دسترسی در سایتِ http://jnrm.srbiau.ac.ir
سال ششم، شماره بیست و پنجم، مرداد و شهریور ۱۳۹۹
شماره شاپا: ۵۸۸X-۲۵۸۸

دانشگاه آزاد اسلامی، واحد علوم و تحقیقات

پژوهش‌های نوین در ریاضی

نتایج نقطه ثابت برای نگاشت‌های $\perp_{H\theta}-$ انقباض در فضاهای متریک متعامد

محدثه پاک نظر *

گروه آموزش ریاضی، دانشگاه فرهنگیان، تهران، ایران

تاریخ ارسال مقاله: ۹۶/۰۸/۱۸ تاریخ پذیرش مقاله: ۹۹/۰۳/۰۶

چکیده

هدف اصلی در این پژوهش، گسترش بعضی از قضایای نقطه ثابت در فضاهای متریک متعامد است. در این راستا ابتدا نگاشت‌های جدیدی را در این فضاهای مهم و جالب بررسی می‌کنیم. ما مفاهیم جدید توابع H را معرفی می‌کنیم و به کمک آن تعریف نگاشت‌های $\perp_{H\theta}$-انقباض را ارائه می‌دهیم و سپس بعضی قضایای نقطه ثابت را برای چنین نگاشت‌هایی در فضاهای متریک متعامد پایه‌گذاری و اثبات می‌کنیم. سپس به کمک مثال‌های تابع H نتایج جدیدی را برای این قضایای نقاط ثابت بدست می‌آوریم. هم چنین در این مقاله پژوهشی کاربردهایی از نتایج بدست آمده‌مان ارائه خواهیم کرد. به عنوان اولین کاربرد نشان خواهیم داد که می‌توان با استفاده ازنتایج نقاط ثابت در فضاهای متریک متعامد، نتایج نقطه ثابت زیادی در فضای متریک مجهز به گراف G بدست آورد. بدین منظور چند تعریف جدید و قضیه ارائه خواهیم کرد. همچنین به عنوان کاربردی دیگر نشان خواهیم داد که می‌توان با استفاده ازنتایج نقاط ثابت در فضاهای متریک متعامد، نتایج نقطه ثابت زیادی در فضای متریک مرتب جزئی بدست آورد. در واقع در این مقاله علاوه بر توسیع برخی از قضایای نقطه ثابت در فضاهای متریک متعامد نشان خواهیم داد که نتایجی که بدست آورده‌ایم بسیاری از نتایج نقاط ثابت را متحد می‌کنند.

واژه‌های کلیدی: فضای متریک متعامد، نگاشت‌های $\perp_{H\theta}$-انقباض، نقطه ثابت.

---

*. عهده‌دار مکاتبات

Email: m.paknazar@cfu.ac.ir

۱- مقدمه

فرض کنید X یک مجموعه ناتهی و $T: X \to X$ یک خود نگاشت باشد. حال اگر $x_* \in X$، وجود داشته باشد بطوری که $Tx_* = x_*$، آنگاه x_* یک نقطه ثابت T است. مجموعه همه نقاط ثابت T را با $Fix(T)$ مشخص می‌کنیم. در سال ۱۹۲۲، باناخ [۲] با معرفی نگاش‌های انقباض نشان داد که چنین نگاشت‌های در فضای متریک کامل دارای نقطه ثابت هستند. بعدها این نتیجه باناخ به اصل انقباض باناخ معروف شد و محققین مختلف [۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸، ۹] به تعمیم و توسیع اصل انقباض باناخ پرداخته و با ایجاد شرایطی در دامنه تعریف یا شرایط انقباض نگاشت، نتایج مختلفی را در نظریه نقطه ثابت کردند. نظریه نقطه ثابت به ابزار مفید و مهمی برای شاخه‌های متفاوت آنالیز تبدیل شد، بطوری که بررسی وجود و یکتایی نقاط ثابت نگاشت‌هایی که در شرایط انقباض گوناگونی صدق می‌کنند کانون توجه ریاضی‌دانان بی‌شماری بوده است[۱، ۱۰، ۱۱، ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵]. همچنین این نظریه به عنوان یک ابزار ضروری در آنالیز غیر خطی مورد استفاده قرار می‌گیرد. از جمله کابردهای می‌توان به وجود مفاهیم جواب در نظریه بازیو اقتصاد، وجود جواب معادلات انتگرالی غیر خطی، اثبات همگرایی الگوریتم‌ها (پایداری روش نیوتن، روش تکرار پیکارد و...)، وجود جواب معادلات دیفرانسیلی معمولی و جزئی، بهینه‌سازی و سیستم کنترل غیرخطی، حل معادلات دیفرانسیلی غیرخطی در فضاهای باناخ، استفاده در درخت‌های متریک که خود زمینه تحقیقات وسیعی در نظریه گروها، گراف‌ها، علوم کامپیوتر می‌باشد اشاره نمود (برای اطلاع بیشتر در مورد کاربردهای نظریه نقطه ثابت به منابع [۱۶، ۱۷، ۱۸، ۱۹، ۲۰] مراجعه فرمایید).

در سال ۲۰۰۴، رن و ریورینگز در [۲۱] با بررسی انقباض‌ها در فضاهای متریک مرتب جزئی تحقیقات جدیدی را آغاز کردند. یک سال بعد نی‌یتو و رودریگز در [۲۲] قضایای رن و ریورینگز را اصلاح کردند و به نتایج قوی‌تری دست یافتند. سه سال بعد آگاروال و همکارانش در [۲۳] نتایج رن و ریورینگز را برای $\varphi-$انقباض‌ها توسیع دادند (برای اطلاع بیشتر به منابع [۲۴، ۲۵، ۲۶، ۲۷، ۲۸] مراجعه فرمایید).

اخیرا اسحاقی و همکاران [۲۹] مفهوم مجموعه‌های متعامد در یک مجموعه دلخواه را ارائه دادند و سپس مفاهیم فضای متریک متعامد، فضای متریک $O-$کامل، $\perp-$پیوسته و نگاشت‌های $\perp-$حافظ را تعریف کردند و اصل انقباض باناخ را به کمک این مفاهیم تعمیم دادند (برای اطلاع بیشتر به منابع [۳۰، ۳۱] مراجعه فرمایید). از طرف دیگر مفهوم $\theta-$انقباض‌ها توسط جللی و صامت [۲۰] ارائه شدند که تعمیم جالبی از اصل انقباض باناخ است.

حال به ارائه تعاریف و ویژگی‌هایی می‌پردازیم که در این مقاله از آنها استفاده خواهیم کرد.

اگر (X,d) یک فضای متریک و $(X,\leq)$ یک مجموعه مرتب جزئی باشد، در آنصورت گوییم X یک فضای متریک مرتب جزئی است. دو عنصر x و y از X را مقایسه‌پذیر گوییم هرگاه $x \leq y$ یا $y \leq x$.
نگاشت $T: X \to X$ را صعودی نامیم هرگاه $x \leq y$ نتیجه دهد $Tx \leq Ty$.

تعریف ۱-۱: فرض کنید $(X,d,\leq)$ یک فضای متریک مرتب جزئی و $T: X \to X$ یک نگاشت باشد. گوییم T یک نگاشت $\leq-$پیوسته است هرگاه برای هر دنباله صعودی دلخواه مانند $\{x_n\}$ که به x همگرا است داشته باشیم

$$\lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx.$$

تعریف ۱-۲: فرض کنید (X,d) یک فضای متریک مرتب جزئی باشد. گوییم X، $\leq-$کامل است هرگاه هر دنباله صعودی کوشی دلخواه در آن همگرا باشد.

همانطور که در [۲۷] آورده شده است، فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد و قطر ضرب دکارتی $X \times X$ را با Δ مشخص شده باشد. گراف جهتدار G را در نظر بگیرید که $V(G)$ مشخص کننده رئوس و $E(G)$ مشخص کننده یال‌ها در مجموعه X است، و همچنین $E(G)$ شامل همه گره ها می‌باشد. یعنی $\Delta \subseteq E(G)$. ما فرض می‌کنیم که $E(G)$ یال‌های موازی نداشته باشد. پس گراف G را با

$(V(G),E(G))$ مشخص می‌کنیم. بعلاوه ما گراف G را گراف وزن دار درنظر می‌گیریم (صفحه ۳۰۹ از [۳۳] را ببینید) که در آن برای به هر یال فاصله بین رئوس آن را به عنوان وزن اختصاص می‌دهیم. اگر x و y دو راس در گراف G باشند آنگاه یک گذر از x به y به طول $N \in \mathbb{N}$ دنباله $\{x_i\}_{i=0}^{N}$ از $N+1$ راس است که $x_0 = x$، $x_N = y$ و (x_{i-1}, x_i) ($i = 1, 2, \ldots, N$).

تعریف ۱-۳: فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد که به گراف G مجهز شده است. گوییم نگاشت $T: X \to X$ یک G-انقباض است هرگاه شرایط زیر برقرار باشند.

الف- T یالهای G را حفظ کند. یعنی

$$(x,y) \in E(G) \Rightarrow (Tx,Ty) \in E(G)$$

ب- به ازای هر $x, y \in X$، $\alpha \in (0,1)$ای وجود داشته باشد بطوریکه

$$d(Tx,Ty) \le \alpha d(x,y).$$

تعریف ۱-۴: فرض کنید $T: X \to X$ یک نگاشت باشد و $\{x_i\}_{i=0}^{N}$ یک دنباله دلخواهی باشد که به x همگرا است و برای هر $n \in \mathbb{N}$، $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$. گوییم T یک نگاشت G-پیوسته است هرگاه $\lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx$.

تعریف ۱-۵: فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد که به گراف G مجهز شده است. گوییم X، G-کامل است هرگاه هر دنباله کوشی دلخواه مانند $\{x_n\}$ که برای هر $n \in \mathbb{N}$، $(x_n, x_{n+1}) \in E(G)$، همگرا باشد.

تعریف ۱-۶: [۱۸] فرض کنید X یک مجموعه ناتهی و $\perp \subseteq X \times X$ یک رابطه باینری باشد. گوییم X یک مجموعه متعامد است (یا بصورت مختصر، O-مجموعه است) هرگاه $x_0 \in X$ای وجود داشته باشد بطوری که برای هر $x \in X$ داشته باشیم $x \perp x_0$ یا $x_0 \perp x$. ما O-مجموعه را با $(X,\perp)$ نشان می‌دهیم. همچنین فرض کنید $(X,\perp)$ یک O-مجموعه و $\{x_n\}$ یک دنباله در آن باشد. در اینصورت دنباله $\{x_n\}$ یک O-دنباله است هرگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ داشته باشیم $x_n \perp x_{n+1}$ یا $x_{n+1} \perp x_n$.

مثال ۱-۱: فرض کنید (X,d) یک فضای متریک و $T: X \to X$ یک عملگر پیکارد باشد (یعنی $x^* \in X$ای وجود دارد، بطوریکه برای هر $y \in X$، $\lim_{n\to\infty} T^n(y) = x^*$). رابطه باینری $\perp$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$x \perp y \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} d(x, T^n(y)) = 0.$$

بنابراین $(X,\perp)$ یک O-مجموعه است.

مثال ۱-۲: فرض کنید $X = [0,\infty)$. رابطه باینری $\perp$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$x \perp y \Leftrightarrow xy \in \{x,y\}.$$

سپس با قرار دادن $x_0 = 0$ یا $x_0 = 1$، $(X,\perp)$ یک O-مجموعه است.

مثال ۱-۳: فرض کنید $M(n)$ مجموعه همه ماتریس‌ها و Q یک ماتریس معین مثبت در آن باشد. رابطه باینری $\perp$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$A \perp B \Leftrightarrow \exists X \in M(n); AX = B.$$

به وضوح برای هر $B \in M(n)$، $I \perp B$، $B \perp O$ و $Q^{\frac{1}{2}} \perp B$. یعنی $(X,\perp)$ یک O-مجموعه است.

تعریف ۱-۷: [۱۸] فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد. آنگاه:

(۱) X یک فضای متریک متعامد است هرگاه مجموعه $(X, \perp)$ یک مجموعه متعامد باشد،

(۲) نگاشت $T: X \to X$ در نقطه $x \in X$، $\perp-$ پیوسته است هرگاه برای هر $O-$دنباله $\{x_n\}$ که $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ داشته بایم $\lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx$. همچنین T، $\perp-$ پیوسته است هرگاه برای هر $x \in X$، $\perp-$ پیوسته باشد،

(۳) نگاشت T، $\perp-$حافظ است هرگاه برای $x, y \in X$ که $x \perp y$ داشته باشیم $Tx \perp Ty$،

(۴) فضای متریک X، $O-$کامل است هرگاه هر $O-$ دنباله کوشی همگرا باشد.

مثال ۱- ۴: فرض کنید $X = [0,1)$ و متریک روی X، متریک اقلیدسی باشد. رابطه باینری $\perp$ و تابع $f: X \to X$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم.

$$x \perp y \Leftrightarrow xy \in \{x, y\}$$

و

$$fx = \begin{cases} \frac{x}{2} & , x \in Q \cap X \\ 0 & , x \in Q^c \cap X \end{cases}$$

بنابراین f یک تابع $\perp-$پیوسته روی X می‌باشد.

تعریف ۱-۸: [۲۰] مجموعه همه توابع $\theta: (0,\infty) \to (1,\infty)$ که در شرایط زیر صدق می‌کنند را با Δ_θ نشان می‌دهیم.

$(\theta1)$ θ صعودی است،

$(\theta2)$ برای هر دنباله $\{a_n\} \subset (0,\infty)$، $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ اگر و فقط اگر $\lim_{n\to\infty} \theta(a_n) = 1$،

$(\theta3)$ اعداد حقیقی $r \in (0,1)$ و $l \in (0,1)$ وجود دارند بطوری که $\lim_{t\to 0^+} \frac{\theta(t)-1}{t^r} = l$.

در این مقاله، ما با الهام گرفتن از مفاهیم و تعاریف بالا، به بررسی نگاشت‌های جدید در فضاهای متریک متعامد خواهیم پرداخت. در واقع، در بخش بعدی ابتدا مفهوم تابع H را تعریف می‌کنیم و سپس به کمک این تابع مفهوم نگاشت‌های $\perp_{H\theta}$-انقباض را معرفی می‌کنیم و بعضی قضایای نقطه ثابت را برای چنین نگاشت‌هایی در فضاهای متریک متعامد پایه‌گذاری و اثبات می‌کنیم. سپس نتایجی را برای این قضایای نقاط ثابت بدست می‌آوریم. همچنین، نشان خواهیم داد که می‌توان با استفاده ازنتایج نقاط ثابت در فضاهای متریک متعامد، نتایج نقطه ثابت زیادی در فضای متریک مجهز به گراف G بدست آورد. بعلاوه، نشان خواهیم داد که می‌توان با استفاده ازنتایج اصلی، نتایج نقطه ثابت زیادی در فضای متریک مرتب جزئی بدست آورد. این نتایج بدست آمده بسیاری از نتایج نقاط ثابت را متحد می‌کنند.

۲- نتایج اصلی

این بخش را با تعاریف زیر شروع می کنیم:

تعریف ۲-۱: فرض کنید $H: [1,\infty)^6 \to \mathbb{R}$ یک تابع باشد که در همه متغییرهایش پیوسته است و در شرایط زیر صدق می‌کند:

$(H1)$ اگر برای $u > 1$ و $v > 1$، $H(u,v,v,u,uv,1) \leq 0$ آنگاه $k \in (0,1)$ وجود دارد بطوری که $u \leq v^k$،

$(H2)$ برای هر $u > 1$، $H(u,1,u,u,u,1) > 0$،

$(H3)$ تابع H در همه متغییرهایش پیوسته است،

$(H4)$ تابع H در پنجمین متغیرش نزولی است.

مثال ۲-۱: اگر $H(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6) = t_1 - t_2^k$ که در آن $k \in (0,1)$ است، آنگاه H در شرایط $(H1)$-$(H4)$ صدق می‌کند.

مثال ۲-۲: اگر

$$H(t_1,t_2,t_3,t_4,t_5,t_6) = t_1 - [\max\left\{t_2, (t_3t_4)^{\frac{1}{2}}, (t_5t_6)^{\frac{1}{2}}\right\}]^k$$

که در آن $k \in (0,1)$ است، آنگاه H در شرایط $(H1)-(H4)$ صدق می‌کند.

حال آماده‌ایم نگاشت $\perp_{H\theta}$ -انقباض را بصورت زیر تعریف کنیم.

تعریف ۲-۲: فرض کنید $(X,d,\perp)$ فضای متریک متعامد و T یک خود نگاشت روی X باشد.
همچنین فرض کنید $H:[1,\infty)^6 \to \mathbb{R}$ یک تابع باشد. گوییم T یک نگاشت $\perp_{H\theta}$ -انقباض است هرگاه برای هر $x,y\in X$ای که $x\perp y$ و $d(Tx,Ty)>0$، $\theta\in\Delta_\theta$ای وجود داشته باشد بطوریکه

$$\begin{aligned}&H(\theta(d(Tx,Ty)),\theta(d(x,y)),\\&\theta(d(x,Tx)),\theta(d(y,Ty)),\\&\theta(d(x,Ty)),\theta(d(y,Tx)))\le 1\end{aligned}$$

قضیه ۲-۱: فرض کنید $(X,d,\perp)$ یک فضای متریک O-کامل باشد. همچنین فرض کنید T یک خود نگاشت روی X باشد بطوری که در شرایط زیر صدق کند.

(i) T یک نگاشت $\perp$ − حافظ است،

(ii) T یک نگاشت $\perp_{H\theta}$ -انقباض است بطوری که برای هر $t>0$ و $s>0$، $\theta(t+s)\le\theta(t)\theta(s)$ و همچنین H در شرایط $(H1)$ و $(H4)$ صدق می‌کند،

(iii) T یک نگاشت $\perp$ − پیوسته است.

در اینصورت T یک نقطه ثابت دارد. بعلاوه اگر برای هر $x,y\in Fix(T)$، $x\perp y$ و برای هر $u>1$، $H(u,u,1,1,u,u)>1$، آنگاه نقطه ثابت T منحصر بفرد است.

اثبات: از آنجا که یک مجموعه متعامد است، بنابراین $x_0\in X$ای وجود داشته دارد بطوری که برای هر $x\in X$، $x\perp x_0$ یا $x_0\perp x$ برقرار است. پس $x_0\perp Tx_0$ یا $Tx_0\perp x_0$. دنباله $\{x_n\}$ را بصورت $x_n=T^n x_0=Tx_{n-1}$ تعریف می‌کنیم. چون T یک نگاشت $\perp$ − حافظ است بنابراین $x_1=Tx_0\perp T^2x_0=x_2$ یا $x_2=T^2x_0\perp Tx_0=x_1$. با ادامه دادن این فرایند در می‌یابیم که برای هر $n\in\mathbb{N}$، $x_n\perp x_{n+1}$ یا $x_{n+1}\perp x_n$. اگر $n_0\in\mathbb{N}$ای وجود داشته باشد بطوری که $x_0=x_{n_0+1}$، آنگاه به وضوح T یک نقطه ثابت دارد. بنابراین برای هر $n\in\mathbb{N}$ فرض می‌کنیم $x_n\neq x_{n+1}$. لذا برای هر $n\in\mathbb{N}$، $d(x_n,x_{n+1})>0$. حال چون T یک نگاشت انقباضی $\perp_{H\theta}$ -انقباض است، بنابراین از خاصیت نزولی بودن H در متغییر پنجمش، خاصیت $\theta(t+s)\le\theta(t)\theta(s)$ و نامساوی مثلثی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}&H(\theta(d(x_n,x_{n+1})),\theta(d(x_{n-1},x_n)),\\&\quad\theta(d(x_{n-1},x_n)),\theta(d(x_n,x_{n+1})),\\&\quad[\theta(d(x_n,x_{n+1}))][\theta(d(x_{n-1},x_n))],1)\\&\le H(\theta(d(x_n,x_{n+1})),\theta(d(x_{n-1},x_n)),\\&\quad\theta(d(x_{n-1},x_n)),\theta(d(x_n,x_{n+1})),\\&\quad\theta(d(x_{n-1},x_n))+\theta(d(x_n,x_{n+1})),1)\\&\le H(\theta(d(x_n,x_{n+1})),\theta(d(x_{n-1},x_n)),\\&\quad\theta(d(x_{n-1},x_n)),\theta(d(x_n,x_{n+1})),\\&\quad\theta(d(x_{n-1},x_{n+1})),1)\\&\le H(\theta(d(x_n,x_{n+1})),\theta(d(x_{n-1},x_n)),\\&\quad\theta(d(x_{n-1},x_n)),\theta(d(x_n,x_{n+1})),\\&\quad\theta(d(x_{n-1},x_{n+1})),\theta(d(x_n,x_n)))\\&= H(\theta(d(Tx_{n-1},Tx_n)),\theta(d(x_{n-1},x_n)),\\&\quad\theta(d(x_{n-1},Tx_{n-1})),\theta(d(x_n,Tx_n)),\\&\quad\theta(d(x_{n-1},Tx_n)),\theta(d(x_n,Tx_{n-1})))\\&\le 1.\end{aligned}$$

لذا بنابر $(H1)$، $k\in(0,1)$ای وجود دارد بطوری که
$\theta(d(x_n,x_{n+1}))\le[\theta(d(x_{n-1},x_n))]^k$

ازاینرو

$$\begin{aligned}1&<\theta(d(x_n,x_{n+1}))\le[\theta(d(x_{n-1},x_n))]^k\\&\le[\theta(d(x_{n-1},x_n))]^{k^2}\\&\le\dots\le[\theta(d(x_0,x_1))]^{k^n}\end{aligned}\qquad(۲.۱)$$

بنابراین با قرار دادن $n\to\infty$ در (۲.۱) خواهیم داشت
$\lim_{n\to\infty}\theta(d(x_n,x_{n+1}))=1.$

از طرف دیگر $\theta\in\Delta_\theta$، پس

$\lim_{n\to\infty}d(x_n,x_{n+1})=0$

در نتیجه اعداد $r \in (0,1)$ و $l \in (0,\infty]$ وجود دارند بطوری که

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\theta(d(x_n,x_{n+1}))-1}{[d(x_n,x_{n+1})]^r}=l.$$

فرض کنید $B^{-1}\in(0,l)$. بنابر تعریف حد $n_0 \in \mathbb{N}$ای وجود دارد بطوری که برای هر $n \geq n_0$،

$$\frac{\theta(d(x_n,x_{n+1}))-1}{[d(x_n,x_{n+1})]^r}\geq B^{-1},$$

و لذا

$$n[d(x_n,x_{n+1})]^r \leq nB[\theta(d(x_n,x_{n+1}))-1].$$

سپس از (۲. ۱) که برای هر $n \geq n_0$، خواهیم داشت

$$n[d(x_n,x_{n+1})]^r \leq nB[(\theta(d(x_0,x_1)))^{k^n}-1].$$

بنابراین با حدگیری از عبارت بالا خواهیم داشت

$$\lim_{n\to\infty} n[d(x_n,x_{n+1})]^r = 0.$$

در نتیجه $N_0 \in \mathbb{N}$ وجود دارد بطوری که برای هر $n \geq N_0$ داریم

$$n[d(x_n,x_{n+1})]^r \leq 1.$$

آنگاه برای هر $n \geq N_0$ و هر $\lambda > 0$ خواهیم داشت

$$d(x_n,x_{n+1}) \leq \frac{1}{n^{\frac{1}{r}}}.$$

هم اکنون برای $m > n \geq N_0$ می‌توان نوشت

$$d(x_n,x_m) \leq \sum_{i=n}^{m-1} d(x_i,x_{i+1}) \leq \sum_{i=n}^{m-1}\frac{1}{i^{\frac{1}{r}}}.$$

از آنجا که $r \in (0,1)$، لذا سری $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i^{\frac{1}{r}}}$ همگرا است که

این یعنی دنباله $\{x_n\}$، کوشی است. چون X کامل است بنابراین $x^* \in X_\omega$ وجود دارد که

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,x^*) = 0.$$

از $\perp$-پیوستگی T داریم

$$d(x^*,Tx^*) = \lim_{n\to\infty} d(x_{n+1},Tx^*)$$
$$= \lim_{n\to\infty} d(Tx_n,Tx^*) = 0.$$

یعنی $x^* = Tx^*$. پس T دارای یک نقطه ثابت است. حال می‌خواهیم ثابت کنیم نقطه ثابت T منحصر به فرد است. برای این کار فرض کنید x^* و y^* دو نقطه ثابت T باشند بطوری که $x^* \neq y^*$. چون $x^*, y^* \in Fix(T)$، لذا نتیجه می‌گیریم که $x^* \perp y^*$. بنابراین از (ii) داریم

$$\begin{aligned}
&H(\theta(d(x^*,y^*)),\theta(d(x^*,y^*)),1,\\
&\quad 1,\theta(d(x^*,y^*)),\theta(d(x^*,y^*)))\\
&\leq H(\theta(d(x^*,y^*)),\theta(d(x^*,y^*)),1,\\
&\quad 1,\theta(d(x^*,y^*)),\theta(d(x^*,y^*)))\\
&= H(\theta(d(x^*,y^*)),\theta(d(x^*,y^*)),\\
&\quad \theta(d(x^*,x^*)),\theta(d(y^*,y^*)),\\
&\quad \theta(d(x^*,y^*)),\theta(d(y^*,x^*)))\\
&= H(\theta(d(Tx^*,Ty^*)),\theta(d(x^*,y^*)),\\
&\quad \theta(d(x^*,Tx^*)),\theta(d(y^*,Ty^*)),\\
&\quad \theta(d(x^*,Ty^*)),\theta(d(y^*,Tx^*)))\\
&\leq 1.
\end{aligned}$$

از آنجا که $\theta(d(x^*,y^*)) > 1$، لذا از فرض قضیه و عبارت بالا خواهیم داشت

$$1 < F(\theta(d(x^*,y^*)),\theta(d(x^*,y^*)),1,$$
$$1,\theta(d(x^*,y^*)),\theta(d(x^*,y^*))) \leq 1,$$

که این یک تناقض است. پس $x^* = y^*$. یعنی نقطه ثابت T منحصر بفرد است.

ابتدا نگاشت انقباض زیر را تعریف می‌کنیم و سپس با بکار بردن مثال ۲-۱ و قضیه ۲-۱ یک نتیجه برای چنین نگاشت‌ها بدست می‌آوریم.

تعریف ۲-۳: فرض کنید $(X,d,\perp)$ فضای متریک متعامد و T یک خود نگاشت روی X باشد. همچنین فرض کنید $H:[1,\infty)^6 \to \mathbb{R}$ یک تابع باشد. گوییم T یک نگاشت $\perp_\theta$-انقباض است هرگاه برای هر $x,y \in X$ای که $x \perp y$ و $d(Tx,Ty) > 0$، $k \in (0,1)$ای وجود داشته باشد بطوریکه

$$\begin{aligned}&\theta(d(Tx,Ty))\\ &\leq [\max\{\theta(d(x,y)),\\ &[\theta(d(x,Tx))\theta(d(y,Ty))]^{\frac{1}{2}},\\ &[\theta(d(x,Ty))\theta(d(y,Tx))]^{\frac{1}{2}}\}]^k\end{aligned}$$

نتیجه ۲-۱: فرض کنید $(X,d,\perp)$ یک فضای متریک O-کامل باشد. همچنین فرض کنید T یک خود نگاشت روی X باشد بطوری که در شرایط زیر صدق کند.

(i) T یک نگاشت $\perp$ −حافظ است،

(ii) T یک نگاشت $\perp_\theta$-انقباض است بطوری که برای هر $t > 0$ و $s > 0$، $\theta(t+s) \leq \theta(t)\theta(s)$،

(iii) T یک نگاشت $\perp$ −پیوسته است.

در اینصورت T یک نقطه ثابت دارد. بعلاوه اگر برای هر $x,y \in Fix(T)$، آنگاه نقطه ثابت T منحصر بفرد است.

قضیه زیر را برای حالتی از $\perp_{H\theta}$-انقباض‌ها بدست می‌آوریم که $\perp$ −پیوسته نستند. اگر $\perp_{H\theta}$-انقباض‌ها $\perp$ −پیوسته نباشند می‌توان قضیه زیر را برای آن‌ها بدست آورد.

قضیه ۲-۲: فرض کنید $(X,d,\perp)$ یک فضای متریک O-کامل باشد. همچنین فرض کنید T یک خود نگاشت روی X باشد بطوری که در شرایط زیر صدق کند.

(i) T یک نگاشت $\perp$ −حافظ است،

(ii) T یک نگاشت $\perp_{H\theta}$-انقباض باشد که θ پیوسته است، برای هر $t > 0$ و $s > 0$، $\theta(t+s) \leq \theta(t)\theta(s)$ و شرایط $(H1)-(H4)$ برقرارند،

(iii) اگر $\{x_n\}$ یک O-دنباله در X باشد بطوری که $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X$، آنگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$، $x_n \perp x$.

در اینصورت T یک نقطه ثابت دارد. بعلاوه اگر برای هر $x,y \in Fix(T)$ داشته باشیم $x \perp y$، و برای هر $u > 1$، $H(u,u,1,1,u,u) > 1$، آنگاه نقطه ثابت T منحصر بفرد است.

اثبات: از آنجا که $(X,\perp)$ یک مجموعه متعامد است، بنابراین $x_0 \in X$ای وجود داشته دارد بطوری که برای هر $x \in X$، $x_0 \perp x$ یا $x \perp x_0$ برقرار است. پس $Tx_0 \perp x_0$ یا $x_0 \perp Tx_0$. همانند اثبات قضیه ۱.۲ O-دنباله $\{x_n\}$ را در نقطه آغازین x_0 طوری بدست می‌آوریم که کوشی باشد و به نقطه x^*، همگرا باشد. از (iii) برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم، $x_n \perp x^*$.

ابتدا فرض کنید برای هر $n \in \mathbb{N}$، k_nهایی وجود دارد بطوری که $d(x_{k_n+1},Tx^*) = 0$ و $k_n > k_{n-1}$ که در آن $k_0 = 1$. توجه داشته باشید که

$$d(x^*,Tx^*) \leq d(x^*,x_{k_n+1}) + d(x_{k_n+1},Tx^*),$$

لذا بدست می‌آوریم $d(x^*,Tx^*) = 0$. یعنی x^* نقطه ثابت T است. پس برای هر $n \in \mathbb{N}$ فرض می‌کنیم

$$d(x_{n+1},Tx^*) > 0.$$

پس از (ii) بدست می‌آید

$$\begin{aligned}&H(\theta(d(x_{n+1},Tx^*)),\theta(d(x_n,x^*)),\\ &\theta(d(x_n,Tx^*)),\theta(d(x^*,Tx^*)),\\ &\theta(d(x_n,Tx^*)),\theta(d(x^*,x_{n+1})))\\ &= H(\theta(d(Tx_n,Tx^*)),\theta(d(x_n,x^*)),\\ &\theta(d(x_n,Tx^*)),\theta(d(x^*,Tx^*)),\\ &\theta(d(x_n,Tx^*)),\theta(d(x^*,Tx_n)))\\ &\leq 1.\end{aligned}$$

با حدگیری از عبارت بالا و بکار بردن پیوستگی H و θ بدست می‌آید

$$\begin{aligned}&H(\theta(d(x^*,Tx^*)),1,\theta(d(x^*,Tx^*)),\\ &\theta(d(x^*,Tx^*)),\theta(d(x^*,Tx^*)),1) \leq 1.\end{aligned}$$

حال اگر $\theta(d(x^*,Tx^*))>1$ آنگاه بنابر $(H2)$،

$$H(\theta(d(x^*,Tx^*)),1,\theta(d(x^*,Tx^*)),\theta(d(x^*,Tx^*)),\theta(d(x^*,Tx^*)),1)>1,$$

که این یک تناقض است. پس $\theta(d(x^*,Tx^*))=1$. یعنی $d(x^*,Tx^*)=0$. بنابراین T دارای یک نقطه ثابت است. برای اثبات منحصر به فردی نقطه ثابت T همانند قضیه ۲-۱ عمل می‌کنیم.

نتیجه ۲-۲: فرض کنید $(X,d,\perp)$ یک فضای متریک $O-$کامل باشد. همچنین فرض کنید T یک خود نگاشت روی X باشد بطوری که در شرایط زیر صدق کند:

(i) T یک نگاشت $\perp-$حافظ است،

(ii) T یک نگاشت $\perp_\theta$-انقباض باشد که θ پیوسته است و برای هر $t>0$ و $s>0$، $\theta(t+s)\le\theta(t)\theta(s)$،

(iii) اگر $\{x_n\}$ یک $O-$دنباله در X باشد بطوری که $\lim_{n\to\infty}x_n=x\in X$، آنگاه برای هر $n\in\mathbb{N}$، $x_n\perp x$.

در اینصورت T یک نقطه ثابت دارد. بعلاوه اگر برای هر $x,y\in Fix(T)$ داشته باشیم $x\perp y$، آنگاه نقطه ثابت T منحصر بفرد است.

۳- نتایج نقاط ثابت در فضاهای متریک که به یک گراف مجهز شده است

در این بخش نشان خواهیم داد که با استفاده ازنتایج ما، نتایج نقطه ثابت زیادی در فضای متریک مجهز به گراف G بدست می‌آیند.

تعریف ۳-۱: فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد که به گراف G مجهز است و T نیز یک خود نگاشت روی X باشد. گوییم T یک نگاشت $G_\theta-$انقباض است هرگاه برای هر $x,y\in X$ای که $(x,y)\in E(G)$ و $d(Tx,Ty)>0$، $k\in(0,1)$ای وجود داشته باشد بطوری که

$$\theta(d(Tx,Ty))\le[\max\{\theta(d(x,y)),[\theta(d(x,Tx))\theta(d(y,Ty))]^{\frac{1}{2}},[\theta(d(x,Ty))\theta(d(y,Tx))]^{\frac{1}{2}}\}]^k.$$

قضیه ۳-۱: فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد که به گراف G مجهز است و $G-$کامل نیز می‌باشد. همچنین فرض کنید T یک خود نگاشت روی X باشد و شرایط زیر نیز برقرارند.

(i) $x_\cdot\in X$ای وجود دارد بطوری که برای هر $x\in X$، $(x_\cdot,x)\in E(G)$،

(ii) یک نگاشت $G-$پیوسته است،

(iii) $(x,y)\in E(G)\Rightarrow(Tx,Ty)\in E(G)$،

(v) یک نگاشت G_θ-انقباض است که برای هر $t,s\ge0$، $\theta(t+s)\le\theta(t)\theta(s)$.

در اینصورت T یک نقطه ثابت دارد. بعلاوه اگر برای هر $x,y\in Fix(T)$ داشته باشیم $(x,y)\in E(G)$، آنگاه نقطه ثابت منحصر بفرد است.

اثبات: رابطه باینری $\perp\in X\times X$ را به اینصورت تعریف می‌کنیم که، $x\perp y$ اگر $(x,y)\in E(G)$. پس بنابر (i)، $x_\cdot\in X$ وجود دارد بطوری که برای هر $x\in X$، $(x_\cdot,x)\in E(G)$. یعنی برای هر $x\in X$، $x_\cdot\perp x$. بنابراین $(X,d,\perp)$ یک فضای متریک متعامد است. همچنین به راحتی می‌توان بررسی کرد که $(X,d,\perp)$ یک فضای متریک $O-$کامل است (چون فضای متریک (X,d)، $G-$کامل است). بعلاوه از $G-$پیوستگی T می‌توان نتیجه گرفت که T یک نگاشت $\perp-$ پیوسته است.

اگر $x\perp y$ آنگاه $(x,y)\in E(G)$. از طرف دیگر از (iii) داریم $(Tx,Ty)\in E(G)$. یعنی $Tx\perp Ty$. در نتیجه T یک نگاشت $\perp-$حافظ است.

چون T یک نگاشت G_θ-انقباض است بنابراین برای هر $x,y\in X$ای که $(x,y)\in E(G)$ و $d(Tx,Ty)>0$، $k\in(0,1)$ای وجود دارد که

$$\theta(d(Tx,Ty))$$
$$\leq [\max\{\theta(d(x,y)),$$
$$[\theta(d(x,Tx))\theta(d(y,Ty))]^{\frac{1}{2}},$$
$$[\theta(d(x,Ty))\theta(d(y,Tx))]^{\frac{1}{2}}\}]^{k}.$$

یعنی برای هر $x,y\in X$ای که $x\perp y$ و $d(Tx,Ty)>0$، $k\in(0,1)$ای وجود دارد که

$$\theta(d(Tx,Ty))$$
$$\leq [\max\{\theta(d(x,y)),$$
$$[\theta(d(x,Tx))\theta(d(y,Ty))]^{\frac{1}{2}},$$
$$[\theta(d(x,Ty))\theta(d(y,Tx))]^{\frac{1}{2}}\}]^{k}.$$

یعنی ثابت کردیم T یک $\perp_{\theta}$-انقباض است. پس همه شرایط نتیجه ۲-۱برقرار است و T یک نقطه ثابت دارد. همچنین اگر برای هر $x,y\in Fix(T)$ داشته باشیم $(x,y)\in E(G)$، آنگاه برای هر $x,y\in Fix(T)$ خواهیم داشت $x\perp y$، که در این مورد نقطه ثابت T منحصر به فرد است.

قضیه ۳-۲: فرض کنید (X,d) یک فضای متریک باشد که به گراف G مجهز است و $G-$کامل نیز می‌باشد. همچنین فرض کنید T یک خود نگاشت روی X باشد و شرایط زیر نیز برقرارند.

(i) $x_{\cdot}\in X$ای وجود دارد بطوری که برای هر $x\in X$، $(x_{\cdot},x)\in E(G)$،

(ii) $(x,y)\in E(G)\Rightarrow(Tx,Ty)\in E(G)$،

(iii) T یک نگاشت G_{θ}-انقباض است که در آن θ پیوسته است و برای هر $t,s\geq 0$، $\theta(t+s)\leq\theta(t)\theta(s)$.

(iv) اگر $(x_n)_{n\geq 0}$ یک دنباله در X باشد بطوریکه $(x_n,x_{n+1})\in E(G)$ و $\lim_{n\to\infty}x_n=x\in X_{\omega}$ آنگاه برای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم $(x_n,x)\in E(G)$.

در اینصورت T یک نقطه ثابت دارد. بعلاوه اگر برای هر $x,y\in Fix(T)$ داشته باشیم $(x,y)\in E(G)$، آنگاه نقطه ثابت منحصر بفرد است.

اثبات: فرض کنید رابطه باینری $\perp\in X\times X$ همان رابطه بینری در اثبات قضیه قبل باشد. همانند اثبات قضیه قبل می‌توانیم بررسی کنیم که شرایط (i) تا (iii) از نتیجه ۲-۲ برقرارند. اگر $(x_n)_{n\geq 0}$ یک دنباله در X باشد بطوری که $x_n\perp x_{n+1}$ و $\lim_{n\to\infty}x_n=x\in X$. آنگاه برای هر $n\in\mathbb{N}$ داریم $(x_n,x_{n+1})\in E(G)$، که از (iv) نتیجه می‌گیریم $(x_n,x)\in E(G)$. پس برای هر $n\in\mathbb{N}$، $x_n\perp x$. بنابراین همه شرایط نتیجه ۲-۲ برقرارند. پس T یک نقطه ثابت دارد. همچنین اگر برای هر $x,y\in Fix(T)$ داشته باشیم $(x,y)\in E(G)$، آنگاه برای هر $x,y\in Fix(T)$ خواهیم داشت $x\perp y$، که در این مورد نقطه ثابت T منحصر به فرد است.

۴- نتایج نقطه ثابت در فضاهای متریک مرتب جزئی

در این بخش نشان خواهیم داد که با استفاده ازنتایج ما، نتایج نقطه ثابت زیادی در فضای متریک مرتب جزئی بدست می‌آیند.

تعریف۴-۱: فرض کنید $(X,d,\leq)$ یک فضای متریک و T نیز یک خود نگاشت روی X باشد. گوییم T یک نگاشت $\leq_{\theta}$-انقباض است هرگاه برای هر $x,y\in X$ای که $x\leq y$ و $d(Tx,Ty)>0$، $k\in(0,1)$ای وجود داشته باشد بطوریکه

$$\theta(d(Tx,Ty))$$
$$\leq [\max\{\theta(d(x,y)),$$
$$[\theta(d(x,Tx))\theta(d(y,Ty))]^{\frac{1}{2}},$$
$$[\theta(d(x,Ty))\theta(d(y,Tx))]^{\frac{1}{2}}\}]^{k}$$

قضیه ۴-۱: فرض کنید $(X,d,\leq)$ یک فضای متریک مرتب جزئی باشد که $\leq-$کامل نیز است. همچنین فرض کنید T یک خود نگاشت روی X باشد و شرایط زیر نیز برقرارند.

(i) $x_\cdot \in X$ای وجود دارد بطوری که برای هر $x \in X$، $x_\cdot \le x$،

(ii) یک نگاشت $\le -$پوسته است،

(iii) T یک نگاشت صعودی است،

(v) T یک نگاشت $\le_\theta$-انقباض است که برای هر $t,s \ge \cdot$، $\theta(t+s) \le \theta(t)\theta(s)$.

در اینصورت T یک نقطه ثابت دارد. بعلاوه اگر برای هر $x,y \in Fix(T)$ داشته باشیم $(x,y) \in E(G)$، آنگاه نقطه ثابت منحصر بفرد است.

اثبات: رابطه باینری $\perp \in X \times X$ را به اینصورت تعریف می‌کنیم که، $x \perp y$ اگر $x \le y$. پس بنابر (i)، $x_\cdot \in X$ وجود دارد بطوری که برای هر $x \in X$، $x_\cdot \le x$. یعنی برای هر $x \in X$، $x_\cdot \perp x$. بنابراین $(X,d,\perp)$ یک فضای متریک متعامد است. همچنین به راحتی می‌توان بررسی کرد که $(X,d,\perp)$ یک فضای متریک $O-$کامل است. بعلاوه از $G-$پیوستگی T می‌توان نتیجه گرفت که T یک نگاشت $\perp -$ پیوسته است.

اگر $x \perp y$ آنگاه $x \le y$. از صعودی بودن T داریم $Tx \le Ty$. یعنی $Tx \perp Ty$. در نتیجه T یک نگاشت $\perp -$حافظ است.

چون T یک نگاشت $\le_\theta$-انقباض است بنابراین برای هر $x,y \in X$ای که $x \le y$ و $d(Tx,Ty) > \cdot$، $k \in (0,1)$ای وجود دارد بطوری که

$$\theta(d(Tx,Ty)) \le [\max\{\theta(d(x,y)), [\theta(d(x,Tx))\theta(d(y,Ty))]^{\frac{1}{2}}, [\theta(d(x,Ty))\theta(d(y,Tx))]^{\frac{1}{2}}\}]^k.$$

یعنی برای هر $x,y \in X$ای که $x \perp y$ و $d(Tx,Ty) > \cdot$، $k \in (0,1)$ای وجود دارد بطوری که

$$\theta(d(Tx,Ty)) \le [\max\{\theta(d(x,y)), [\theta(d(x,Tx))\theta(d(y,Ty))]^{\frac{1}{2}}, [\theta(d(x,Ty))\theta(d(y,Tx))]^{\frac{1}{2}}\}]^k.$$

یعنی ثابت کردیم T یک $\perp_\theta$-انقباض است.

پس همه شرایط نتیجه ۲-۱ برقرار است و T یک نقطه ثابت دارد. همچنین اگر برای هر $x,y \in Fix(T)$ داشته باشیم $x \le y$، آنگاه برای هر $x,y \in Fix(T)$ خواهیم داشت $x \perp y$، که در این مورد نقطه ثابت T منحصر به فرد است.

قضیه ۴-۲: فرض کنید $(X,d,\le)$ یک فضای متریک مرتب جزئی باشد که $\le -$کامل نیز است. همچنین فرض کنید T یک خود نگاشت روی X باشد و شرایط زیر نیز برقرارند.

(i) $x_\cdot \in X$ای وجود دارد بطوری که برای هر $x \in X$، $x_\cdot \le x$،

(iii) نگاشت T نگاشتی صعودی است،

(v) T یک نگاشت $\le_\theta$-انقباض است که θ پیوسته است و برای هر $t,s \ge \cdot$، $\theta(t+s) \le \theta(t)\theta(s)$.

(iv) اگر $(x_n)_{n\ge \cdot}$ یک دنباله صعودی در X باشد $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X_\omega$ آنگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم $x_n \le x$.

در اینصورت T یک نقطه ثابت دارد. بعلاوه اگر برای هر $x,y \in Fix(T)$ داشته باشیم $x \le y$، آنگاه نقطه ثابت منحصر بفرد است.

اثبات: فرض کنید رابطه باینری $\perp \in X \times X$ همان رابطه باینری در اثبات قضیه قبل باشد. همانند اثبات قضیه قبل می‌توانیم بررسی کنیم که شرایط (i) تا (iii) از نتیجه ۲-۲ برقرارند. اگر $(x_n)_{n\ge \cdot}$ یک دنباله صعودی در X باشد بطوری که $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in X$. آنگاه از (iv) نتیجه می‌گیریم $x_n \le x$. پس برای هر $n \in \mathbb{N}$، $x_n \perp x$. بنابراین همه شرایط نتیجه ۲-۲ برقرارند. پس T یک نقطه ثابت دارد. همچنین اگر برای هر $x,y \in Fix(T)$ داشته باشیم $x \le y$ آنگاه برای هر $x,y \in Fix(T)$ خواهیم داشت $x \perp y$، که در این مورد نقطه ثابت T منحصر به فرد است.

فهرست منابع

[۱] پاک‌نظر، محدثه (۱۳۹۶). درباره نگاشت‌های $\alpha-\psi-$ مییر–کییلر. سیستم‌های مختلط و غیرخطی، دوره ۱، شماره ۱، صص ۲۹ تا ۴۶.

[2] S. Banach, Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application auxéquations integrals, Fundamenta Mathematicae, 3 (1922) 133-181.

[3] F.E. Browder, A new generalization of the Shauder fixed point theorem, Mathematische Annalen, 174 (1967) 285-390.

[4] F.E. Browder, The fixed point theory on multivalued mappings in topological vector spaces, Mathematische Annalen, 177 (1968) 283-301.

[5] P. Chaipunya, C. Mongkolkeha, W. Sintunavarat, P. Kumam, Fixed-Point Theorems for Multivalued Mappings in Modular Metric Spaces, Abstract and Applied Analysis, vol. 2012, Article ID 503504, 14 pages.

[6] E.H. Connell, Properties of fixed point spaces, Proceedings of the American Mathematical Society, 10 (6) (1959) 974-979.

[7] B.C. Dhage, Generalized metric space and mapping with fixed point, Bulletin of Calcutta Mathematical Society, 84 (1992) 329-336.

[8] K. Fan, Fixed point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces, Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America, 38 (1952) 121-126.

[9] C.J. Himmelberg, Fixed points of compact multifunctions, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 38 (1972) 205-207.

[10] S.K. Chatterjea, Fixed point theorems, Computers Rendus De L Academia Bulgare Des Sciences, 25 (1972) 727- 730.

[11] L. Ciric, A generalization of Banach's contraction principle, Proceedings of the American Mathematical Society, 45 (1974) 267-273.

[12] M. Edelstein, on fixed and periodic points under contractive mappings, J. London Math. Soc. 37 (1962) 74-79.

[13] B. Fisher, Four mappings with a common fixed point, Journal of University of Kuwait Science, 8 (1981) 131-139.

[14] G.E. Hardy, T.D. Rogers, A generalization of a fixed point theorem of Reich, Canadian Mathematical Bulletin, 1 (6) (1973) 201-206.

[15] N. Hussain, M. A. Kutbi, S. Khaleghizadeh, P. Salimi, Discussions on Recent Results for $\alpha-\psi$-Contractive Mappings, Abstract and Applied Analysis, Volume 2014, Article ID 456482, 13 pages.

[16] T. Bhaskar, V. Lakshmikantham, Fixed point theorems in partially ordered metric spaces and applications, Nonlinear Analysis. 65 (2006) 1379-1393.

[17] Y.J. Cho, B.E. Rhoades, R. Saadati, B. Samet, W. Shatanawi, Nonlinear coupled fixed point theorems in ordered generalized metric spaces with integral type, Fixed Point Theory and Applications, Volume 2012, 2012:8.

[18] I.L. Glicksberg, A further generalization of the Kakutani fixed theorem with application to Nash equilibrium points, Proceedings of the

[27] Z. Golubovic, Z, Kadelburg and S. Radenovi´c, Common fixed points of ordered g-quasicontractions and weak contractions in ordered metric spaces, Fixed Point Theory and Applications, 2012:20 (2012).

[28] B. Samet, Coupled fixed point theorems for a generalized Meir-Keeler contraction
in partially ordered metric spaces, Nonlinear Analysis, 72 (2010), 4508-4517.

[29] M. Eshaghi, M. Ramezani, M.D.L. Sen, Y.J. Cho, On orthogonal sets and Banach's fxed point theorem, Fixed point Theory, 18(2017), No. 2, 569-578, DOI 10.24193/FPT-RO.2017.2.45.

[30] H. Baghani, M. Eshaghi Gordji, M. Ramezani, Orthogonal sets: Their relation to the axiom choice and a generalized fixed point theorem, Journal of Fixed Point Theory and Applications, (2016), DOI 10.1007/s11784-016-0297-9.

[31] M. Ramezani, Orthogonal metric space and convex contractions, International Journal of Nonlinear Analysis and Applications, 6 (2015) No. 2, 127-132.

[32] J. Jachymski, *The contraction principle for mappings on a metric space with a graph*, Proceedings of the American Mathematical Society, 136 (2008) 1359-1373.

[33] R. Johnsonbaugh, *Discrete Mathematics (Fourth Edition)*, Upper Saddle River. NJ: Prentics Hal1. intemationa1, (1997) 257-280.

American Mathematical Society, 3 (1952) 170-174.

[19] K.S. Ha, Y.J. Cho, A. White, Strictly convex and strictly 2-convex 2-normed spaces, Mathematica Japonica, 33 (3) (1988) 375-384.

[20] M. Jleli and B. Samet, A new generalization of the Banach contraction principle, Journal of Inequalities and Applications, 2014, 2014:38.

[21] A.C.M. Ran and M.C. Reurings, A fixed point theorem in partially ordered sets and some applications to matrix equations, Proceedings of the American Mathematical Society, 132 (2004), 1435–1443.

[22] J.J. Nieto, R. Rodrıguez-Lopez, Contractive mapping theorems in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations, Order, 22 (2005), 223–239.

[23] R.P. Agarwal, M.A. El-Gebeily, D. O'Regan, Generalized contractions in par tially ordered metric spaces, Applicable Analysis, 87 (2008) 109–116.

[24] V. Berinde and F. Vetro, Common fixed points of mappings satisfying implicit contractive conditions, Fixed Point Theory and Application, 2012:105 (2012), doi: 10.1186 /1687-1812-2012-105.

[25] M. Cherichi, B. Samet, fixed point theorems on ordered gauge spaces with applications to nonlinear integral equations, Fixed Point Theory and Applications, 2012:13 (2012).

[26] L.Ciric, R.P. Agarwal and B. Samet, Mixed monotone-generalized contractions in partially ordered probabilistic metric spaces, Fixed Point Theory and Applications, 2011:56 (2011).