] W. K. Nicholosn, J. K. Park and M. F. Yousif , " Extensions of Simple-injective Rings," *Comm. Algebra,,* vol. 28, no. 10, pp. 4665-4675, 2008.

[17] C. Faith , "Self-injective Rings," *Prue. Amer. Math. Sec.,* vol. 77, no. 2, pp. 157-164, 1979.

[18] W. Yunxia, C. Jianlong, " On trivial extensions of rings". *Nanjin Daxue Xuebao Shuxue Bannian Kan.,* vol. 22, no. 2, pp. 234-243, 2005.

[19] K. R. Goodearl, Von-Neumann Regular Rings, Pitman, 1979.