دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال هفتم، شماره بیست و نهم، فروردین و اردیبهشت ۱۴۰۰
شماره شاپا: ۲۵۸۸-۵۸۸X

پژوهش‌های نوین در ریاضی

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پیوستگی ضربگرهای تقریبی روی جبرهای باناخ

محمدرضا امیدی[1]، عباس زیوری کاظم پور[2]، اباصلت بداغی[3*]

(۱) گروه علوم پایه، دانشگاه صنعتی کرمانشاه، کرمانشاه، ایران
(۲) گروه ریاضی، دانشگاه آیت الله بروجردی، بروجرد، ایران
(۳) گروه ریاضی، واحد گرمسار، دانشگاه آزاد اسلامی، گرمسار، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۱۳۹۸/۰۹/۰۳   تاریخ پذیرش مقاله: ۱۳۹۹/۰۴/۲۲

چکیده

در این مقاله ثابت می‌کنیم که هر ضربگر روی جبر باناخ بدون مرتبه A، همریختی تقریبی است. همچنین پیوستگی ضربگرهای تقریبی را بررسی و تحت شرایط خاص نشان می‌دهیم که هر ضربگر تقریبی $T: A \longrightarrow A$ پیوسته است.

واژه‌های کلیدی: ضربگر، ضربگر تقریبی، همریختی تقریبی، نگاشت جمعی تقریبی.

---

*. عهده‌دار مکاتبات: Email: abasalt.bodaghi@gmail.com

۱- مقدمه

فرض کنید A و B جبرهای باناخ مختلط و $T: A \longrightarrow B$ یک تابع خطی باشد. در این صورت T یک همریختی تقریبی نامیده می‌شود اگر یک $\varepsilon > 0$ موجود باشد که برای هر $a, b \in A$،

$$\|Tab - TaTb\| \leq \varepsilon\|a\|\|b\|.$$

مفهوم همریختی تقریبی برای جبرهای مختلط توسط یاروش[1] در [3] معرفی شد. او پیوستگی خودکار همریختی‌های تقریبی را بین جبرهای باناخ بررسی کرد. جانسون[2] در مقاله [6] نتایجی را درمورد پیوستگی خودکار تابعک‌های ضربی تقریبی به دست آورد و سپس این نتایج را برای همریختی‌های تقریبی بین جبرهای باناخ تعمیم داد [7]. پیوستگی این رده از نگاشت‌ها در [11] برای حالت غیرخطی نیز گسترش یافت. همچنین تحت شرایط خاصی در [14] نشان داده شده که این کلاس از نگاشت‌ها کراندار هستند و $\|T\| \leq 1 + \varepsilon$.
قابل ذکر است که برای $\varepsilon = 0$ همریختی تقریبی T به یک همریختی تبدیل می‌شود که برخی از خواص آنها در [15] مورد مطالعه قرار گرفته است.
نگاشت (غیرخطی) $T: A \longrightarrow A$ را یک ضربگر چپ (راست) می‌نامیم اگر برای هر $a, b \in A$، داشته باشیم:

$$T(ab) = (Ta)b, \ \ (T(ab) = a(Tb)).$$

همچنین T را یک ضربگر می‌نامیم هرگاه برای هر $a, b \in A$، $a(Tb) = (Ta)b$.
نظریه ضربگرها ابتدا توسط وندل[3] برای جبر گروهی به کار رفت [12] و سپس توسط جانسون در [4] توسعه داده شد. برای اطلاعات بیشتر در مورد نظریه ضربگرها به منبع [8] مراجعه شود. بعضی از کاربردهای ضربگرها در نظریه سیگنال‌ها و مهندسی زلزله در منبع [13] ارائه شده است. جبر باناخ A را بدون مرتبه می‌نامیم هرگاه از رابطه $xA = 0$ ($Ax = 0$) نتیجه شود $x = 0$. به آسانی دیده می‌شود که اگر A یک جبر یکدار یا دارای همانی تقریبی کراندار باشد، آنگاه A یک جبر بدون مرتبه است. همچنین هر C^*−جبر و هر جبر باناخ نیم‌ساده و جابجایی نیز بدون مرتبه می‌باشند. یادآوری می‌کنیم که جبر A نیم‌ساده است هرگاه رادیکال جاکوبسون A، که اشتراک همه ایده‌آل‌های چپ مدولار ماکسیمال A است، بدیهی باشد، به عبارت دیگر $\mathrm{rad}(A) = \{0\}$.
درمورد پیوستگی ضربگرها قضیه زیر توسط جانسون در [4] ثابت شد. منبع [5] نیز می‌تواند برای اطلاعات بیشتر ملاحظه گردد.

قضیه ۱. اگر A یک جبر باناخ بدون مرتبه باشد، آنگاه هر ضربگر T روی A خطی و پیوسته است.
قضیه فوق در [10] برای A−مدول‌های باناخ به صورت زیر تعمیم داده شد.

قضیه ۲. اگر A یک جبر باناخ با همانی تقریبی کراندار و X یک A−مدول باناخ باشد، آنگاه هر نگاشت خطی $T: A \longrightarrow X$ که برای هر $a, b \in A$، در شرط $T(ab) = a(Tb)$ صدق می‌کند، پیوسته است.
اگر T یک ضربگر چپ و راست باشد، آنگاه T یک ضربگر است. ولی عکس این مطلب در حالت کلی درست نیست. مثال زیر گواه این مطلب است.

مثال ۳. فرض کنید

$$\mathrm{A} = \left\{\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} : \ a, b, c \in \mathbb{R}\right\},$$

زیر جبری از جبر ماتریسهای 3×3 باشد. نگاشت $T: \mathrm{A} \longrightarrow \mathrm{A}$ را با ضابطه زیر تعریف می‌کنیم:

$$T\left(\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

در این صورت برای هر $X, Y \in A$، $X(TY) = (TX)Y$. بنابراین T یک ضربگر است ولی ضربگر چپ و راست نیست زیرا $T(XY) = 0$.
اگر A یک جبر بدون مرتبه باشد، آنگاه هر ضربگر روی A، یک ضربگر چپ و راست می‌باشد. بدین منظور فرض کنید $a(Tb) = (Ta)b$. برای هر $x \in A$،

---
1. Jarosz
2. Johnson
3. Wendel

$$x[(Tab)] = (Tx)ab = x(Ta)b = x[(Ta)b].$$

چون A بدون مرتبه است، لذا برای هر $a,b \in A$، $T(ab) = (Ta)b$. بنابراین T یک ضربگر چپ است. به‌طور مشابه T یک ضربگر راست نیز می‌باشد. نگاشت $T: A \longrightarrow A$ را یک ضربگر تقریبی چپ می‌نامیم هرگاه یک $\varepsilon > 0$ موجود باشد به طوری که برای هر $a,b \in A$،

$$\|T(ab) - (Ta)b\| \leq \ \varepsilon\|a\|\,\|b\|.$$

ضربگر تقریبی راست نیز به طور مشابه تعریف می‌شود. همچنین T را یک ضربگر تقریبی می‌نامیم هرگاه یک $\varepsilon > 0$ موجود باشد به طوری که برای هر $a,b \in A$،

$$\|a(Tb) - (Ta)b\,\| \leq \ \varepsilon\|a\|\,\|b\|.$$

قضیه‌گراف بسته: فرض کنید A و B دو فضای باناخ و T یک تبدیل خطی از A به B باشد. هرگاه به ازای هر دنباله a_n در A که $a_n \longrightarrow a$ و هر دنباله $T(a_n)$ در B که $T(a_n) \longrightarrow b$ نتیجه شود که $T(a) = b$، آن‌گاه T پیوسته است.

برهان : به منبع [1] مراجعه شود.

۲- پیوستگی ضربگرهای تقریبی

از بخش قبل یادآوری می‌کنیم که اگر T یک ضربگر تقریبی چپ و راست باشد، آنگاه T یک ضربگر تقریبی است. ولی در حالت کلی عکس این مطلب درست نیست. درگزاره زیر با شرط اضافی نشان می‌دهیم که این موضوع برقرار است.

گزاره ۴. فرض کنید A یک جبر باناخ با همانی تقریبی کراندار و $T: A \longrightarrow A$ یک ضربگر تقریبی باشد، آنگاه T یک ضربگر تقریبی چپ و راست است.

برهان. برای هر $a,b,c \in A$، داریم

$$\|c(Ta)b - (Tc)ab\| = \|[c(Ta) - (Tc)a]b\| \leq \ \|c(Ta) - (Tc)a\|\,\|b\| \leq \ \varepsilon\|a\|\,\|b\|\|c\|.$$

بنابراین برای هر $a,b,c \in A$، خواهیم داشت

$$\|c(Tab) - c(Ta)b\| \leq \|c(Tab) - (Tc)ab\| + \|(Tc)ab - c(Ta)b\| \leq 2\varepsilon\|a\|\,\|b\|\|c\|.$$

فرض کنید e_λ یک همانی تقریبی کراندار با کران M برای A باشد. دراین صورت با جایگذاری e_λ بجای c در نابرابری فوق نتیجه می‌شود که

$$\|Tab - (Ta)b\| \leq \ 2\varepsilon M\|a\|\|b\|.$$

درنتیجه T یک ضربگر تقریبی چپ است. به طور مشابه T یک ضربگر تقریبی راست نیز می‌باشد.

چون هر C^*-جبر دارای همانی تقریبی کرندار با کران یک است [1]، هر ضربگر تقریبی روی C^*-جبر A یک ضربگر تقریبی چپ و راست است. نگاشت $T: A \longrightarrow B$ بین دو جبر نرم‌دار را به طور تقریبی جمعی می‌نامیم هرگاه یک $\varepsilon > 0$ موجود باشد به طوری‌که برای هر $a,b \in A$،

$$\|T(a+b) - (Ta+Tb)\| \leq \ \varepsilon(\|a\| + \|b\|).$$

هر نگاشت جمعی، به طور تقریبی جمعی است ولی عکس مطلب صحیح نمی‌باشد. برای مثال نقض به منبع [2] مراجعه شود.

گزاره ۵. اگر A یک جبر باناخ با همانی تقریبی کرندار و $T: A \longrightarrow A$ یک ضربگر تقریبی باشد، آنگاه T به طور تقریبی جمعی است.

برهان. برای هر $a,b,c \in A$، داریم

$$\|cT(a+b) - c(Ta+Tb)\| \ \leq \|cT(a+b) - (Tc)a - (Tc)b\| + \|(Tc)a - c(Ta)\| \ + \|(Tc)b - c(Tb)\| \leq \ 2\varepsilon(\|a\| + \|b\|)\|c\|.$$

گیریم e_λ یک همانی تقریبی کراندار با کران M برای A باشد. با جایگذاری e_λ بجای c در نابرابری فوق نامساوی زیر را به دست می‌آوریم

$$\|T(a+b) - (Ta+Tb)\| \leq \varepsilon_1(\|a\| + \|b\|),$$

که در آن $\varepsilon_1 = 2\varepsilon M$. بنابراین T به طور تقریبی جمعی است. ■

مثال زیر که در منبع [9] به دست آمده است، نشان می‌دهد که یک ضربگر تقریبی وجود دارد که یک ضربگر نیست.

مثال ۶. فرض کنید $\varepsilon > 0$ یک عدد ثابت باشد. بنابر پیوستگی تابع $h(t) = e^{it}$ یک $0 < \delta < 1$ موجود است به‌طوری که اگر $|t| < 2\pi(1-\delta)$، آنگاه $|h(t)-1| < \varepsilon$. متناظر با این δ نگاشت $T: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ را برای $0 \le \theta < 2\pi$ با ضابطه

$$T(z) = \begin{cases} 0 & z = 0 \\ |z|e^{i\theta\delta} & z \neq 0, \end{cases}$$

تعریف می‌کنیم. در این صورت برای هر $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$، نابرابری زیر حاصل می‌شود.

$$|z_1(Tz_2) - (Tz_1)z_2| \le \varepsilon |z_1||z_2|.$$

اگر $z_1 = 0$ یا $z_2 = 0$ باشد، آنگاه رابطه فوق برقرار است. فرض کنید z_2, z_1 دو عدد مختلط ناصفر باشند. قرار می‌دهیم

$$z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}, \qquad z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$$

چون $|\theta_1 - \theta_2| < 2\pi$،بافرض $u = (1-\delta)(\theta_1 - \theta_2)$ نتیجه می‌شود که $|u| < 2\pi(1-\delta)$. بنابراین

$$|z_1(Tz_2) - (Tz_1)z_2| = |z_1||z_2||h(u) - 1| < \varepsilon |z_1||z_2|.$$

در نتیجه T یک ضربگر تقریبی است، ولی یک ضربگر نیست. ■

قضیه زیر رابطه بین یک ضربگر و همریختی تقریبی را بیان می‌کند.

قضیه ۷. اگر A یک جبر باناخ بدون مرتبه و $T: A \longrightarrow A$ یک ضربگر باشد، آنگاه T یک همریختی تقریبی است.

برهان. بنابه **قضیه ۱**، T خطی و پیوسته است. بنابراین یک $M > 0$ موجود است که $\|T\| \le M$. چون A بدون مرتبه است، $T(ab) = (Ta)b = a(Tb)$. در نتیجه برای هر $a, b \in A$، خواهیم داشت

$$\|Tab - TaTb\| = \|a(Tb) - TaTb\| \le \|a - Ta\| \, \|Tb\| \le \|a - Ta\| \, \|Tb\| \le \|a\| \, \|b\| \|T\| [1 + \|T\|] \le M(1+M)\|a\|\|b\|.$$

با فرض $\varepsilon = M(1+M)$ نتیجه می‌شود که برای هر $a, b \in A$،

$$\|Tab - TaTb\| \le \varepsilon \|a\|\|b\|$$

بنابراین نگاشت T همریختی تقریبی است. ■

قضیه ۸. فرض کنید A یک جبر باناخ و $T: A \longrightarrow A$ یک نگاشت خطی و پیوسته باشد. در این صورت T ضربگر تقریبی راست (چپ) است اگر و تنها اگر T همریختی تقریبی باشد.

برهان. فرض کنید T یک ضربگر تقریبی راست باشد، درنتیجه یک $\varepsilon_1 > 0$ وجود دارد برای هر $a, b \in A$، خواهیم داشت

$$\|Tab - a(Tb)\| \le \varepsilon_1 \|a\|\|b\|.$$

چون T پیوسته است، پس $\|T\| \le M$. بنابراین برای هر $a, b \in A$، خواهیم داشت

$$\|Tab - TaTb\| \le \|Tab - a(Tb) + a(Tb) - TaTb\| \le \|Tab - a(Tb)\| + \|a(Tb) - TaTb\| \le \varepsilon_1 \|a\|\|b\| + \|T\|\|b\|\|a - Ta\| \le \varepsilon_1 \|a\|\|b\| + M(1+M)\|a\|\|b\| \le \varepsilon \|a\|\|b\|.$$

که در آن $\varepsilon = \varepsilon_1 + M(1+M)$. درنتیجه T همریختی تقریبی است. عکس قضیه به طور مشابه اثبات می‌گردد. ■

فرض کنید $T: A \longrightarrow B$ یک نگاشت خطی باشد. در این صورت

$$\sigma(T) = \{y \in B : \exists\, x_n \subseteq A, \ s.t. \ x_n \longrightarrow 0, \ T(x_n) \longrightarrow y\},$$

را فضای جداساز می‌نامند که یک زیرفضای بسته از B است. بنابه قضیه گراف بسته، $\sigma(T) = \{0\}$، اگروتنها اگر T پیوسته باشد [1]. برای جبر باناخ A شعاع طیفی هر عنصر a، به صورت

$$\rho(a) = \lim_{n\to\infty} \|a^n\|^{\frac{1}{n}},$$

تعریف می‌شود. همچنین

$$Q(A) = \{x \in A:\ \rho(x) = 0\}.$$

بنابه قضیه از ۳۲. ۵. ۱ از منبع [1]، اگر I یک ایده‌آل از جبر باناخ A باشد به طوری‌که $I \subseteq Q(A)$، آنگاه $I \subseteq rad(A)$.

قضیه ۹. فرض کنید A یک جبر باناخ و $T: A \longrightarrow A$ یک نگاشت خطی و ضربگر تقریبی راست (چپ) باشد. دراین صورت $\sigma(T)$ یک ایده‌آل بسته از A است.

برهان. می‌دانیم که $\sigma(T)$ بسته است. لذا کافی است نشان دهیم که $\sigma(T)$ یک ایده‌آل از A است. فرض کنید $a \in A$ و $b \in \sigma(T)$ عناصری دلخواه باشند. از این رو دنباله a_n در A موجود است که $a_n \longrightarrow 0$ و $Ta_n \longrightarrow b$. بنابراین

$$\|Taa_n - ab\| \le \|Taa_n - a(Ta_n)\| + \|a(Ta_n) - ab\| \le \varepsilon\|a\|\|a_n\| + \|a\|\|Ta_n - b\| \longrightarrow 0.$$

در نتیجه $Taa_n \longrightarrow ab$. از طرفی $aa_n \longrightarrow 0$، پس $ab \in \sigma(T)$ و $\sigma(T)$ یک ایده‌آل بسته است. ■

قضیه ۱۰. فرض کنید A یک جبر باناخ و $T: A \longrightarrow A$ یک نگاشت خطی و ضربگر تقریبی راست (چپ) باشد به طوری که برای هر $a \in A$، $\rho(Ta) \le \rho(a)$ و ρ روی $\sigma(T)$ پیوسته باشد. در این صورت $\sigma(T) \subseteq Q(A)$ علاوه براین، اگر A نیم‌ساده باشد، آنگاه T پیوسته است.

برهان. فرض کنید $b \in \sigma(T)$ دلخواه باشد. دراین صورت دنباله a_n در A موجود است که $a_n \longrightarrow 0$ و $Ta_n \longrightarrow b$. بنابه پیوستگی ρ در صفر، $\rho(a_n) \longrightarrow \rho(0) = 0$. در نتیجه

$$\rho(Ta_n) \longrightarrow 0. \qquad (۱)$$

از طرفی چون ρ روی $\sigma(T)$ پیوسته است و $b \in \sigma(T)$،

$$\rho(Ta_n) \longrightarrow \rho(b). \qquad (۲)$$

از روابط (۱) و (۲) نتیجه می‌شود $\rho(b) = 0$ و بنابراین $b \in Q(A)$. درنتیجه $\sigma(T) \subseteq Q(A)$. حال قضیه قبل نشان می‌دهد که $\sigma(T)$ یک ایده‌آل بسته از A است. لذا $\sigma(T) \subseteq rad(A)$. چون A نیم‌ساده است، $\sigma(T) = \{0\}$، در نتیجه T پیوسته است. ■

چون شعاع طیفی ρ روی جبر باناخ نیم‌ساده و جابجایی پیوسته است [1]، لذا یک نتیجه مستقیم از قضیه قبل به صورت زیر می‌باشد.

نتیجه ۱۱. فرض کنید A یک جبر باناخ نیم‌ساده و جابجایی و $T: A \longrightarrow A$ یک نگاشت خطی و ضربگر تقریبی راست باشد به طوری‌که برای هر $a \in A$، $\rho(Ta) \le \rho(a)$. دراین صورت T پیوسته است.

گزاره ۱۲. اگر A یک جبر باناخ یکدار و $T: A \longrightarrow A$ یک نگاشت خطی و ضربگر تقریبی یکانی باشد، آنگاه T پیوسته است.

برهان. فرض کنید e عنصر همانی A باشد. بنابه فرض یک $0 \ge \varepsilon$ موجود است که برای هر $a \in A$،

$$\|Ta\| - \|a(Te)\| \le \|(Ta)e - a(Te)\| \le \varepsilon\|a\|.$$

چون $T(e) = e$، برای هر $a \in A$، $\|Ta\| \le (1 + \varepsilon)\|a\|$. در نتیجه T پیوسته است.

قضیه ۱۳. فرض کنید A یک جبر باناخ و $T: A \longrightarrow A$ یک ضربگر تقریبی و $f: A \longrightarrow A$ یک تابع باشد که برای هر $a \in A$،

$$\|Ta - fa\| \le \delta\|a\|.$$

در این صورت f یک ضربگر تقریبی است.

برهان. چون T یک ضربگر تقریبی است، یک $\varepsilon_1 \geq 0$ وجود دارد که برای هر $a, b \in A$،

$$\|(Ta)b - a(Tb)\| \leq \varepsilon_1 \|a\|\|b\|.$$

بنابراین

$$\|a(fb) - (fa)b\| \leq \|a(fb) \pm a(Tb) \pm (Ta)b - (fa)b\| \leq \|a(fb) - a(Tb)\| + \|a(Tb) - (Ta)b\| + \|(Ta)b - (fa)b\| \leq \delta\|a\|\|b\| + \varepsilon_1\|a\|\|b\| + \delta\|a\|\|b\| \leq (2\delta + \varepsilon_1)\|a\|\|b\|.$$

با فرض $\varepsilon = 2\delta + \varepsilon_1$، نتیجه می‌شود که f یک ضربگر تقریبی است. ■

تبصره: فرض کنید A یک جبر باناخ جابجایی و یکدار با همانی e و T یک ضربگر تقریبی باشد. نگاشت $f: A \longrightarrow A$ با ضابطه $f(a) = aT(e)$ را در نظر می‌گیریم. دراین صورت f یک ضربگر است و برای هر $a \in A$،

$$\|fa - Ta\| \leq \varepsilon\|a\|.$$

فهرست منابع

[1] H. G. Dales, Banach algebras and Automatic Continuity, London Math. Soc., Monograph 24, 2000.

[2] Z. Gajda, On the stability of additive mappings, Inter. J. Math. Math., Sci., 14 (3) (1991), 431-434.

[3] K. Jarosz, Perturbations of Banach Algebras, Lecture Notes in Math., Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[4] B. E. Johnson, An introduction to the theory of centralizers, Proc. London Math. Soc., 14 (1964), 299-320.

[5] B. E. Johnson, Continuity of centralizers on Banach algebras, J. London Math. Soc., 14 (1966), 639-640.

[6] B. E. Johnson, Approximately multiplicative functionals, J. London Math. Soc., 34(2), (1986), 489-510.

[7] B. E. Johnson, Approximately multiplicative maps between Banach algebras, J. London Math. Soc., 37(2), (1988), 294-316.

[8] R. Larsen, an Introduction to the theory of multipliers, Berlin, New York, Springer-Verlag, 1971.

[9] T. Miura, G. Takahasi, and S. Hirasawa, Stability of multipliers on Banach algebras, Int. J. Math. Math. Sci., 45, (2004), 2377-2381.

[10] M. A. Rieffel, On the continuity of certain intertwining operators, centralizers, and positive linear functionals, Proc. London Math. Soc., 20 (1969), 455-457.

[11] P. Semrel, Almost multiplicative functions and almost multiplicative functionals, Aequationes Math., 63, (2012), 180-192.

[12] P. Wendel, Left Centralizers and Isomorphisms on group algebras, Pacific J. Math., 2 (1952), 251-261.

[13] مرجان ادیب، ضربگرها و کاربرد آنها در مهندسی زلزله، پژوهش‌های نوین در ریاضی، سال پنجم، شماره ۱۷،۱۰۲–۹۵.

[14] بهمن حیاتی و حمید خدایی، نگاشت‌های δ– همریختی‌های به توی جبرهای باناخ دوگان، پژوهش‌های نوین در ریاضی، سال پنجم، شماره ۲۱، ۲۲–۱۵.

[15] عباس زیوری کاظم پور و اباصلت بداغی، مشخصه‌سازی n–همریختی‌های جردن روی جبرها، پژوهش‌های نوین در ریاضی، سال چهارم، شماره ۱۳، ۶۹–۷۴.